

Posiciones, movimientos y vectores

Capítulo

2

La teoría actual que trata las fuerzas y los movimientos en la escala concerniente a la vida diaria es la *Dinámica Clásica*, cuyos tres principios fundamentales:

- **Principio de Inercia,**
- **Principio de Masa,**
- **Principio de Acción y Reacción,**

fueron enunciados en 1687 por Isaac NEWTON en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (“Principios Matemáticos de Filosofía Natural”). Antes de esa teoría no era posible explicar completamente de manera satisfactoria detalles finos de ningún movimiento. Después de ella el estudio de los movimientos y la física en general, se desarrollaron vertiginosamente.

Esos tres principios definen el concepto de fuerza, el de masa, y *a la vez toda la dinámica*, y la comprensión completa de uno de ellos *no es posible sin la de los otros*, y obviamente la de todo junto sólo es posible para un experto. Pero el experto, antes de ser experto es aprendiz, y no puede aprehender todos los conceptos juntos, sino que debe construirlos gradualmente en su mente. Para lograr eso estamos planteando la elaboración gradual de los conceptos en un proceso cualitativo que no pretende, ni podría, ser riguroso desde el comienzo.

En este capítulo trataremos de motivarnos con planteos que sirvieron de motivación a NEWTON y a sus precursores, y en este proceso cualitativo llegaremos a enunciar el Principio de Inercia, desprendido de los otros, con la intención de preparar el terreno para la construcción conceptual de principiantes que sólo llegarán a expertos avanzando gradualmente en los capítulos.

Aprovecharemos además para presentar el concepto físico-matemático de **vector**, concepto que no existía en la época de NEWTON pero que se desarrolló para aplicar su teoría, y que ahora es la base imprescindible para cualquier estudio de movimientos (y para muchos otros campos de la física).

■ 2.1. Ideas fundamentales acerca del movimiento y las fuerzas

Introducción a un problema milenario

En la figura 2.1 se reproduce un grabado tomado de la correspondencia de René DESCAR-

TES -célebre pensador del siglo XVII que ya hemos mencionado; en él se ilustra un experimento propuesto por el padre Marin MERSENNE (1588-1648), estudioso de la época: « **Retomberatil?** » pregunta la leyenda de la parte superior, es decir: **¿volverá la bala (a la boca del cañón, al caer)?**

El sentido fundamental de la pregunta tenía que ver con las discusiones de la época acerca de la movilidad o inmovilidad de la Tierra, y podríamos decir que era el siguiente:

Suponiendo que el cañón pudiera alinearse verticalmente con toda exactitud, y que la bala luego de su ascenso cayera exactamente en la boca del cañón, (en ausencia de viento y haciendo todas las consideraciones simplificadoras que fuesen necesarias): ¿probaría eso la inmovilidad de la Tierra? ¿Por qué? ¿O acaso deberíamos esperar su caída exactamente en la boca del cañón, tanto si la Tierra se moviera como si estuviera inmóvil?

O bien dicho de otra manera:

Suponiendo que la Tierra se estuviese moviendo, viajando a gran velocidad por el espacio, por ejemplo hacia la derecha, ¿deberíamos esperar que la bala caiga exactamente (o al menos casi exactamente) en el punto de partida? ¿O acaso debemos esperar que se adelante o que se atrase en el sentido del movimiento de la Tierra? Si ese fuera el caso, ¿dónde deberíamos esperar su caída, adelante o atrás del punto de partida? ¿Por qué?



Fig. 2.1. Un cañón disparado verticalmente y queda planteada una duda que puede considerarse clásica: suponiendo que la Tierra viaja a gran velocidad, ¿dónde debe esperarse que caiga un proyectil que se dispara en dirección exactamente vertical?

Ni DESCARTES ni MERSENNE (ni nadie antes de la obra de NEWTON en 1687) disponían de los elementos conceptuales necesarios para tratar este problema en forma completa.

Nosotros aquí no intentaremos desarrollar la cuestión en forma completa, sino sólo tratar de que nos sirva de motivación y guía para plantear algunas nociones fundamentales.

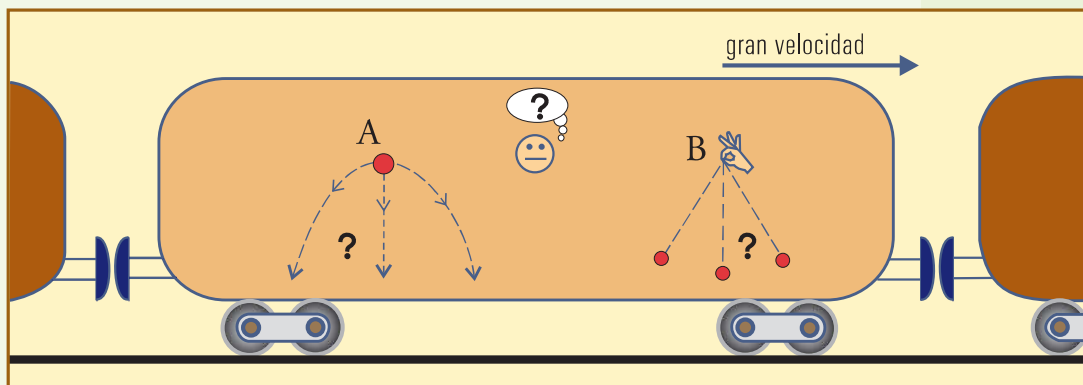
Nos interesa por ejemplo que el lector se pregunte en qué se parece este problema al que se plantea para responder las siguientes cuestiones:

- si un pasajero de un tren que viaja suavemente a gran velocidad deja caer una naranja, ¿Dónde cae ésta? ¿Influye en ello el movimiento del tren? ¿Cae justo debajo del punto en el que fue soltada? ¿O cae más adelante? ¿O más atrás?;
- ¿y si este pasajero saca la mano por la ventanilla y suelta la naranja fuera del tren? ¿Es lo mismo que dentro? ¿Qué diferencias hay?;
- una plomada (del tipo de albañil) utilizada dentro de este rápido tren, ¿debería indicar exactamente la vertical? ¿o debería colgar hacia atrás de la vertical? ¿o quizás hacia adelante?

La comparación con lo que sucedería fuera del tren tiene la intención de obligar a considerar los efectos de la presencia del aire, y a distinguirlos de los efectos del movimiento. Si no se logra

separar conceptualmente el efecto del aire no se puede llegar a una comprensión clara de estos fenómenos.

Fig. 2.2 . Imaginemos el interior de un vagón de tren viajando muy rápida y suavemente. ¿Según cuál de las trayectorias mostradas caería una naranja que un pasajero soltase en A? ¿Cómo colgaría en B un péndulo en reposo?



Nota 1. Imaginar la Tierra viajando en el vacío

El asunto del aire fue uno de los problemas que debió superar la ciencia medieval: si no es posible imaginar el vacío, si no se tiene la idea de que la Tierra tiene una delgada cubierta de aire que viaja con ella, y de que más allá no hay nada, entonces es necesario imaginar que los planetas se mueven dentro de un medio material, aire digamos, y en este caso -y éste era el caso de la ciencia medieval- estar en un planeta en movimiento se debía parecer mucho a sacar la cabeza por una ventanilla de un tren en movimiento.

Decir que el aire pudiera estar pegado a la Tierra y por encima de él no haber nada, contradecía abiertamente todas las ideas de la época acerca de las propiedades del aire (y también contradice las ideas intuitivas actuales, a menos que hagamos intervenir una compleja serie de conceptos e informaciones acerca de la gravedad, de las dimensiones de los cuerpos celestes etc.).

Ahora vamos a ensayar una respuesta a la cuestión para poder elaborar algunas ideas fundamentales.

Ensayo de respuesta

Como somos personas del siglo XXI, acostumbrados a los transportes veloces y más o menos suaves, y también a la idea de que viajamos velozmente por el espacio llevados por nuestro planeta sin sentir absolutamente nada por ello, podemos sin mucha dificultad situarnos mentalmente dentro del tren, con mucha información que no tenían en la Edad Media.

Podemos pensar: si viajo en un tren ideal, tan suave en su marcha que no puedo sentir ni el más mínimo ruido ni vibración, ¿cómo puedo darme cuenta de que estamos viajando? ¿Podré darme cuenta haciendo experimentos, tratando de caminar o de pararme en un solo pie, o necesariamente deberé mirar por la ventanilla?

Si miro por la ventanilla veo pasar el paisaje hacia atrás, pero haciendo cualquier cosa, haga lo que haga, no siento nada diferente de cuando hago lo mismo en una habitación sobre tierra firme.

Eso es lo que ocurre en la Tierra cuando veo todos los días salir y ponerse el Sol, la Luna,

las estrellas, etc. La vista nos dice que, o todo el Universo gira en torno nuestro hacia el oeste, o nosotros estamos girando hacia el este. Pero nosotros nos sentimos quietos. Las sensaciones tienen que ver con el movimiento, con la fuerza que debemos hacer para mantenernos en una posición u otra, con el equilibrio. Sobre esta cuestión las sensaciones nos pueden decir lo mismo que los experimentos con proyectiles, péndulos y cuerpos que caen: esto es, NADA.

Inmediatamente podemos elaborar un razonamiento de sentido común: “esto es como estar quietos, por lo tanto, estamos quietos”.

En este punto el conocimiento común se detiene, ha llegado a una conclusión, y pone fin al asunto. Y en este punto comienza a trabajar el conocimiento científico, diciendo: “ah sí, ¿y todo el universo gira alrededor nuestro? ¿qué cosa tan especial tiene este planeta que no tienen los otros?” – Ahora es mucho más fácil hacer este razonamiento que en la época de Galileo o COPÉRNICO, por supuesto.

Y entonces la ciencia, en este caso la física, elabora una idea básica: el movimiento es relativo. El pasajero del tren que se siente en reposo, **ESTÁ EN REPOSO**, con respecto al tren, mientras el paisaje viaja hacia atrás, con respecto al tren. Y el que está en el camino viéndolo pasar, **TAMBIÉN ESTÁ EN REPOSO**, con respecto al paisaje, mientras el tren viaja hacia delante (con respecto al paisaje).

Y aquí el trabajo de la ciencia **COMIENZA**. A continuación la física debe elaborar toda la teoría capaz de explicar cómo cada experimento tiene sentido independientemente de que los actores se consideren en reposo o en movimiento.

Y ese es el tema de este libro. Ahora vamos a capitalizar estas ideas básicas.

Tres ideas fundamentales

● 1.- El movimiento es relativo

Desde el punto de vista de la física, el movimiento de un cuerpo es algo que no adquiere pleno sentido en sí mismo, sino que debe describirse necesariamente en relación con otros cuerpos.

En física diremos que **un cuerpo se mueve cuando cambia de posición**.

La **posición** de un cuerpo se define con respecto a otros cuerpos, o con respecto a un **sistema de referencia**.

El sistema de referencia puede ser un conjunto de cuerpos de referencia, o una construcción abstracta definida con respecto a algún conjunto determinado de cuerpos.

Cuando hablamos de cómo se mueve un cuerpo sin mencionar con respecto a qué referencia, es claro que tenemos en mente, implícitamente, algún “fondo fijo” con respecto al cual decimos que el cuerpo en cuestión se mueve. Ese fondo fijo constituye el sistema de referencia con respecto al cual la idea de movimiento adquiere sentido. Saber

explicitar este sistema de referencia permite evitar muchas confusiones.

QUIÉN SE MUEVE, CÓMO SE MUEVE, ES UNA CUESTIÓN DE PUNTOS DE REFERENCIA.

Puede ilustrarse esta afirmación con infinidad de ejemplos:

- un cuerpo puede estar inmóvil en el interior de un vehículo, mientras el vehículo viaja. En este caso el cuerpo está inmóvil con respecto al vehículo, y en movimiento con respecto a los objetos del exterior;
- cualquier cuerpo que veamos inmóvil, en el mejor sentido de la palabra inmóvil, está compartiendo el movimiento de nuestro planeta con respecto a los demás astros;
- cualquier cuerpo que veamos moverse podría ser considerado inmóvil con respecto a otro cuerpo que acompañase adecuadamente su movimiento;
- etcétera.

De manera que la física no dictamina que la Tierra está realmente inmóvil, ni que está realmente en movimiento.

Pero dictamina que la afirmación de que la Tierra está inmóvil, y que lo que contradiga eso es falso, carece de sentido.

Y dictamina que la Tierra no es distinta de los demás planetas en cuanto a las características de su movimiento.

También dictamina que para entender los movimientos no es lo mismo elegir cualquier sistema de referencia: los movimientos de los planetas no se entienden si se toma la Tierra como referencia inmóvil, y se entienden muy bien si se toma al Sol como referencia (aproximadamente) inmóvil.

● 2.- Las **fuerzas** expresan acciones mecánicas entre cuerpos

Las **fuerzas** son los entes que expresan **cómo, con qué intensidad y qué orientación, un cuerpo empuja o tira de otro**, es decir que aparecen como resultado de interacciones entre cuerpos. Se da el nombre de *interacciones mecánicas* a las interacciones que se manifiestan por medio de fuerzas de un cuerpo sobre otro, y hablaremos extensamente de ellas en los próximos capítulos.

Es claro que los conceptos movimiento y fuerza, según como han sido presentados, son *absolutamente distintos*:

- las fuerzas son acciones sobre un cuerpo que resultan de su interacción con otros, que pueden producir su deformación, y que influyen sobre su movimiento.
- el hecho de moverse un cuerpo, como ya dijimos, es relativo, **depende de lo que se toma de referencia**, de manera que **no puede implicar por sí solo la existencia o no de fuerzas**.

No obstante estos conceptos se confunden fácilmente en la práctica, ya que estamos acostumbrados a que siempre es necesaria la aplicación de una fuerza para iniciar un movimiento. Pero debe recordarse que la aplicación de una fuerza también puede ser necesaria para detener un cuerpo en movimiento.

● 3.- Los cuerpos tienen Inercia

¿Por qué podría esperar Galileo que la bala no caiga detrás del cañón si la Tierra avanza (pensando, para simplificar, en un avance horizontal)? ¿Y por qué podríamos esperar nosotros que la naranja que cae dentro del tren acompañe exactamente al pasajero, y choque contra el piso en el punto justo debajo del punto donde inició su caída? ¿O que el hilo de la plomada dentro del rápido tren no necesite inclinarse absolutamente nada hacia delante para arrastrar al plomo con la gran velocidad de aquél?

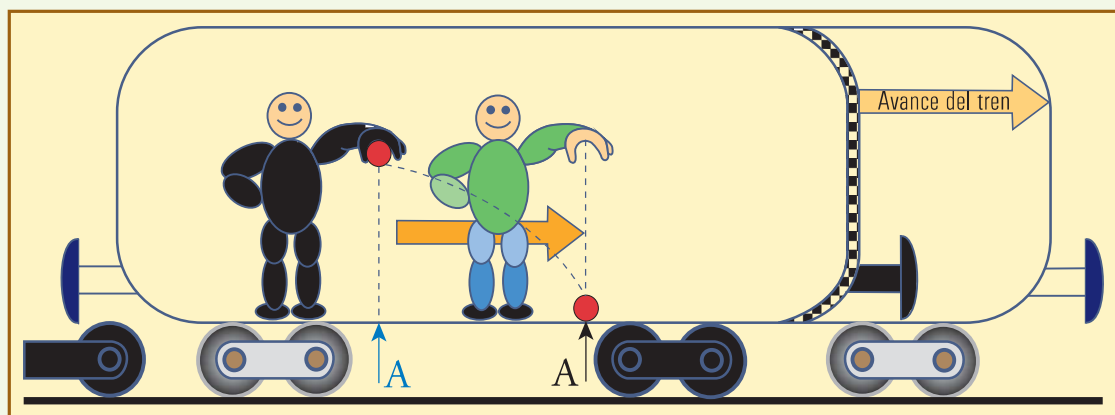
Entre 1600 y 1610, Galileo GALILEI había establecido la **conservación de la velocidad en el sentido horizontal** de los proyectiles, y esto sirvió de base para que DESCARTES enunciara en 1629 dos axiomas que se consideran válidos aún hoy. Estos axiomas de DESCARTES son:

1. un cuerpo mantiene su estado de reposo o de movimiento;
2. el movimiento natural es rectilíneo.

Alrededor de cincuenta años después NEWTON enunció el **Principio de Inercia** (según el diccionario, se llama **inercia** a la **incapacidad** de los cuerpos para cambiar por sí mismos su estado de movimiento) reuniendo estos dos axiomas. Este principio es básico para la física actual, y estos enunciados también lo fueron en su época. Cada uno proponía nuevas formas de ver el mundo. El primer enunciado permitió imaginar que un movimiento no necesitaba esencialmente de fuerzas aplicadas para mantenerse, y el segundo permitió escapar de la idea aristotélica vigente por muchos siglos, de que el movimiento natural era el circular (que aparentemente se mantenía inalterable en los cuerpos celestes), dictaminando que el movimiento natural, **con respecto al cual se decide si han debido o no actuar agentes modificadores (fuerzas)**, es el **rectilíneo**.

Si aplicamos estos enunciados a las preguntas hechas al comienzo, encontramos las mismas respuestas que Galileo dio al problema en su época, según las cuales los experimentos consistentes en lanzar proyectiles y observar su movimiento no sirven para mostrar si la Tierra *se mueve o no*.

Fig. 2.3. Si el tren avanza uniformemente, la naranja que se suelta exactamente sobre A cae exactamente sobre la nueva posición de A, ya que por inercia, mientras cae, la naranja conserva la velocidad en sentido horizontal del tren y avanza tanto como él. **Respecto del ambiente interior del tren** todo sucede como si éste estuviese en reposo; esa es la única forma de que todos los objetos estén animados, en lo que a la dirección horizontal se refiere, de la misma velocidad del tren.



Según las ideas de Galileo el proyectil antes de ser lanzado por el cañón ya participa del movimiento horizontal de la Tierra, y en ausencia de perturbaciones horizontales debe conservar este movimiento, acompañando así exactamente al cañón en todo el trayecto (mientras independientemente, en la dirección vertical la gravedad realiza su acción de atraer al proyectil hacia el suelo). Y nosotros lo único que le agregamos a esto es la denominación *inercia* (horizontal) del proyectil.

Lo mismo decimos para la plomada dentro del tren: la masa de la plomada *no necesita ser empujada* una vez que está viajando, ya que por inercia mantiene su velocidad. Sólo es necesario sostenerla para contrarrestar la acción de la gravedad (peso).

Para la naranja que se deja caer dentro del tren vale el mismo análisis que para el proyectil: en la figura 2.3 la naranja es soltada en un punto de la línea vertical que pasa por A, de manera que allí exactamente (en A) debería caer si el tren estuviese en reposo. Y lo que se ilustra es que la naranja también cae allí si el tren viaja uniformemente, pues *mientras cae avanza tanto como el tren*.

Cerraremos estas ideas básicas con el enunciado formal del Principio de Inercia, mostrando cómo simplemente se limita a formalizar las ideas enunciadas antes.

Principio de Inercia

Todo cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas, se mantiene en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta.

Principio de Independencia de los Movimientos

La idea de que la ausencia de perturbaciones horizontales permite aplicar “la conservación de la velocidad de los proyectiles en sentido horizontal”, aunque en sentido vertical actúe la gravedad haciendo caer al proyectil, básica en todas las explicaciones anteriores, es sólo un caso particular de una idea fundamental conocida como **Principio de Independencia de los Movimientos**.

Este principio dice que lo que sucede con el movimiento en cada dirección del espacio puede tratarse exclusivamente en función de las fuerzas en esa dirección, independientemente de las fuerzas en las otras direcciones.

En los años posteriores a NEWTON esa idea se transformó en la concepción **vectorial** del movimiento, imprescindible para la forma actual de tratar estos temas (y muchos otros). Como veremos en el próximo punto, los **vectores** son entes definidos sobre la base de la idea de la **independencia de las distintas direcciones del espacio**.

■ 2.2. Vectores

● Sistema de referencia y ejes cartesianos

Para hablar de un movimiento es fundamental establecer claramente (aunque sea de manera tácita) un sistema de referencia, con respecto al cual se describen las posiciones.

Los elementos del sistema de referencia que se utilizan casi universalmente para especificar la orientación y los demás elementos de los vectores son los *ejcs cartesianos*, o *de coordenadas cartesianas* (nombrados así en memoria de DESCARTES, su inventor). Estos ejes son líneas rectas elegidas arbitrariamente según las distintas direcciones del espacio, a las cuales se designa con las letras x , y , z . Generalmente se trabaja en dos dimensiones, es decir en el plano, con sólo los ejes x , y .

Aunque los ejes cartesianos pueden ser definidos con el grado arbitrario de oblicuidad entre ellos que se desee, todo es más sencillo si se los elige perpendiculares entre sí, y en este caso se habla de *ejcs cartesianos ortogonales*.

● Vectores y escalares: el vector posición

A cada entidad vectorial le asignaremos un **vector**, representado gráficamente con una **flecha**, la cual además de orientarse en el espacio con la dirección y sentido del ente que representa, se puede dibujar con una *longitud* que, *a través de una escala establecida*, representa la intensidad o magnitud correspondiente, a la cual se denomina “módulo” del vector.

Por otra parte, para los entes que no son susceptibles de tener orientación en el espacio, reservamos el nombre de “escalares”, que son simplemente números con la unidad de la magnitud física correspondiente. Por ejemplo son escalares la temperatura, la masa, el tiempo, etc.

El vector por excelencia, a partir del cual se establecen las propiedades de todos los vectores, es el **vector posición**, que nos servirá para ejemplificar y guiar esta presentación.

El vector posición sirve para indicar la posición de cualquier punto con respecto a un punto O elegido como origen, de la manera que se ilustra en las figuras siguientes: 2.5; ó 2.6.

Para mantener cierta tradición muy arraigada en física, utilizaremos “ $\vec{r}$ ” (la letra r minúscula, con una flechita indicativa del carácter vectorial), para designar cualquier vector posición.

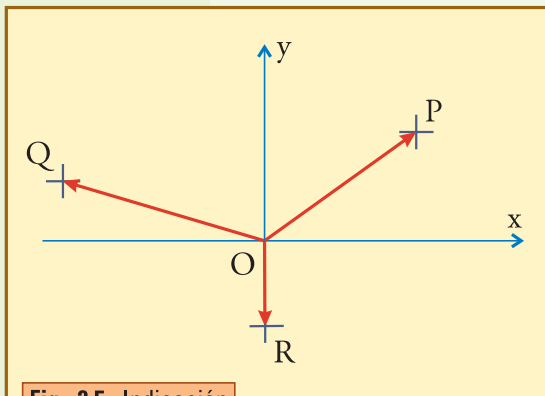


Fig. 2.5. Indicación de la posición de tres puntos arbitrarios con respecto al punto O , por medio de los correspondientes “vectores posición”.

Las características fundamentales del vector posición están dadas por los siguientes enunciados y figuras, los cuales, una vez dejados de lado los detalles particulares, deben interpretarse como válidos para todas las demás magnitudes vectoriales en general.

- El segmento OP , *orientado desde O hacia P* , es lo que se denomina *vector posición de P respecto de O* . Lo podemos designar equivalentemente con $\vec{r}$, $\vec{r}_P$, $\overrightarrow{OP}$, o de alguna otra manera que resulte clara en el planteo que se esté tratando.
- La recta definida por O y por P indica la *dirección* del vector, pudiéndose decir que dicha recta es la dirección del vector. Sobre esta recta hay *dos sentidos posibles*: desde O hacia P , que es el que le corresponde a nuestro vector, y el contrario, desde P hacia O .
- La longitud del segmento OP , es decir la *distancia entre O y P* , se denomina “módulo” del vector y es un número (con su unidad) siempre positivo. Para cualquier vector la *intensidad* o *módulo* es un **escalar**, y se simboliza con el mismo nombre del vector sin flechita encima, o con las barras de valor absoluto (para este caso r , o $|\vec{r}|$).
- Cualquiera de los elementos intervinientes se calcula aplicando las definiciones trigonométricas elementales (o los conceptos geométricos que correspondan en cada caso):

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para el ejemplo de la figura 2.6.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,75$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = 0,80$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = 0,60$$

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

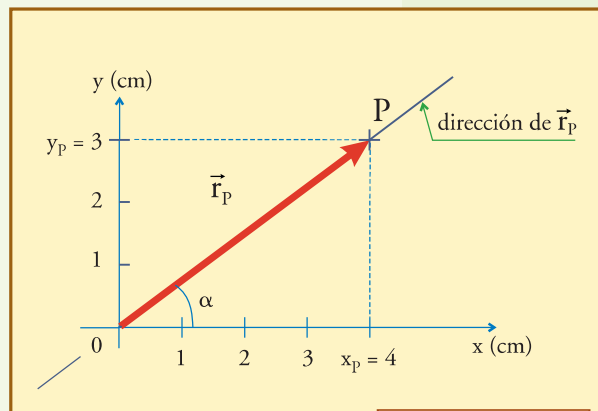


Fig. 2.6. Elementos que corresponden al vector indicativo de la posición de P .

Existe una gran variedad de modalidades en la notación para designar vectores. En este texto mantendremos siempre la costumbre de colocar una flechita horizontal encima de la o las letras que constituyan el nombre, para indicar el carácter vectorial de una magnitud.

Por otra parte, como ya se dijo, reservaremos la letra r (abreviatura de “radio”, o “radio vector”, denominación que a veces se usa) para el nombre del vector posición, a veces con índices o subíndices. Aunque como se verá inmediatamente, a veces recurriremos a otras letras y modalidades para este mismo vector.

- Las coordenadas cartesianas $(x_p; y_p)$ del punto P, se denominan, desde el punto de vista vectorial, “*componentes cartesianas*” del vector :

x_p = componente de $\vec{r}$ según el eje x

y_p = componente de $\vec{r}$ según el eje y

Con las coordenadas cartesianas se acostumbra también a expresar el vector como “par ordenado (de componentes)”:

$$\vec{r} = (x_p; y_p)$$

Esto permite distinguir claramente cuándo se ha escrito un vector y cuándo un escalar. Para el ejemplo de fig. 2.6 :

$\vec{r} = (4 \text{ cm} ; 3 \text{ cm})$ vector, es decir,
par ordenado de componentes.

$r = 5 \text{ cm}$ módulo del vector, es decir,
número o escalar.

• El vector posición interpretado como desplazamiento

Se gana cierta claridad en la interpretación de las operaciones vectoriales que veremos inmediatamente, si se identifica al vector $\vec{OP}$ (que es el mismo $\vec{r}$, o $\vec{r}_p$ del punto anterior) con el *desplazamiento* que debería sufrir el punto O para ser llevado a coincidir con el P. Este desplazamiento no tiene porqué ocurrir en realidad, no estamos hablando de que algo se esté moviendo, sólo hablamos de un desplazamiento imaginado, totalmente ideal, que utilizamos para elaborar razonamientos.

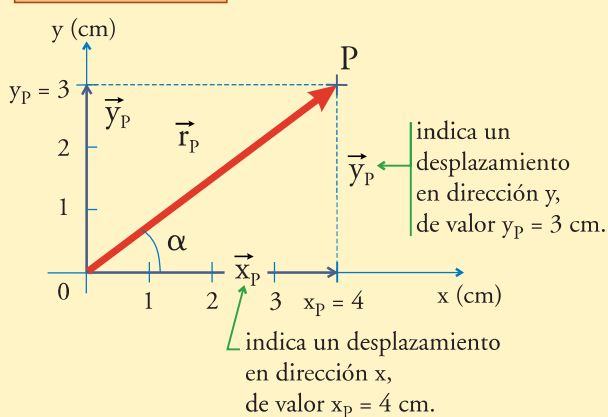
Pensando de esta manera, resulta que las componentes x_p e y_p de este vector también pueden ser pensadas como otros tantos vectores, $\vec{x}_p$ e $\vec{y}_p$, indicativos de “*desplazamientos componentes*”, tales que efectuados en sucesión, uno a continuación del otro, en cualquier orden, llevarían también el punto O al lugar ocupado por P, como se ilustra en la figura 2.7.

De esta manera tiene sentido interpretar que cualquier vector desplazamiento es el

resultado de “componer sus desplazamientos componentes”. Debe quedar claro que en el concepto de desplazamiento que estamos utilizando no interesa el camino, sino el punto final: decimos que el desplazamiento indicado por $\vec{r}_p$ es el mismo que el indicado por $\vec{x}_p + \vec{y}_p$, sólo porque ambos llevan el mismo punto inicial al mismo punto final, independientemente de lo hacen por distintos caminos.

Esta interpretación sugiere naturalmente denominar suma vectorial de desplazamientos, a la composición de los mismos, es decir a la ejecución sucesiva de los despla-

Fig. 2.7. Las coordenadas del punto P interpretadas como vectores desplazamiento que “componen” al desplazamiento $\vec{OP}$.



mientos indicados por los vectores que se suman, independientemente de que éstos se orienten o no según los ejes cartesianos. Esto es lo que formalizamos en el próximo punto.

Composición o suma vectorial

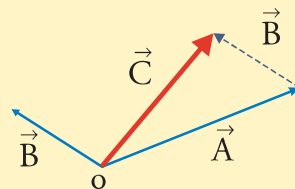
Esta definición, expresada con *ayuda* de la idea de desplazamiento, es directamente aplicable a cualquier vector aunque no represente desplazamientos, ya que siempre será aplicable a los **dibujos representativos** de cualquier vector.

Podemos establecer una definición analítica a partir de estos conceptos esencialmente geométricos, razonando como se muestra a continuación.

Primero realizamos el desplazamiento indicado por $\vec{A}$, desplazando según $\vec{A}_x$ y luego según $\vec{A}_y$, y luego, de la misma manera realizamos el desplazamiento posterior, indicado por $\vec{B}$ (fig. 2.8). Ahora bien, dado que el orden de los desplazamientos no influye en el punto final al que se llega, es fácil advertir que podemos efectuar primero todos los desplazamientos a lo largo de un eje, el x por ejemplo, y luego a lo largo del otro.

Así encontramos que el desplazamiento resultante en cada eje debe valer $C_x = A_x + B_x$, y $C_y = A_y + B_y$, es decir que la suma vectorial equivale a una suma por separado de las componentes según cada eje (CUIDADO CON LOS SIGNOS: la operación indicada es una suma, en la cual cada término tiene su signo particular, es decir, lo que se denomina “suma algebraica”).

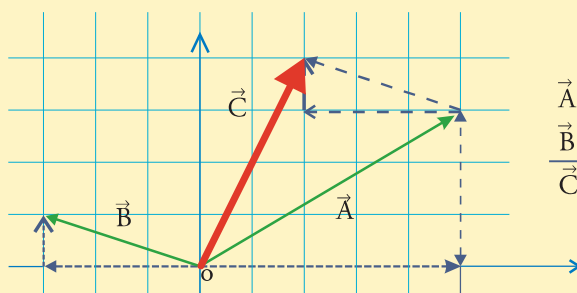
Se define como **composición**, o suma, de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, a la operación que da por resultado un vector $\vec{C}$ tal que cumple con las relaciones propuestas por la figura:



Esta figura se interpreta diciendo:

El vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, es el vector que indica el desplazamiento que se obtiene realizando el desplazamiento $\vec{A}$, y a continuación el $\vec{B}$.

Fig.2.8. Ejemplo de suma vectorial construida con desplazamientos sucesivos a lo largo de las direcciones de los ejes coordenados: Si $\vec{A} = (5 \text{ hacia la derecha}, 3 \text{ hacia arriba})$, y $\vec{B} = (3 \text{ hacia la izquierda}, 1 \text{ hacia arriba})$, entonces: $\vec{A} = 5 \text{ hacia la derecha}, \text{ luego } 3 \text{ hacia arriba}, \text{ luego } 3 \text{ hacia la izquierda}, \text{ y luego } 1 \text{ hacia arriba} = 5 \text{ hacia la derecha y } 3 \text{ hacia la izquierda}, \text{ es decir, } 2 \text{ hacia la derecha}, \text{ y luego } 3 \text{ hacia arriba y } 1 \text{ hacia arriba}, \text{ es decir, } 4 \text{ hacia arriba} = (2; 4) = \vec{C}$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= (5; 3) \\ \vec{B} &= (-3; 1) \\ \hline \vec{C} &= (2; 4)\end{aligned}$$

Si $\vec{A} = (5 \text{ hacia la derecha}, 3 \text{ hacia arriba})$, y $\vec{B} = 3 \text{ hacia la izquierda}, 1 \text{ hacia arriba})$, entonces $\vec{A} + \vec{B} = 5 \text{ hacia la derecha}, \text{ luego } 3 \text{ hacia arriba}, \text{ luego } 3 \text{ hacia la izquierda}, \text{ y luego } 1 \text{ hacia arriba}$
 $\vec{A} + \vec{B} = 5 \text{ hacia la derecha y } 3 \text{ hacia la izquierda}, \text{ es decir, } 2 \text{ hacia la derecha}, \text{ y luego } 3 \text{ hacia arriba y } 1 \text{ hacia arriba}, \text{ es decir; } 4 \text{ hacia arriba}$
 $\vec{A} + \vec{B} = (2; 4) \Rightarrow \vec{C} = (2; 4)$

Esto constituye una definición analítica de la suma vectorial, totalmente equivalente a la anterior:

$$\text{Suma Vectorial (definición analítica)} \quad \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}, \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ y \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$$

• Ejemplo

Sumar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, definidos de las siguientes maneras: $\vec{A}$ es un vector de módulo $A = 6$, orientado a lo largo del eje x, hacia la derecha. $\vec{B}$ tiene módulo $B = 4$, y está orientado a 120° hacia la izquierda de $\vec{A}$. $\vec{C}$ tiene módulo 2, orientado como el eje y, hacia abajo.

• Desarrollo

Aunque no es imprescindible, para tener una imagen clara en la mente de lo que sucede, hay que comenzar con un dibujo de la situación. Nótese que estos vectores no tienen unidad, es decir que podrían representar una entidad vectorial de cualquier naturaleza, como fuerzas, velocidades, o campos eléctricos, y no necesariamente posiciones o desplazamientos. Pero el procedimiento para sumarlos es independiente de ello.

Primero encontremos las componentes de cada vector. Las componentes de A y C prácticamente están dadas por el enunciado:

$$A_x = 6,$$

$$A_y = 0, C_x = 0, C_y = -2; \text{ para } \vec{B} \text{ aplicamos}$$

$$B_x = B \cos 120^\circ$$

$$B_x = B \cos 60^\circ$$

$$B_x = -2, B$$

$$B_y = B \sin 120^\circ$$

$$B_y = 3,56$$

A partir de la expresión de cada vector en componentes, es fácil escribir el resultado efectuando la suma componente a componente:

$$\vec{R} = (6; 0) + (-2; 3,56) + (0; -2)$$

$$\vec{R} = (4; 1,56)$$

Lo que nos interesa más es mostrar las posibilidades gráficamente.

Lo vamos a hacer agregando los vectores a continuación en órdenes diferentes:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C},$$

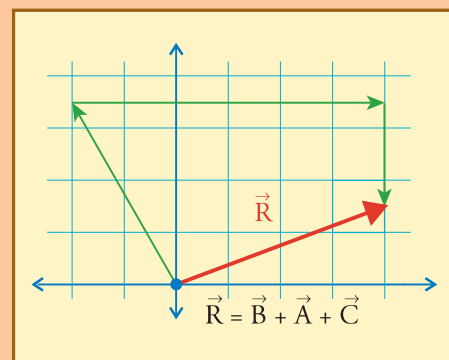
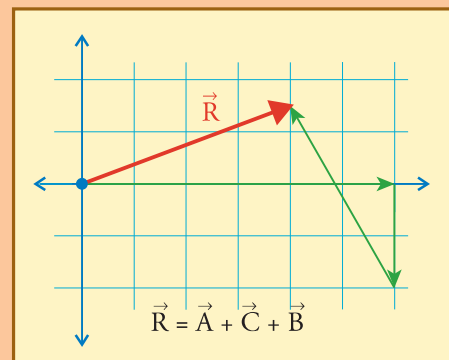
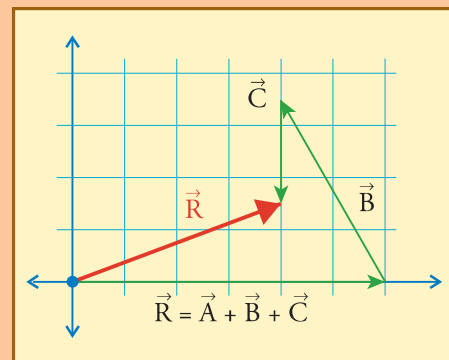
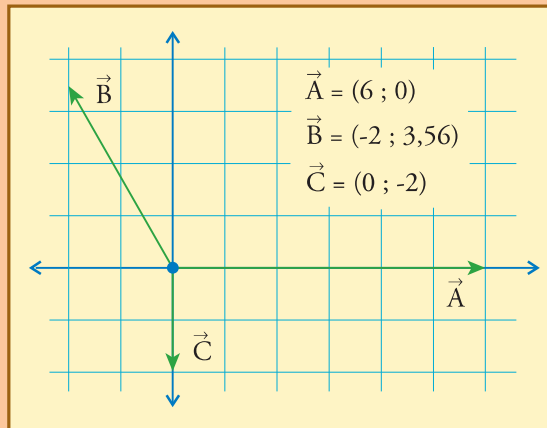
$$\vec{A} + \vec{C} + \vec{B},$$

$$\vec{B} + \vec{A} + \vec{C} \text{ y}$$

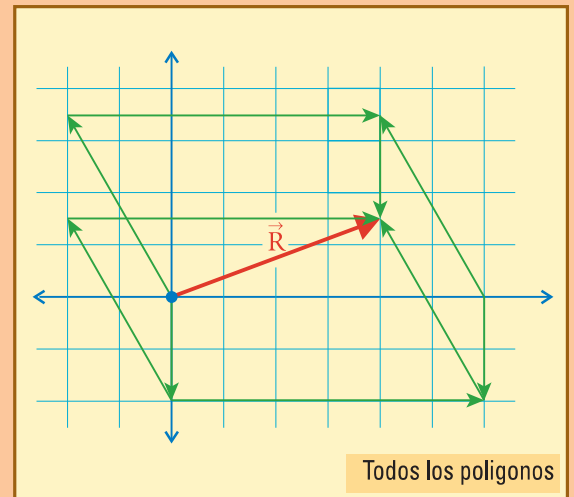
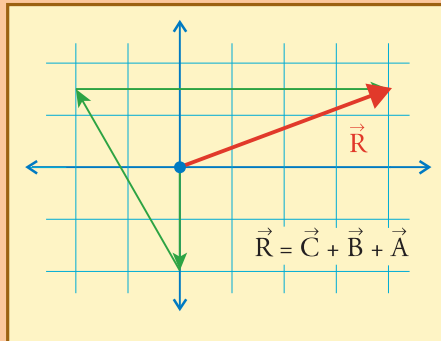
$$\vec{C} + \vec{B} + \vec{A}.$$

Hay más posibilidades, y por supuesto todas llevan al mismo vector como resultado. En cada caso queda dibujado un polígono diferente, siempre con los mismos cuatro lados, que son los tres vectores que se suman, y $\vec{R}$, como se muestra en la figura. Esta forma de sumar vectores suele denominarse método del polígono vectorial.

Es interesante notar que en la suma vectorial sólo intervienen las componentes de los vectores, y da lo mismo ubicarlos en cualquier parte, con tal de respetar las componentes de cada uno. Por otra parte, al imaginar que



cada vector se compone de un desplazamiento o contribución en un eje, seguido del correspondiente desplazamiento o contribución en el otro eje, se entiende muy claramente por qué el orden de la suma no afecta al resultado. En los distintos problemas de física en los que intervengan vectores tendremos ocasión de interpretar para qué aspectos de los fenómenos sólo interesan las componentes de determinado vector, y qué se hace cuando además interesan otras cosas.



Nota 2. El paralelogramo de vectores

Cuando se efectúa la suma de dos vectores, el polígono se reduce a un triángulo. Y si se juntan los dos triángulos que resultan de sumar los vectores en un orden y en el otro, se obtiene un paralelogramo, con el vector resultante en la diagonal. A veces se denomina "Método del Paralelogramo", al procedimiento de dibujar esta figura, que obviamente es totalmente equivalente al anterior.

Aquí mostramos cómo quedaría la suma de la figura 2.8, con el método del paralelogramo.

El método del paralelogramo sirve para sumar dos vectores. Para más vectores es incómodo porque se requiere ir agrupando de a dos sucesivamente. Y aquí vemos cómo quedaría la suma del ejemplo desarrollado antes, si se dibujaran los paralelogramos para dos maneras de agrupar las sumas.

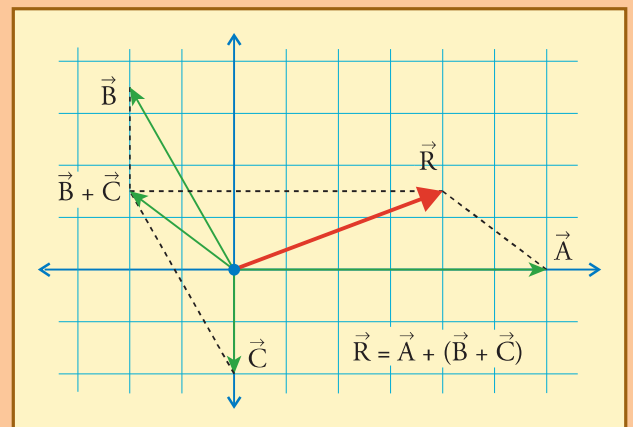
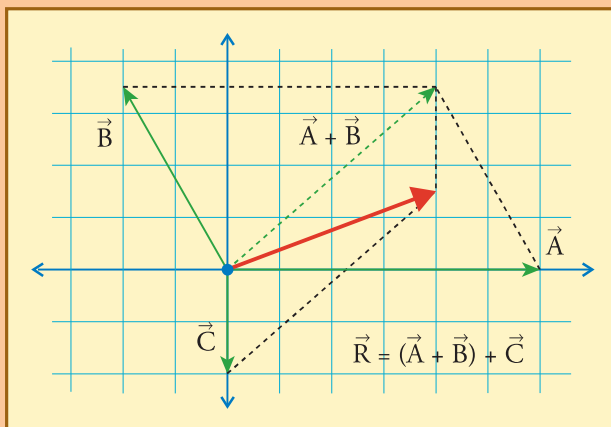
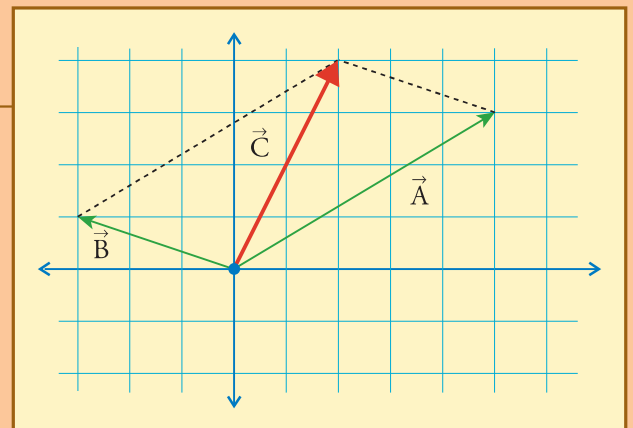
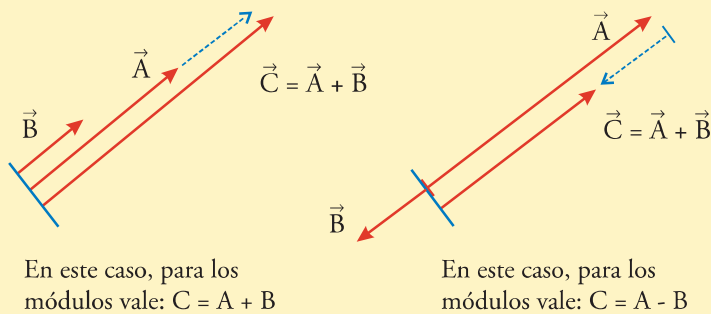


Fig. 2.9. Ilustración de la suma de vectores de igual dirección, con igual sentido (izquierda), o con sentido opuesto (derecha).



A partir las definiciones dadas resulta una serie de propiedades de la suma vectorial que interesan en la práctica. Las enumeramos a continuación, algunas con títulos propios:

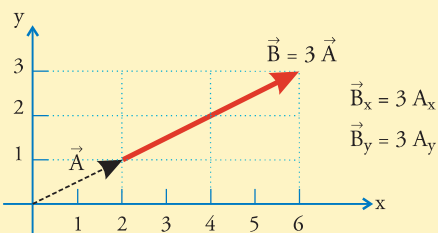
1. la suma vectorial es **conmutativa**: el orden en que se sumen los vectores no afecta al resultado.
2. la suma vectorial es **asociativa**: en una suma de muchos vectores se pueden efectuar sumas parciales, y luego sumar entre sí estos resultados parciales para obtener el resultado final.
3. sumar vectores de la misma dirección da por resultado un vector de la misma dirección, con un módulo que se obtiene avanzando y retrocediendo a lo largo de esa dirección según sea el sentido de los vectores componentes.

En particular, si se suman dos vectores de igual sentido, el módulo del vector resultante se obtiene sumando los módulos de los vectores componentes; y si se suman dos vectores de sentido contrario, el módulo del vector resultante se obtiene restando los módulos de los vectores componentes (el módulo mayor menos el menor).

Multiplicación de un vector por un número

4. multiplicar un vector $\vec{A}$ por un número natural n debe interpretarse como sumar n vectores iguales a $\vec{A}$, es decir agregar sucesivamente estos n vectores. El resultado es otro vector de la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{A}$, cuyo módulo será n veces el módulo de $\vec{A}$, y que además tendrá cada componente igual a n veces la correspondiente componente de $\vec{A}$.

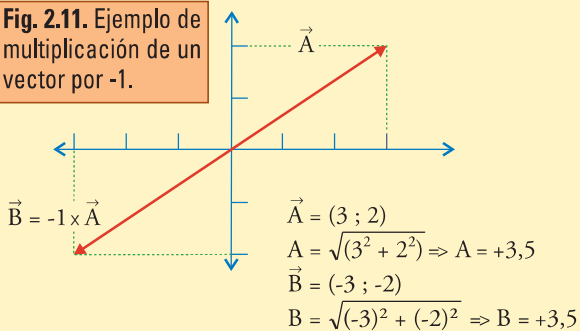
Fig. 2.10. Ejemplo de multiplicación de un vector por un número entero.



Es decir: $\vec{B} = n\vec{A}$ si $\vec{B} = \vec{A} + \vec{A} + \dots (n \text{ veces}) \dots + \vec{A}$;

por lo cual, $B_x = nA_x$, y $B_y = nA_y$.

Fig. 2.11. Ejemplo de multiplicación de un vector por -1.



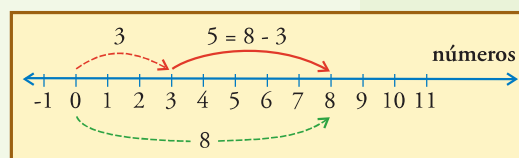
5. multiplicar un vector por un número real o escalar cualquiera u , se interpreta de la misma manera explicada en el punto anterior: $B = uA$ significa $B_x = uA_x$, y $B_y = uA_y$. Si u es negativo, al multiplicarlo por un vector le invierte el sentido.
6. si multiplicamos un vector por $u = -1$, obtenemos un vector $\vec{B}$ opuesto a $\vec{A}$: $\vec{B} = -\vec{A}$. En este caso: $B_x = -A_x$,

$B_y = -A_y$, es decir: $\vec{B} = (-A_x; -A_y)$. Nótese que ambos vectores tienen el mismo módulo, positivo en ambos, ya que el módulo, que es la longitud en el dibujo, se define como positivo ($\vec{B} = -\vec{A}$, pero $B = A$). Se ilustra en la figura 2.11.

Diferencia de vectores

La diferencia o resta de vectores se define a partir de la suma, de la misma manera que se procede con los números. Es decir, para fijar ideas revisemos con un ejemplo lo que hacemos para restar números: el número 8 menos el número 3 es el número que hay que agregarle al 3 para llegar al 8, o sea, 5.

Si interpretamos cada número como un desplazamiento de la longitud correspondiente, podemos representar gráficamente la resta anterior como sigue:



Con el mismo esquema de pensamiento definimos la diferencia o resta de vectores $\vec{A} - \vec{B}$ de la manera natural a partir de la suma:

LA DIFERENCIA $\vec{A} - \vec{B}$ ES UN VECTOR $\vec{C}$, TAL QUE SUMADO A $\vec{B}$ DA EL VECTOR $\vec{A}$

Esto, gráficamente, significa que el vector $\vec{C}$ debe ir desde la punta del vector $\vec{B}$ hasta la punta del vector $\vec{A}$.

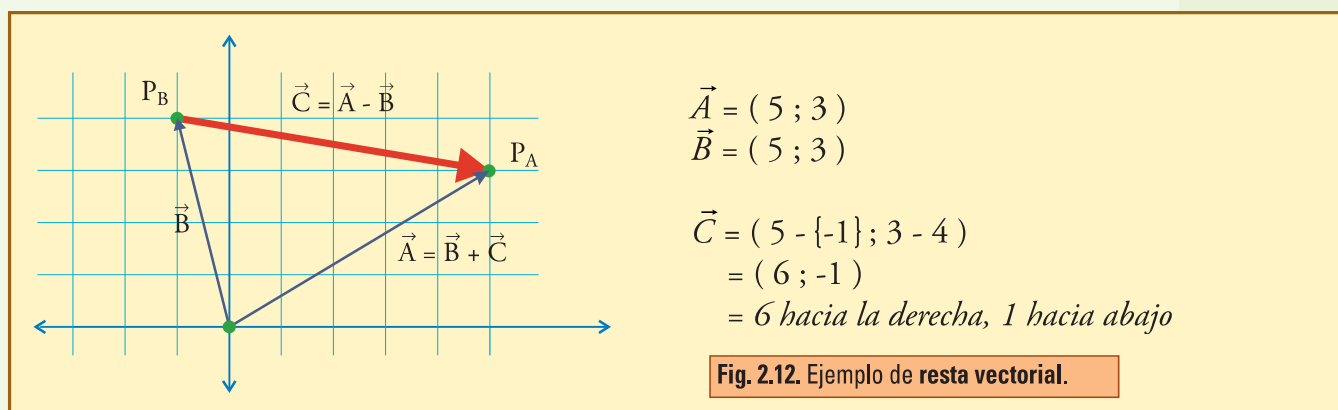


Fig. 2.12. Ejemplo de resta vectorial.

Y también significa, como se advierte fácilmente en esta figura 2.12, que la resta vectorial se efectúa componente a componente, de la misma manera que la suma.

Otra interpretación: diferencia de vectores como cambio de origen.

Consideremos nuevamente la misma resta vectorial de la figura 2.12, reproducida aquí como 2.13, cambiando un poco algunas letras:

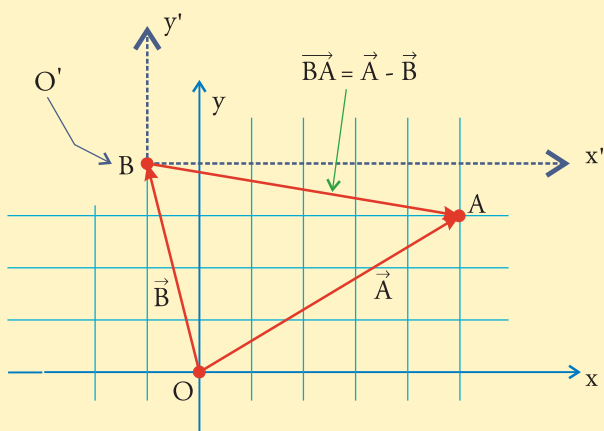


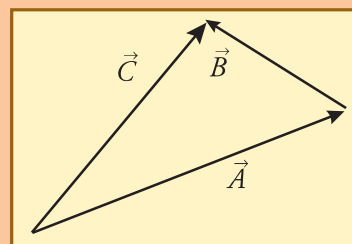
Fig. 2.13. En referencia a la figura 2.12, se ilustra cómo A, con respecto a un origen O' ubicado en B, está indicado por el vector $\vec{A} - \vec{B}$.

Vemos en esta figura que, si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ indican respectivamente las posiciones de los puntos A y B con respecto al origen O, entonces $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ es el vector $\vec{BA}$, que señala la ubicación del punto A respecto del B.

Es decir, cambiando un poco las denominaciones: si tenemos un punto A cuya posición en el sistema x, y está dada por el vector $\vec{A}$, y queremos escribir su posición con respecto al punto O' , cuya posición en el mismo sistema x, y está dada por el vector $\vec{OO'}$, entonces la operación que debemos hacer es la resta vectorial $\vec{A} - \vec{OO'}$ (donde $\vec{OO'}$ es el mismo vector $\vec{B}$ anterior).

• Ejemplo

- 1) ¿cómo podría leerse e interpretarse el siguiente diagrama vectorial?
- 2) ¿cómo se transforma la figura si le agregamos los vectores representativos del desplazamiento $\vec{B}$ seguido del $\vec{A}$?



• Desarrollo

- 1) podemos dar varias respuestas. Por ejemplo:

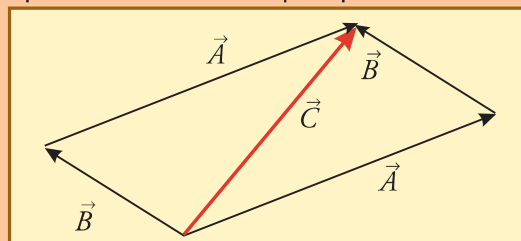
1.a) podemos decir que expresa la suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, porque $\vec{B}$ a continuación de $\vec{A}$, señala el mismo punto que señala $\vec{C}$.

Esta suma puede tener más de una interpretación. Por ejemplo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ fuesen desplazamientos sucesivos de un cuerpo, al sumarlos de esta manera habríamos encontrado el desplazamiento resultante $\vec{C}$. O bien si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ fuesen fuerzas aplicadas sobre un cuerpo, al sumarlas de esta manera habríamos encontrado la fuerza $\vec{C}$, que denominaríamos resultante (tema que trataremos detalladamente en el próximo capítulo).

1.b) también podemos decir que expresa la resta $\vec{B} - \vec{C} = \vec{A}$, porque B va desde el extremo de A hasta el extremo de C.

En este libro utilizaremos mucho la resta vectorial para indicar desplazamientos de cuerpos que se mueven: si A y C representasen posiciones sucesivas de un cuerpo, entonces $\vec{B}$ indicaría el desplazamiento correspondiente.

- 2) obtenemos la figura correspondiente al método del paralelogramo. En la diagonal correspondiente se halla el vector $\vec{C}$, resultado de la suma $\vec{A} + \vec{B}$:



• Proyección o descomposición de un vector

Teniendo definido el procedimiento para componer vectores, cabe preguntarse si dado

un vector es posible expresarlo como suma de vectores “componentes” actuantes en distintas direcciones dadas.

La idea básica es la siguiente:

Dadas dos direcciones no paralelas siempre es posible expresar de manera única un vector cualquiera del plano definido por ellas, como suma de componentes a lo largo de dichas direcciones. Para ello basta con trazar por la punta del vector, en una representación gráfica adecuada, rectas paralelas a las direcciones dadas. Entre estas rectas y las dadas se formará un paralelogramo cuyos lados representarán a los vectores componentes buscados.

Por supuesto que esto se generaliza inmediatamente a tres direcciones, en el espacio tridimensional, cuando el vector no está contenido en el plano definido por las dos direcciones dadas, aunque aquí no nos ocuparemos de esos casos.

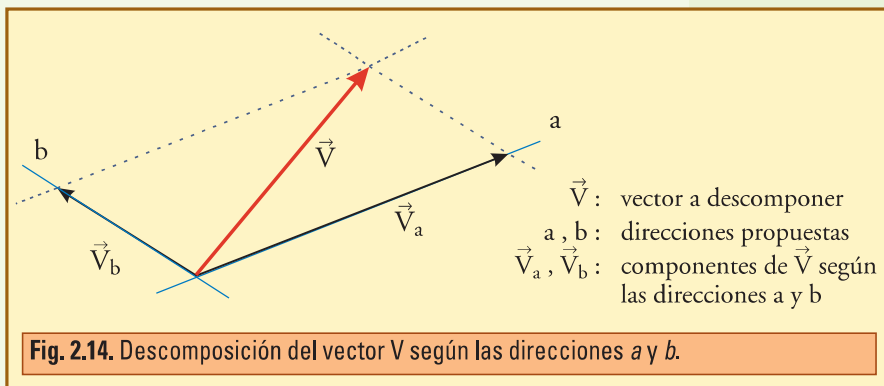
Los procedimientos geométricos o trigonométricos habituales, se podrán utilizar, *sobre la base del dibujo correspondiente*, para expresar estos lados en función de los datos.

Observando la figura 2.14 vemos que también cabe decir que cada componente se obtiene *proyectando* el vector, *sobre esa dirección, según la otra dirección*.

Proyección ortogonal y proyección oblicua

En el caso particular en que las rectas a y b son perpendiculares entre sí, tenemos la descomposición *ortogonal* del vector (ortogonal es sinónimo de perpendicular, en el lenguaje matemático). Con este tipo de proyección hemos presentado casi todo el tema vectores: las rectas han sido los ejes cartesianos x , y , y cada componente se ha obtenido proyectando ortogonalmente el vector sobre el eje correspondiente.

En esta figura 2.14 hemos ejemplificado una *proyección oblicua*.



• Ejemplo

Cuando un cuerpo se apoya en un plano inclinado, interesa descomponer la fuerza peso, que actúa verticalmente, en dos direcciones: una es la dirección del plano, denominada “tangencial”, y otra es la perpendicular al mismo, denominada “normal”. Éste es un ejemplo de descomposición ortogonal.

Atención a la denominación “NORMAL” que aparecerá muchas veces, y significa PERPENDICULAR. Es una denominación de origen matemático que utilizaremos a cada paso, y para evitar confusiones remarcamos desde ya, que siempre que hablemos de vectores o direcciones “normales”, debe leerse directamente como *perpendicular*, sin caer en la tentación de tratar de imaginar otro significado a este término.

El interés de este procedimiento, que tendremos que realizar muchas veces, es que como veremos oportunamente, el plano se encarga de equilibrar a la componente normal del peso, que denominaremos P_N , y sólo queda

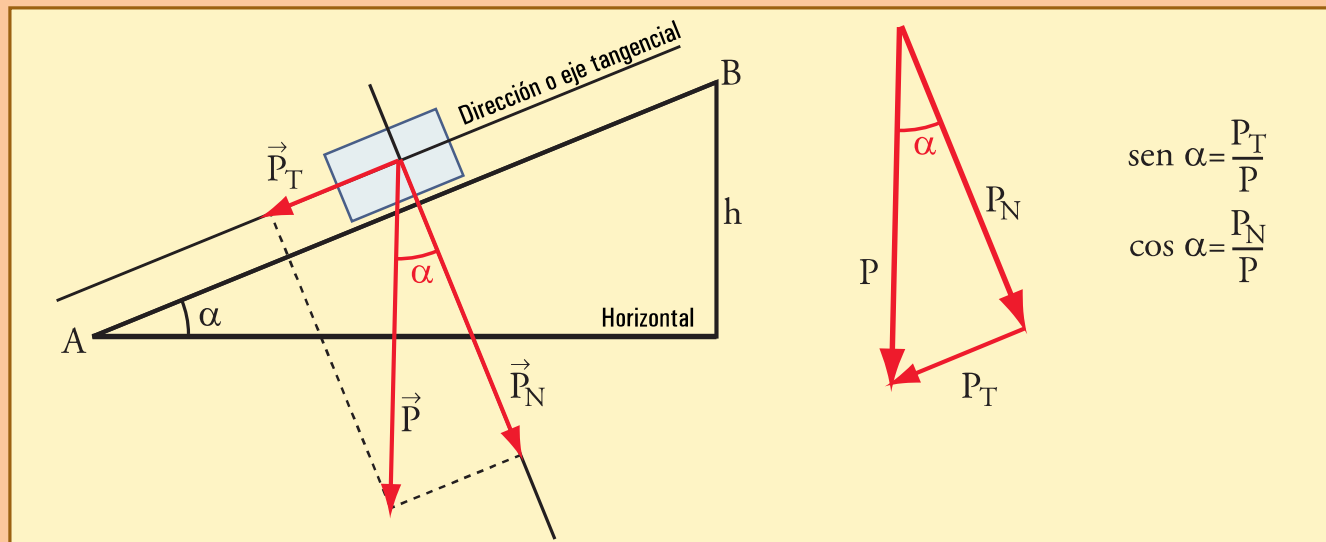
como esfuerzo para una máquina u operario, enfrentar (equilibrar, superar, o lo que sea) a la componente tangencial del peso, P_T .

Como ejercicio aquí consideremos un cuerpo cuyo peso es 800 N, que se desea arrastrar hacia arriba por un tablón de 3 m de largo, cuyo extremo derecho está levantado 60 cm (ya hemos mencionado que N es el símbolo para la unidad de fuerza que utilizaremos, y por ahora no interesa decir más – 800 N puede ser el peso de una heladera).

Se pide mostrar las componentes normal y tangencial del peso en un diagrama, y calcular los valores de cada una.

• Desarrollo

Dibujamos $\vec{P}$ verticalmente hacia abajo, y desde su extremo trazamos una línea paralela al plano hasta cortar al eje normal, y una perpendicular hasta cortar al eje tangencial.



A la derecha hemos separado el triángulo que sirve para establecer las relaciones. Este triángulo es rectángulo, P es la hipotenusa, P_T es el cateto opuesto al ángulo α , y P_N es el adyacente al mismo ángulo. Como puede verse, este ángulo formado entre la vertical y la normal al plano, es el mismo entre el plano y la horizontal, de manera que en nuestro ejemplo,

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{AB} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{0,60 \text{ m}}{3 \text{ m}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0,20$$

$$\alpha = \text{arcosen}(0,20) \Rightarrow \alpha \cong 11,54^\circ$$

Así es que tenemos las relaciones que aparecerán siempre en el plano inclinado:

$$\begin{aligned} P_T &= P \text{ sen } \alpha \\ P_N &= P \text{ cos } \alpha \end{aligned}$$

Y para nuestro caso: $P_T = 160 \text{ N}$, y $P_N \cong 784 \text{ N}$. Decimos que este peso proyecta sólo 160 N en la dirección del plano, y que esa fuerza es la que debe ejercer una máquina o persona para equilibrar esta situación, ya que el tablón soporta lo que proyecta el peso perpendicularmente a él (784 N).

● El vector velocidad

El primer elemento importante que podemos tratar aplicando directamente lo que hemos definido en estas páginas es el vector velocidad, que sirve para indicar cómo y con qué rapidez se mueve un cuerpo.

Velocidad en movimientos rectilíneos uniformes

La rapidez con la cual ocurre el desplazamiento de un punto respecto del sistema de referencia correspondiente, también llamada velocidad, puede definirse, al menos en los casos más simples, de movimiento rectilíneo y uniforme, como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado:

$$velocidad = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}} \quad (2.1)$$

Ahora bien, el movimiento ocurre con determinada orientación, y deseamos definir un **vector velocidad** que lo indique adecuadamente. Para ello recurriremos a las propiedades del vector desplazamiento.

El movimiento rectilíneo desde un punto a otro ocurre exactamente a lo largo del vector desplazamiento, de manera que este vector tiene la misma dirección y sentido que el movimiento, y un módulo igual a la distancia recorrida.

Con esta idea definimos el **vector velocidad** dividiendo el vector desplazamiento por el tiempo empleado:

$$\text{vector velocidad} = \frac{\text{vector desplazamiento}}{\text{tiempo empleado}} \quad (2.2)$$

Analicemos esta definición más en detalle. Si un móvil pasa en el instante t_A por el punto A, indicado por el vector posición $(x_A ; y_A)$, y en el instante t_B por el B, dado por $(x_B ; y_B)$, entonces (para más claridad ver la figura del ejemplo desarrollado a continuación):

$$\begin{aligned} \text{vector desplazamiento} &= (x_B - x_A ; y_B - y_A), \\ \text{tiempo empleado} &= t_B - t_A, \end{aligned}$$

vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{(x_B - x_A ; y_B - y_A)}{t_B - t_A} \quad (2.3)$$

En adelante, siguiendo una insoslayable tradición del lenguaje científico, utilizaremos la letra griega Δ (delta mayúscula) para indicar la diferencia entre dos valores elegidos que toma una variable. Haremos esto frecuentemente con todo tipo de variables que aparecerán a lo largo del libro, y aquí comenzamos con:

- $\Delta r = r_B - r_A$, $\Delta y = y_B - y_A$, son las componentes del vector desplazamiento $\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Cada componente indica un desplazamiento a lo largo de un eje.
- $\Delta t = t_B - t_A$, la diferencia entre dos valores de t , indica la duración del intervalo correspondiente. En general utilizaremos la letra t para indicar un instante, y Δt , para indicar la duración de un intervalo, o sea, un tiempo transcurrido.

Con esta notación, teniendo en cuenta que Δt es un escalar, y que dividir un vector por el escalar Δt , es lo mismo que multiplicarlo por $1/\Delta t$ (que es otro escalar), y que eso debe hacerse con cada componente, la definición de vector velocidad queda:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \quad (2.3')$$

Esto es lo mismo que decir que las componente del vector velocidad son:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

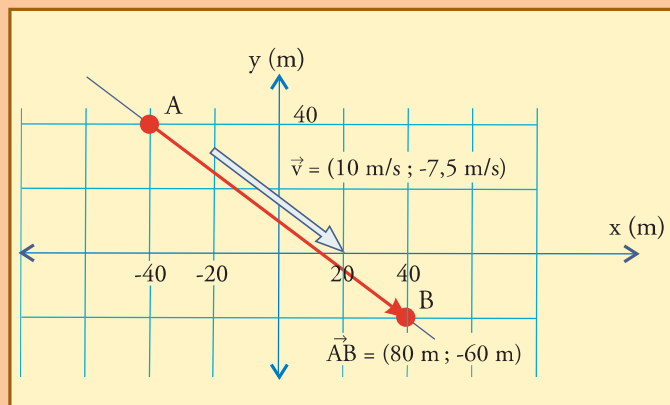
• Ejemplo

Consideremos un punto que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta, que en $t_A = 2s$ pasa por el punto A dado por $\vec{r}_A = (-40 \text{ m}; 40 \text{ m})$, y en $t_B = 10 \text{ s}$ pasa por el punto B, señalado por $\vec{r}_B = (40 \text{ m}; 20 \text{ m})$.

- Indique en un dibujo a escala el vector desplazamiento desde A hasta B. Indíquelo como par ordenado. Calcule la distancia recorrida en el tiempo indicado. Calcule cuánto recorrió en cada segundo, y compare con la definición de velocidad (2.1).
- Encuentre las componentes del vector velocidad dado por la definición (2.2). Dibuje este vector con alguna escala que usted determine, y muestre que tiene:
 - módulo igual a la distancia recorrida dividido el tiempo empleado, es decir igual a la velocidad del movimiento.
 - dirección y sentido iguales a los del desplazamiento sufrido por el punto.

• Desarrollo

El vector desplazamiento se obtiene restando el vector posición inicial menos el final (componente a componente), y está mostrado con sus componentes en la figura. La distancia recorrida es el módulo del desplazamiento $\vec{AB}$, es decir $\sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ m}$.



El tiempo demorado es $t_B - t_A = 10 \text{ s} - 2 \text{ s} \Rightarrow t_B - t_A = 8 \text{ s}$, de manera que en cada segundo se recorre $100/8 = 12,5 \text{ m}$. Esto coincide con lo que se obtiene aplicando la definición de velocidad (2.1):

$$v = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

$$v = \frac{100 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

$$v = 12,5 \text{ m/s}$$

El vector velocidad dado por la definición (2.2) es:

$$\vec{v} = \frac{(80\text{m} - 60\text{m})}{8\text{s}} = \left(\frac{80\text{m}}{8\text{s}}; \frac{-60\text{m}}{8\text{s}} \right) = (10\text{m/s}; -7,5\text{m/s})$$

El módulo de este vector es $\sqrt{10^2 + 7,5^2} = 12,5\text{m/s}$, en coincidencia con los resultados anteriores (distancia recorrida dividida por el tiempo empleado), y en la figura está representado con un vector hueco con la escala 1 cm : 5 m/s, el cual tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento $\vec{AB}$ sufrido por el punto. Además puede inferirse que eso no es accidental, sino que es consecuencia directa de que dividimos cada componente de $\vec{AB}$ por un mismo escalar positivo (8 s).

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

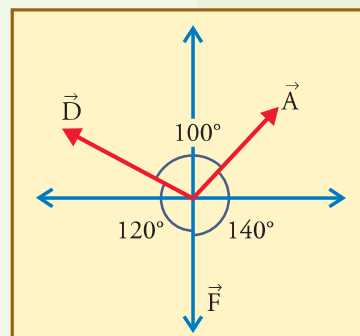
▲ Ejercicio 2.1.

Dibujar los siguientes vectores, y calcular las componentes, módulos, y ángulos con los ejes x e y, tomando cada uno dentro del cuadrante correspondiente.

- a) $\vec{A} = (-20; 5)$ b) $\vec{B} = -5 (5; -10)$ c) $\vec{C} = 1/5 (30; -60)$

▲ Ejercicio 2.2.

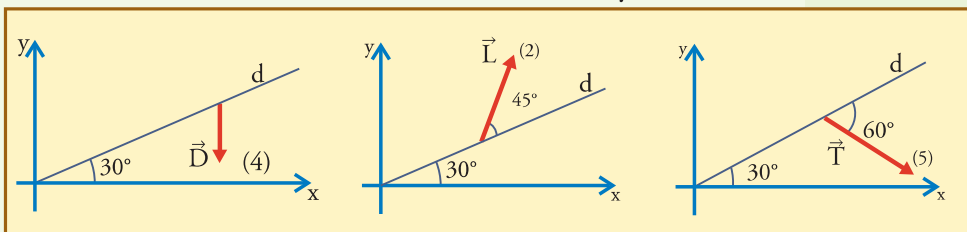
Calcular las componentes horizontales y verticales de los vectores $\vec{A}$, $\vec{D}$, y $\vec{F}$, que se muestran, cuyos módulos son $A = 30$, $D = 35$ y $F = 24$. Calcular la suma $(\vec{A} + \vec{D} + \vec{F})$, y graficarla cualitativamente.



▲ Ejercicio 2.3.

Dados los vectores $\vec{D}$, $\vec{L}$, y $\vec{T}$, mostrados, de módulos: $D = 4$, $L = 2$, $T = 5$.

- a) Calcular las componentes horizontal y vertical de cada vector. Dibujarlas cualitativamente.
b) Calcular las componentes de estos vectores en la dirección inclinada d, y en una dirección normal a esa dirección. Dibujarlas cualitativamente.



▲ Ejercicio 2.4.

Tomando como origen un punto O en una región, el eje x positivo hacia el este, y el eje y positivo hacia el norte, considere un expedicionario que viaja en línea recta desde O hasta el punto A dado por las coordenadas (20 km ; 10 km). A partir de allí el viajero se desvía, desplazándose 40 km hacia el norte, hasta el punto B. Allí nuevamente se desvía, girando la dirección de marcha 120° hacia la izquierda, recorriendo 60 km en esta nueva dirección,

hasta el punto C.

- Dibuje los vectores desplazamiento $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, y $\vec{D}_3$, correspondientes a los tres tramos rectilíneos descritos, calculando e indicando las componentes y módulos de cada uno.
- Dibuje a escala los vectores posición $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, de los puntos correspondientes, y expréselos por sus componentes. Calcule también el módulo de cada uno.
- Realice gráficamente las siguientes operaciones vectoriales, explique el significado de cada una, y encuentre relaciones entre ellas: $\vec{B} - \vec{A}$; $\vec{C} - \vec{A}$; $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$; $\vec{D}_2 + \vec{D}_3$; $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$.
- Explique el significado de cada una de las siguientes operaciones, y encuentre su resultado: $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$; $|\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3|$; $|\vec{D}_1| + |\vec{D}_2| + |\vec{D}_3|$.
- Teniendo a la vista los gráficos efectuados, responda a las siguientes cuestiones.
 - Las denominaciones correctas para la operación $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$, podrían ser (puede haber más de una opción correcta):

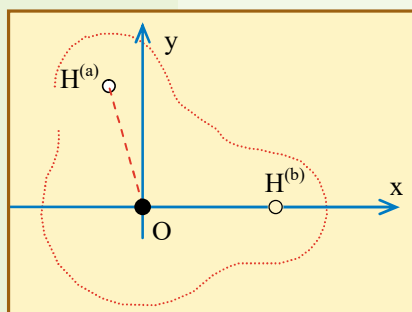
1. Suma de vectores	5. Composición de vectores
2. Suma de fuerzas	6. Suma vectorial de desplazamientos.
3. Suma vectorial de fuerzas	7. Suma de distancias
4. Composición de desplazamientos.	
 - El resultado de esta operación ($\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$), es (puede haber más de una opción correcta):

Un vector	Una fuerza
Una distancia	Un desplazamiento
 - El resultado de esta operación ($\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$), indica (puede haber más de una opción correcta):

1. La posición de C con respecto a O.	5. La distancia recorrida
2. El movimiento seguido	6. La trayectoria seguida
3. La fuerza total	7. La distancia desde C hasta P
4. La fuerza resultante	

▲ Ejercicio 2.5.

En la figura se muestra un esquema de la molécula de agua, ubicada en un sistema de ejes x,y. Cada punto indica la posición del núcleo del átomo correspondiente: negro el núcleo del oxígeno, y blanco el de cada hidrógeno (protón). Los protones se han distinguido con un índice para poder plantear con claridad algunas preguntas.



a) A partir de los datos:

ángulo HOH $\cong 104,5^\circ$; dist. H — O $\cong 0,957 \times 10^{-10}$ m, encuentre para cada caso y exprese como par ordenado los vectores:

- $\vec{r}_a$: posición del protón $H^{(a)}$
- $\vec{r}_b$: posición del protón $H^{(b)}$
- $\vec{r}_a - \vec{r}_b$: interprete su significado
- $\vec{r}_b - \vec{r}_a$: interprete su significado

- b) Encuentre el módulo de los vectores mencionados en a). Diga cuál o cuáles de los módulos calculados representan la distancia entre los protones.
- c) Diga cuáles de los vectores que ha escrito representan la posición de $H^{(a)}$ con respecto a $H^{(b)}$, y cuáles representan dicha posición con respecto a O.
- d) Muestre gráfica y analíticamente cómo se efectúa la siguiente operación vectorial:
 $\vec{r}_a +$ vector posición de $H^{(b)}$ con respecto a $H^{(a)} = \vec{r}_b$

▲ Ejercicio 2.6.

Consideremos una red cristalina. Supongamos que A y B representan el núcleo o centro de dos átomos cualquiera.

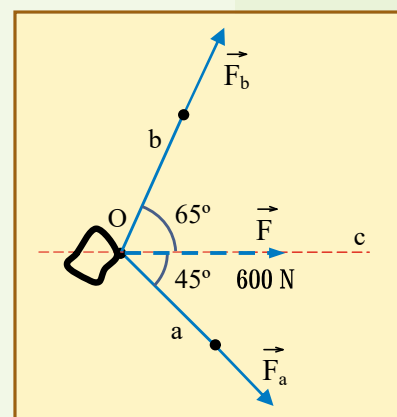
Supongamos que $r_A = (2 ; 3) \times 10^{-10} \text{ m}$, y $r_B = (-2 ; 1) \times 10^{-10} \text{ m}$.

- a) Calcule las distancias de A y B al origen, y sus respectivas orientaciones con respecto a la dirección señalada por el eje x^+ .
- b) Calcule $r_B - r_A = \vec{AB}$, muéstrelo en un dibujo, y a partir de ese vector indique la distancia y la orientación con la que habría que desplazar el átomo A para que ocupe el lugar del B.
- c) Muestre todos los vectores en un dibujo. Si los átomos A y B fuesen iguales y estuviesen en contacto, calcule el valor de sus diámetros.
- d) Explique sobre el dibujo cómo se muestra que $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, y también cómo se muestra que $\vec{AB}$ es la posición de B con respecto a A.

▲ Ejercicio 2.7.

Dos operarios tratan de arrastrar horizontalmente un cuerpo muy pesado tirando con dos cuerdas amarradas al cuerpo en O. El cuerpo debe ser arrastrado en la dirección de la recta c, y por efecto de ciertos obstáculos que hay en el lugar las cuerdas deben ubicarse en las direcciones a, y b, mostradas, que forman 45° y 65° con la dirección c (todas en un plano horizontal). Dado que se sabe que para que el cuerpo comience a deslizarse la fuerza neta horizontal aplicada debe superar los 600 N, los operarios tratan de averiguar previamente cuánta fuerza deberá aplicar cada uno, para decidir si será posible arrastrar dicho cuerpo.

Realice un diagrama vectorial a escala que muestre la descomposición, según las direcciones de las dos cuerdas, de la fuerza $\vec{F}$, de 600 N, que se espera obtener como resultante, y obtenga de este diagrama los valores de



las fuerzas que tiran de cada cuerda.

▲ **Ejercicio 2.8.**

Explique cuál es el error de la siguiente frase:

“Todo vector es una fuerza y toda fuerza es un vector”.

▲ **Ejercicio 2.9.**

Consideremos un punto que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta, que en $t_1 = 0\text{s}$ pasa por el punto A dado por $\vec{r}_A = (0\text{ m} ; 20\text{ m})$, y en $t_B = 4\text{s}$ pasa por el punto B, señalado por $\vec{r}_B = (80\text{ m} ; 80\text{ m})$.

a) Indique en el dibujo el vector desplazamiento desde A hasta B. Indíquelo como par ordenado. Calcule su módulo, y utilícelo para expresar la distancia recorrida

en los 4 segundos indicados. Calcule cuánto recorrió en cada segundo, y compare con la definición de velocidad (2.1).

b) Encuentre el vector velocidad dado por la definición (2.3'). Dibuje este vector con alguna escala que usted determine, y muestre que tiene igual dirección y sentido que el vector desplazamiento.

c) Calcule el módulo de este vector y compare con lo calculado en a).

