APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Capítulo 5

La fuerza de rozamiento estática ejercida por el asfalto sobre los neumáticos del coche evita que éste patine al tomar la curva.

¿Qué factores determinan la velocidad con la que un coche puede girar por una curva sin patinar? (Véase el ejemplo 5.10.)

En el capítulo 4 se han introducido las leyes de Newton y se las ha aplicado a situaciones donde la acción se restringía a movimientos rectilíneos y donde no se consideraba el rozamiento.

En este capítulo extenderemos las leyes de Newton al estudio del movimiento en trayectorias curvas e incluiremos los efectos cuantitativos del rozamiento.

5.1 Rozamiento

Ni caminar ni moverse en automóvil sería posible sin el rozamiento. Para echar a andar por una superficie horizontal hace falta el rozamiento y, una vez en marcha, para cambiar la dirección o la velocidad del movimiento también hace falta rozamiento. Se necesita rozamiento para mantener una tuerca en un tornillo o un clavo en la madera. Sin embargo, aunque el rozamiento sea muy importante, muchas veces se intenta evitarlo. Los lubricantes, como el aceite en un motor de coche o el líquido sinovial en nuestro cuerpo, son materiales que reducen el rozamiento.

Rozamiento estático

Cuando aplicamos una pequeña fuerza horizontal a un gran bloque que descansa sobre el suelo, el bloque no se mueve debido a la fuerza de **rozamiento estático** $\mathbf{f}_e$ ejercida por el

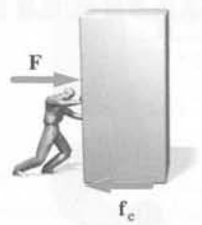


Figura 5.1

suelo sobre el bloque, que equilibra la fuerza que estamos aplicando (figura 5.1). La fuerza de rozamiento estático, que se opone a la fuerza aplicada sobre el bloque, puede variar desde cero hasta cierto valor máximo $f_{e,\,máx}$, dependiendo de la fuerza ejercida. Los experimentos muestran que $f_{e,\,máx}$ es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra:

$$f_{e,\,\text{máx}} = \mu_e F_n \tag{5.1}$$

DEFINICIÓN —COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO

en donde la constante de proporcionalidad μ_e, llamado **coeficiente de rozamiento estático**, depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Si ejercemos una fuerza horizontal menor que $f_{e,\,máx}$ sobre el bloque, la fuerza de rozamiento equilibrará esta fuerza horizontal. En general, podemos escribir

$$f_e \leq \mu_e F_n \tag{5.2}$$

Rozamiento cinético

Si se empuja el bloque de la figura 5.1 con fuerza suficiente, éste se deslizará sobre el suelo. Al deslizar, el suelo ejerce una fuerza de **rozamiento cinético, $\mathbf{f}_c$** (también llamada de rozamiento por deslizamiento) que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque deslice con velocidad constante debe ejercerse una fuerza sobre el bloque igual en módulo y de sentido opuesto a la fuerza de rozamiento cinético ejercida por el suelo.

El **coeficiente de rozamiento cinético** μ_c se define como el cociente entre los módulos de la fuerza de rozamiento cinético f_c y la fuerza normal, F_n:

$$f_c = \mu_c F_n \tag{5.3}$$

DEFINICIÓN —COEFICIENTE DE ROZAMIENTO CINÉTICO

en donde μ_c depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Experimentalmente resulta que μ_c es menor que μ_e, y es aproximadamente constante para velocidades comprendidas en el intervalo de 1 cm/s a varios metros por segundo, las únicas situaciones que consideraremos.

El rozamiento por rodadura

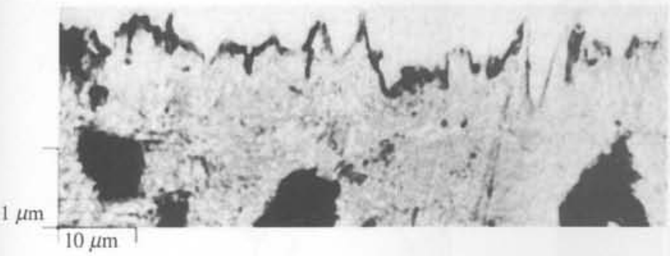
Cuando una rueda ideal rígida rueda sin deslizar *a velocidad constante* por una carretera ideal, rígida y horizontal, no hay ninguna fuerza de rozamiento que frene su movimiento. Sin embargo, los neumáticos reales y las carreteras se deforman continuamente, y la banda de rodadura del neumático y la carretera se gastan, lo cual significa que la carretera ejerce un **rozamiento de rodadura $\mathbf{f}_r$** que se opone al movimiento. Para mantener la rueda rodando con velocidad constante, hay que ejercer una fuerza sobre la rueda que iguale en magnitud y que se oponga en dirección a la fuerza de rozamiento de rodadura ejercida por el asfalto.

El **coeficiente de rozamiento de rodadura** μ_r es el coeficiente de proporcionalidad entre el módulo de la fuerza de rozamiento de rodadura f_r y el módulo de la fuerza normal F_n.

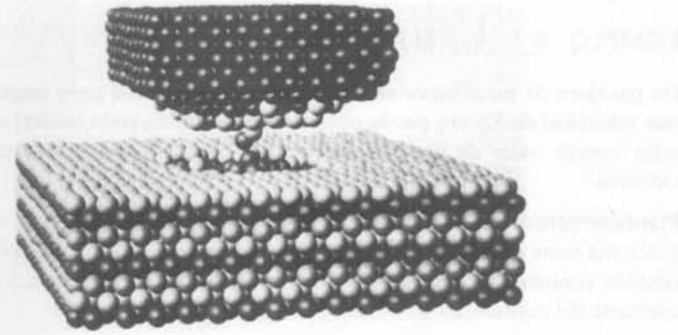
$$f_r = \mu_r F_n \tag{5.4}$$

DEFINICIÓN—COEFICIENTE DE ROZAMIENTO DE RODADURA

donde μ_r depende de la naturaleza de las superficies de contacto y de la composición de la rueda y de la carretera. Los valores típicos de μ_r están entre 0,01 y 0,02 para los neumáticos de caucho en hormigón, y entre 0,001 y 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero.



Sección aumentada de una superficie de acero pulida que muestra las irregularidades superficiales. La altura media de estas irregularidades es del orden de 5×10^{-5} cm, correspondiente a varios miles de diámetros atómicos.



Dibujo de ordenador que muestra cómo unos cuantos átomos de oro (abajo) se adhieren a la punta fina (arriba) de una sonda de níquel que ha estado en contacto con la superficie de oro.

¿Cuál es la causa del rozamiento?

El rozamiento es un fenómeno complejo, insuficientemente conocido, que surge como consecuencia de la fuerza de atracción entre las moléculas que forman dos superficies en contacto. La naturaleza de esta atracción es electromagnética —la misma naturaleza de enlace molecular que mantiene la materia unida. Esta fuerza de atracción es de corto alcance y resulta prácticamente inapreciable a distancias de pocos diámetros atómicos.

Como se muestra en la figura 5.2, los objetos ordinarios, aunque tengan superficies muy pulidas, de aspecto liso y suave, a escala atómica son ásperos y rugosos. Cuando entran en contacto dos superficies sólo se tocan por aquellos puntos más prominentes, denominados asperezas, que se muestran en la figura 5.2. La fuerza normal ejercida por la superficie se produce precisamente en estas asperezas, donde la fuerza por unidad de área es muy grande, suficiente para allanar las protuberancias. A medida que la fuerza normal aumenta, también lo hace este aplanado, lo cual conduce a que el área de contacto microscópica aumente. En condiciones muy diversas, el área de contacto microscópica es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de rozamiento es proporcional al área microscópica de contacto, por lo que también es proporcional a la fuerza normal.

La figura 5.3 muestra un gráfico de la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque por el suelo en función de la fuerza aplicada. La fuerza de rozamiento va compensando la fuerza aplicada hasta que ésta alcanza el valor $\mu_e F_n$, que es cuando la caja empieza a moverse. A partir de entonces la fuerza de rozamiento es $\mu_c F_n$. La tabla 5.1 da una relación de algunos valores aproximados de μ_e y de μ_c para varias superficies.

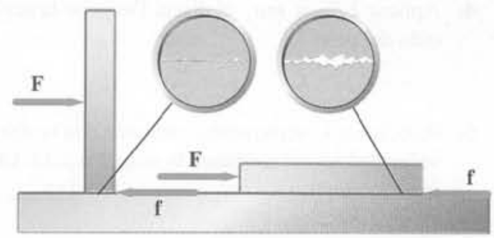


Figura 5.2 El área microscópica de contacto entre el bloque y el suelo es sólo una pequeña fracción del área macroscópica del bloque. Esta fracción es proporcional a la fuerza normal ejercida entre las superficies. Si el bloque descansa sobre una base mayor, el área macroscópica de contacto se incrementa, pero la fuerza por unidad de área disminuye en el mismo factor, de tal modo que el área microscópica de contacto no se modifica. Tanto si el bloque descansa sobre una base o sobre otra, hay que aplicar la misma fuerza horizontal F para mantenerlo en movimiento a velocidad constante.

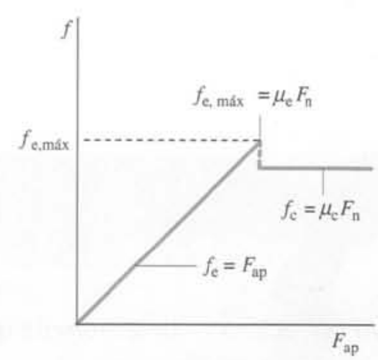


Figura 5.3

TABLA 5.1 Valores aproximados de los coeficientes de rozamiento

Materiales	μ_e	μ_c
Acero sobre acero	0,7	0,6
Latón sobre acero	0,5	0,4
Cobre sobre hierro fundido	1,1	0,3
Vidrio sobre vidrio	0,9	0,4
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Caucho sobre hormigón (seco)	1,0	0,80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0,30	0,25
Esquí encerado sobre nieve (0 °C)	0,10	0,05

EJEMPLO 5.1 | El juego del Shuffleboard

Un pasajero de un crucero usa un taco de shuffleboard para impulsar un disco de 0,40 kg a una velocidad de 5,5 m/s por la pista de juego situada en la cubierta del barco. El disco recorre ocho metros antes de pararse. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el disco y la cubierta.

Planteamiento del problema La fuerza de rozamiento cinético es la única fuerza horizontal que actúa sobre el disco (figura 5.4). Como la fuerza de rozamiento es constante, la aceleración es también constante. Podemos determinar la aceleración a partir de las ecuaciones de aceleración constante del capítulo 2 y relacionarla con μ_c usando $\sum F_x = ma_x$.

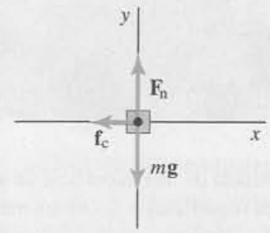


Figura 5.4

1. En la figura 5.4 se muestra el diagrama de fuerzas para el disco cuando ya lo ha soltado el taco. Las flechas en los ejes indican las direcciones positivas de los ejes *x* e *y*.
2. El coeficiente de rozamiento está relacionado con la fuerza de rozamiento y la normal: $f_c = \mu_c F_n$
3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al disco. Despejar la fuerza normal. Usando el resultado del paso 2, obtener la fuerza de rozamiento: $\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$
   por lo tanto
   $F_n = mg \quad \text{y} \quad f_c = \mu_c mg$
4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al disco. Despejar la aceleración usando el resultado del paso 3: $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_c = ma_x$
   por lo tanto
   $-\mu_c mg = ma_x \quad \text{y} \quad a_x = -\mu_c g$
5. Relacionar la aceleración constante con la distancia total recorrida y la velocidad inicial mediante la ecuación 2.15. Utilizando el resultado del paso 4, calcular μ_c: $v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2\mu_c g\,\Delta x$
   esto es
   $$\mu_c = \frac{v_0^2}{2g\,\Delta x} = \frac{(5{,}5\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(8\ \text{m})} = \boxed{0{,}193}$$

Observación La masa *m* del disco se cancela. Cuanto mayor es la masa, más esfuerzo cuesta detenerla, pero una masa mayor también va acompañada de mayor rozamiento. El resultado neto es que la masa no tiene efecto alguno en este proceso.

El ejemplo 5.1 ilustra la metodología que conviene aplicar para resolver problemas que incluyen rozamiento. Es la siguiente:

1. Se escoge el eje *y* en la dirección normal a las superficies de contacto. Se elige el eje *x* paralelo a la superficie y paralelo o antiparalelo a la fuerza de rozamiento.
2. Se aplica $\Sigma F_y = ma_y$ y se obtiene la fuerza normal F_n.
   - Si el rozamiento es *cinético*, la fuerza de rozamiento se obtiene usando $f_c = \mu_c F_n$
   - Si el rozamiento es *estático*, se relaciona la fuerza de rozamiento máxima con la fuerza normal usando $f_{e,\text{máx}} = \mu_e F_n$.
   - Si el rozamiento es de *rodadura*, la fuerza de rozamiento se obtiene usando $f_r = \mu_r F_n$.
3. Se aplica $\Sigma F_x = ma_x$ al objeto y se obtiene la variable deseada.

EJEMPLO 5.2 | Una moneda que resbala

Sobre la cubierta superior de un libro de tapas duras que está sobre una mesa hay una moneda (véase la figura 5.5). Poco a poco se levanta la tapa del libro hasta que la moneda empieza a deslizar. El ángulo $\theta_{\text{máx}}$ es el ángulo que forma la tapa con la horizontal en el momento en que la moneda empieza a moverse. Calcular el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre la tapa del libro y la moneda en función de $\theta_{\text{máx}}$.

Planteamiento del problema Las fuerzas que actúan sobre la moneda son su peso mg, la fuerza normal F_n ejercida por el plano y la fuerza de rozamiento f. Seguimos la metodología mencionada antes para resolver problemas con rozamiento estático.

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la moneda cuando la tapa del libro está inclinada un ángulo θ, donde $\theta \leq \theta_{\text{máx}}$ (figura 5.6):

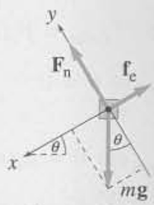


Figura 5.6

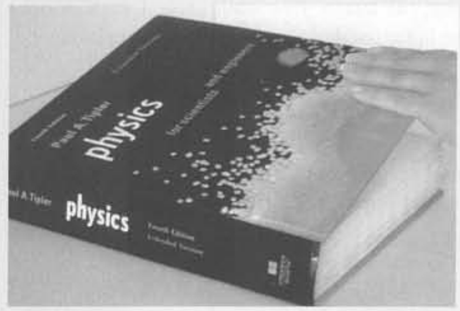


Figura 5.5

2. Aplicando $\Sigma F_y = ma_y$ a la moneda se obtiene la fuerza normal. Entonces se determina la fuerza de rozamiento estático máxima:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg\cos\theta = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg\cos\theta$$

$$f_{e,\text{máx}} = \mu_e F_n \quad \text{por lo tanto} \quad f_{e,\text{máx}} = \mu_e mg\cos\theta_{\text{máx}}$$

3. Aplicando $\Sigma F_x = ma_x$ a la moneda se obtiene la fuerza de rozamiento. Se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{e,\text{máx}} + mg\,\text{sen}\,\theta_{\text{máx}} = 0$$

por lo tanto

$$f_{e,\text{máx}} = mg\,\text{sen}\,\theta_{\text{máx}} \quad \text{y} \quad mg\,\text{sen}\,\theta_{\text{máx}} = \mu_e mg\cos\theta_{\text{máx}}$$

4. Calcular el resultado del paso 3 para μ_e:

$$\mu_e = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta_{\text{máx}}}{mg\cos\theta_{\text{máx}}} = \boxed{\text{tg}\,\theta_{\text{máx}}}$$

Ejercicio El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera en un día determinado es 0,7. ¿Cuál es el ángulo máximo de inclinación de la carretera para que el coche pueda estar parado con sus ruedas bloqueadas y no deslizar hacia abajo? (*Respuesta* 35°)

El ejemplo 5.2 demuestra que el coeficiente de rozamiento estático está relacionado con el ángulo crítico $\theta_{\text{máx}}$, para el cual el objeto comienza a deslizar, por la expresión

$$\mu_e = \text{tg}\,\theta_{\text{máx}} \tag{5.5}$$

ÁNGULO CRÍTICO

donde $\theta_{\text{máx}} = \theta_c$ se denomina ángulo crítico.

EJEMPLO 5.3 | Tirando de un trineo

Dos niños son arrastrados en un trineo sobre un terreno cubierto de nieve. Se tira del trineo con una cuerda que forma un ángulo de 40° con la horizontal, como se indica en la figura 5.7. La masa conjunta de los dos niños es de 45 kg y el trineo tiene una masa de 5 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}2$ y $\mu_c = 0{,}15$. Determinar la fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el trineo y la aceleración de los niños y el trineo si la tensión de la cuerda es (*a*) 100 N y (*b*) 140 N.

Planteamiento del problema Determinar en primer lugar si la fuerza de rozamiento es estática o cinética. Para ello calcular la tensión máxima de la cuerda sin que el trineo se mueva.

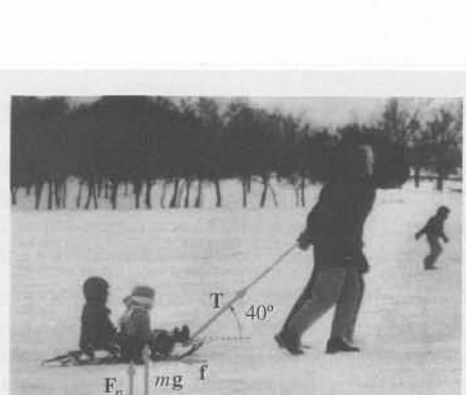


Figura 5.7

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el trineo (figura 5.8):

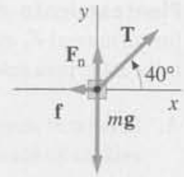


Figura 5.8

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se obtiene la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático máxima:

$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n + T \text{ sen } \theta - mg = 0$

por lo tanto

$F_n = mg - T \text{ sen } \theta$

$f_{e,máx} = \mu_e F_n$ de modo que $f_{e,máx} = \mu_e(mg - T_{máx} \text{ sen } \theta)$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo y se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{e,máx} + T_{máx} \cos \theta = 0$

por lo tanto

$f_{e,máx} = T_{máx} \cos \theta$ y $T_{máx} \cos \theta = \mu_e(mg - T_{máx} \text{ sen } \theta)$

$T_{máx} \cos \theta = \mu_e(mg - T_{máx} \text{ sen } \theta)$

4. Mediante el resultado del paso 3 obtener el valor de la tensión máxima en el caso en que no haya deslizamiento:

$T_{máx}(\mu_e \text{ sen } \theta + \cos \theta) = \mu_e mg$

por lo tanto

$$T_{máx} = \frac{\mu_e mg}{\mu_e \text{ sen } \theta + \cos \theta}$$

$$= \frac{0{,}2(50 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)}{0{,}2 \text{ sen } 40° + \cos 40°} = 110 \text{ N}$$

5. La tensión es de 100 N, que es menor que 110 N. El trineo no desliza. Para encontrar la fuerza de rozamiento, se usa la expresión obtenida en el paso 3 para f_e:

$a_x = \boxed{0}$

$f_e = T \cos \theta = (100 \text{ N})\cos 40° = \boxed{76{,}6 \text{ N}}$

(b) 1. La tensión es de 140 N y supera $T_{máx} = 110$ N, por lo que el trineo se desliza. La relación entre la fuerza de rozamiento cinética y la fuerza normal es:

$f_c = \mu_c F_n$

2. En el paso (a) 2 se aplicó $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se encontró $F_n = mg - T \text{ sen } \theta$. Usar este resultado junto con el paso (b)1 para obtener la fuerza de rozamiento cinética:

$f_c = \mu_c(mg - T \text{ sen } \theta)$

$= 0{,}15[(50 \text{ kg})(9{,}81 \text{ N/kg}) - (140 \text{ N}) \text{ sen } 40°]$

$= \boxed{60{,}1 \text{ N}}$

3. Aplicando $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2 para f_c y se obtiene la aceleración:

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_c + T \cos \theta = ma_x$

por lo tanto

$$a_x = \frac{f_c + T \cos \theta}{m}$$

$$= \frac{(-60{,}1 \text{ N}) + (140 \text{ N})\cos 40°}{50 \text{ kg}}$$

$$= \boxed{0{,}943 \text{ m/s}^2}$$

Observación Hay que resaltar dos puntos importantes en este ejemplo: (1) La fuerza normal no es igual a la suma del peso de los niños más el trineo, pues la componente vertical de la tensión tiende a levantar el trineo del suelo. (2) En el apartado (*a*), la fuerza de rozamiento estático es menor que $\mu_e F_n$.

EJEMPLO 5.4 | El bloque que resbala

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La masa m_2 de la figura 5.9 se ha ajustado de modo que el bloque de masa m_1 está en el umbral de deslizamiento. (*a*) Si $m_1 = 7$ kg y $m_2 = 5$ kg, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el soporte? (*b*) Con un ligero toque, los bloques se mueven con aceleración a. Determinar a si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el soporte es $\mu_c = 0{,}54$.

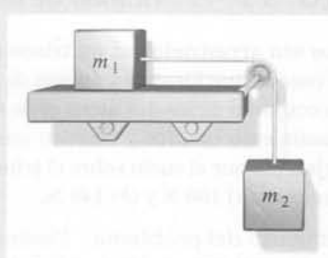
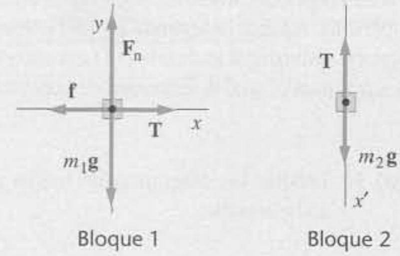


Figura 5.9

Planteamiento del problema Aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de los bloques, teniendo en cuenta que T tiene el mismo valor a lo largo de toda la cuerda, de modo que $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen igual magnitud, pues la cuerda no se alarga, de modo que $a_1 = a_2 = a$.

Para determinar el coeficiente de rozamiento estático, μ_e, requerido en el apartado (a), expresar que la fuerza de rozamiento estático sobre m_1 es igual a su valor máximo $f_{máx} = \mu_e F_n$ y que la aceleración es igual a cero.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque aislado (véase la figura 5.10). Se eligen las direcciones de los ejes x y x' de modo que coincidan con las direcciones de las aceleraciones una vez que los bloques se mueven.	 Figura 5.10
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al bloque 1 y obtener la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático:	$\Sigma F_y = m_1 a_{1y} \Rightarrow F_n - m_1 g = 0$ por lo tanto $F_n = m_1 g$; $f_{e,máx} = \mu_e F_n$ por lo tanto $f_{e,máx} = \mu_e m_1 g$
3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1 y obtener la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:	$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_{e,máx} = 0$ por lo tanto $f_{e,máx} = T$ y $T = \mu_e m_1 g$
4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 2 y obtener la tensión. Entonces se sustituye en el resultado del paso 3:	$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = 0$ por lo tanto $T = m_2 g$ y $m_2 g = \mu_e m_1 g$
5. Se resuelve el resultado del paso 4 para μ_e	$\mu_e = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5\text{ kg}}{7\text{ kg}} = \boxed{0{,}714}$
(b) 1. Cuando resbala, la fuerza de rozamiento es la cinética. Relacionar la fuerza de rozamiento cinética f_c con la fuerza normal. La fuerza normal se ha obtenido del paso 2 del apartado (a).	$f_c = \mu_c F_n$ por lo tanto $f_c = \mu_c m_1 g$
2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1. Obtener la fuerza de rozamiento usando el resultado del paso (b)1.	$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_c = m_1 a$ por lo tanto $T - \mu_c m_1 g = m_1 a$
3. Aplicar $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$ al bloque 2:	$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = m_2 a$
4. Sumar las ecuaciones obtenidas en los pasos (b) 2 y (b) 3 y obtener a.	$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g = \boxed{0{,}997\text{ m/s}^2}$

Comprobar el resultado Observar que $\mu_c = 0$ da el resultado de la aceleración deducido en el ejemplo 4.12 con $\theta = 0$.

Ejercicio ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando los bloques están deslizando? (*Respuesta* $T = m_2(g - a) = 44{,}1$ N.)

EJEMPLO 5.5 | El cochecillo incontrolado

Un cochecillo de niños incontrolado se desliza sin rozamiento por una charca helada hacia un agujero en el hielo (figura 5.11). Una persona sobre patines intenta alcanzar el cochecillo. Cuando lo consigue, esta persona y el cochecillo siguen deslizándose hacia el agujero con velocidad v_0. El coeficiente de rozamiento entre los patines (en la posición de frenado) y el suelo es μ_c. La distancia al agujero en el momento de agarrar al cochecillo es D, la masa de la persona es m y la del cochecillo M. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo de D para evitar la caída en el agujero? (*b*) ¿Qué fuerza debe ejercer la persona sobre el cochecillo?

Planteamiento del problema Inicialmente la persona y el cochecillo se mueven hacia el agujero con velocidad v_0 en la dirección x que tomamos como positiva. Si la persona hace una fuerza $\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$ sobre el cochecillo, según la tercera ley de Newton el cochecillo hará una fuerza $\mathbf{F}' = F\mathbf{i}$ sobre la persona. Aplicar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. Después de hallar la aceleración, determinar la distancia D que recorre el cochecillo hasta que se detiene. El valor mínimo de D es aquél para el cual la velocidad de la persona se hace cero justo al llegar al agujero.

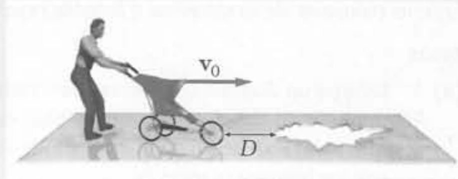


Figura 5.11

(a) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para la persona y el cochecillo aisladamente:

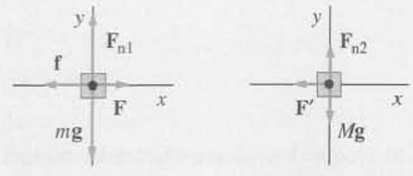


Figura 5.12

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la persona y obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:

$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$

y

$f_c = \mu_c F_n$ por lo tanto $f_c = \mu_c mg$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la persona. Sustituir en el resultado del paso 2:

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n - f_c = ma_x$

con lo cual

$F - \mu_c mg = ma_x$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al cochecillo. Sustituir F en el resultado del paso 3:

$\Sigma F_x = Ma_x \Rightarrow -F = Ma_x$

con lo cual

$-Ma_x - \mu_c mg = ma_x$

5. Obtener a_x con el resultado del paso 4:

$$a_x = -\frac{\mu_c}{1 + M/m}g$$

(Como era de esperar, la aceleración es negativa.)

6. Sustituir el resultado del paso 5 en la ecuación cinemática y obtener D:

$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 + 2a_x D$

por lo tanto

$$D = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \boxed{\left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{v_0^2}{2\mu_c g}}$$

(b) F resulta de la segunda ley de Newton aplicada al cochecillo:

$$F = -Ma_x \Rightarrow F = \boxed{\frac{\mu_c M}{1 + M/m}g}$$

Observación El valor mínimo de D es proporcional a v_0^2 e inversamente proporcional a μ_c. La figura 5.13 muestra la distancia de frenado D en función de la velocidad inicial al cuadrado para valores de M/m iguales a 0,1, 0,3 y 1,0 con $\mu_c = 0{,}5$. Obsérvese que cuando la masa del cochecillo aumenta, se requiere una mayor distancia de frenado para una determinada velocidad inicial. Esto es análogo a lo que ocurre cuando se quiere detener un vehículo que arrastra un remolque cuando éste no tiene frenos propios. La masa del remolque aumenta la distancia de parada para una determinada velocidad.

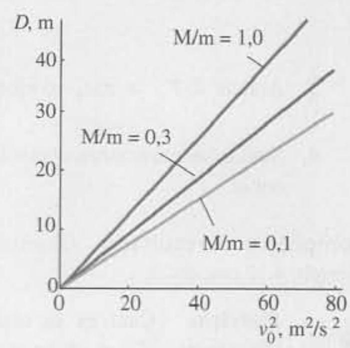


Figura 5.13

EJEMPLO 5.6 | Tirando de una niña en un tobogán

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una niña de masa m_c está sentada en un tobogán de masa m_t, situado sobre un estanque helado. El tobogán se empuja con una fuerza horizontal F (figura 5.14). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la niña y el tobogán son μ_e y μ_c respectivamente. (*a*) Determinar el valor máximo de F para el cual la niña no se desliza respecto al tobogán. (*b*) Determinar la aceleración del tobogán y la niña cuando F es superior a este valor máximo.

Planteamiento del problema La única fuerza que acelera a la niña es la fuerza de rozamiento que ejerce el tobogán sobre ella. El apartado (a) consiste en determinar F cuando esta fuerza es estática y máxima. Para hacerlo, aplicar $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a la muchacha y despejar la aceleración cuando la fuerza de rozamiento estática es máxima. Luego aplicar $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ al tobogán y despejar F. En el apartado (b) se procede de forma similar. Sin embargo, en esta parte F viene dada y despejamos la aceleración del tobogán.

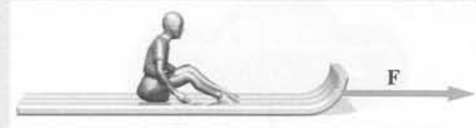


Figura 5.14

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos | **Respuestas**

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada elemento del problema (figura 5.15).
En este caso se muestran dos alternativas para el dibujo del diagrama de fuerzas del tobogán. En la primera, las dos fuerzas hacia abajo se dibujan separadas. En la segunda se dibujan una a continuación de la otra.

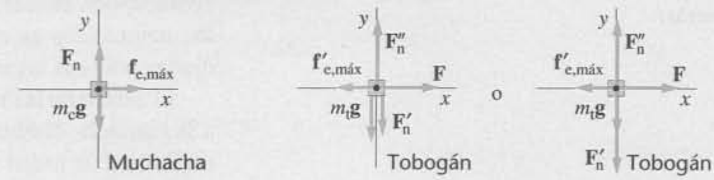


Figura 5.15

2. En cada diagrama se igualan los módulos de las fuerzas para cada par de fuerzas acción-reacción. Se expresa la relación entre las aceleraciones debida a la condición de ausencia de deslizamiento mutuo.

$F'_n = F_n$ y $f'_{e,máx} = f_{e,máx}$

y

$a_{cx} = a_{tx} = a_x$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la niña. Obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:

$\Sigma F_{cy} = m_c a_y \Rightarrow F_n - m_c g = 0$

$F_n = m_c g$ y

$f_{e,máx} = \mu_e F_n$ por lo tanto $f_{e,máx} = \mu_e m_c g$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la niña y obtener la aceleración.

$\Sigma F_{cx} = m_c a_x \Rightarrow f_{e,máx} = m_c a_x$

y

$\mu_e m_c g = m_c a_x$ con lo cual $a_x = \mu_e g$

5. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al tobogán y, usando las relaciones obtenidas en el paso 2 para la aceleración y el resultado del paso 3, obtener F:

$\Sigma F_{tx} = m_t a_x \Rightarrow F - f_{e,máx} = m_t a_x$

y

$F - \mu_e m_c g = m_t \mu_e g$ esto es $F = \boxed{(m_c + m_t)\mu_e g}$

(b) 1. Igualar las magnitudes de cada par de fuerzas acción-reacción y expresar el cambio en la relación entre las aceleraciones debido a que ahora no se da la restricción de ausencia de deslizamiento mutuo.

$F'_n = F_n$ y $f'_c = f_c$

pero

$a_{cx} < a_{tx}$

2. Obtener la fuerza de rozamiento cinética usando el resultado del paso (a) 3 de la fuerza normal.

$f_c = \mu_c F_n$ por lo tanto $f_c = \mu_c m_c g$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la niña y obtener *su aceleración*.

$\Sigma F_{cx} = m_c a_{cx} \Rightarrow f_c = m_c a_{cx}$

y

$\mu_c m_c g = m_c a_{cx}$ con lo que $a_{cx} = \mu_c g$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al tobogán. Usando el resultado del apartado (b) 2, obtener *su aceleración*.

$\Sigma F_{tx} = m_t a_{tx} \Rightarrow F - f_c = m_t a_{tx}$

y

$F - \mu_c m_c g = m_t a_{tx}$ esto es $a_{tx} = \boxed{\dfrac{F - \mu_c m_c g}{m_t}}$

Observación El rozamiento es una fuerza entre dos superficies en contacto, y no es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento o a la tendencia al movimiento. En este ejemplo el rozamiento no se opone al movimiento de la niña, sino que lo produce. Es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento, o a la tendencia al movimiento, de *una superficie respecto de otra*. Por ejemplo, aunque la chica se mueve hacia delante *en relación al hielo*, se mueve o tiende a moverse hacia atrás (hacia la izquierda) *en relación al tobogán*. El rozamiento se opone al movimiento relativo o a la tendencia al movimiento.

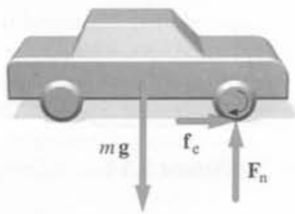


Figura 5.16 Fuerzas que actúan sobre un coche con tracción delantera. Las fuerzas normales $\mathbf{F}_n$ no son generalmente iguales en las ruedas delanteras y traseras.

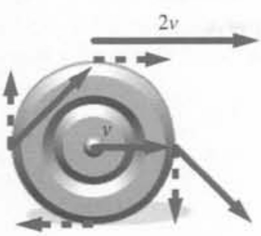


Figura 5.17 Cuando una rueda gira sin deslizar, cada punto de la periferia posee una velocidad de magnitud v relativa al centro de la rueda, en donde v es la velocidad del centro de la rueda al suelo. La velocidad del punto sobre el neumático en contacto con el suelo es cero respecto al suelo. En esta figura las líneas de puntos representan velocidades respecto al centro de la rueda y las líneas continuas representan velocidades respecto al suelo.

La figura 5.16 muestra las fuerzas que actúan sobre un coche en el momento justo que parte del reposo. El peso del coche es equilibrado por la fuerza normal F_n ejercida sobre los neumáticos. Para que el coche comience a moverse, el motor suministra potencia al eje de tracción haciendo que las ruedas giren (trataremos el concepto de potencia en el capítulo 6). Si el movimiento sobre la carretera fuese sin rozamiento, las ruedas simplemente girarían sobre sí mismas. Cuando existe rozamiento, la carretera ejerce sobre los neumáticos una fuerza de rozamiento dirigida hacia adelante que proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Si la potencia suministrada por el motor es lo suficientemente pequeña para que la fuerza ejercida por la superficie de los neumáticos sobre la carretera no sea grande, las dos superficies no deslizan. Las ruedas giran sin deslizar y la superficie de los neumáticos en contacto con el suelo está en reposo relativo respecto a él. El rozamiento entre la carretera y los neumáticos es estático. La máxima fuerza de rozamiento que los neumáticos pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre los neumáticos) es $\mu_e F_n$.

El centro de las ruedas de un coche que se desplaza en línea recta con velocidad v relativa a la carretera, también se mueve con velocidad v, como se ve en la figura 5.17. Si una rueda no desliza, la mitad superior de la rueda se mueve más rápida que v y la mitad inferior de la rueda se mueve más lenta que v. Sin embargo, cada punto del perímetro de la rueda *relativo al coche* se mueve en un círculo con la misma velocidad v. Además la velocidad instantánea del punto del neumático que está en contacto con el suelo *es cero relativa al suelo*. (De otro modo, el neumático patinaría.)

Si la potencia del motor es suficientemente grande, el neumático patinará y las ruedas girarán sobre sí mismas. Por lo tanto, la fuerza que acelera el coche es la fuerza de rozamiento cinética, que es inferior a la fuerza de rozamiento estática. Si nos encontramos con el coche atascado en hielo o nieve, para poder salir es mejor acelerar con mucha suavidad. De la misma forma, si tenemos que detener completamente un coche, la fuerza que ejerce el asfalto sobre las ruedas es estática o cinética, dependiendo de la forma como frenamos. Si frenamos tan bruscamente que las ruedas se bloquean, los neumáticos resbalaran sobre el asfalto y la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento cinética. Si, en cambio, no frenamos tan bruscamente y no se produce deslizamiento entre los neumáticos y la carretera, la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento estática. Los sistemas de frenado antibloqueo (ABS) de los coches utilizan sensores para medir la velocidad de la rueda. Si el dispositivo de control detecta que la rueda está próxima a bloquearse, el sistema modula una señal que hace que la presión del freno disminuya, para instantes después restaurar la presión sobre la rueda y así sucesivamente unas 15 veces por segundo. Esta presión variable es similar a la que se ejerce bombeando el pedal del freno pero, con el sistema ABS, únicamente se produce la sucesión de presión fuerte presión débil en aquella rueda que está a punto de bloquearse. Con este método se consigue el máximo frenado ya que se consigue el rozamiento máximo para detener el coche.

Cuando las ruedas se bloquean y los neumáticos resbalan, se dan dos cosas no deseadas. La distancia mínima necesaria para detener el vehículo aumenta y la capacidad que el conductor tiene para controlar el coche disminuye enormemente. Obviamente la disminución de la capacidad de control puede tener consecuencias graves.

EJEMPLO 5.7 | El efecto de los frenos antibloqueo

Un coche viaja a 30 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre la carretera y los neumáticos son $\mu_e = 0,5$ y $\mu_c = 0,3$. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en detenerse si (*a*) el coche se frena con un sistema antibloqueo, de modo que las ruedas no deslizan y (*b*) el coche se frena con dureza sin antibloqueo, y las ruedas se bloquean.

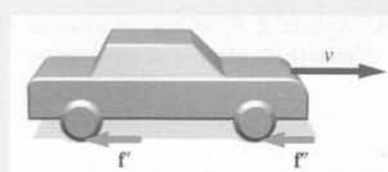


Figura 5.18

Planteamiento del problema La fuerza que detiene un automóvil cuando éste se frena es la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos (figura 5.18). Entonces, aplicando la segunda ley de Newton se determina la aceleración. Utilizamos la cinemática para determinar la distancia recorrida antes de parar.

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.19). Considerar las cuatro ruedas como si tuvieran un solo punto de contacto con el suelo. Suponer también que los frenos se aplican a las cuatro ruedas. Hagamos $\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}''$.

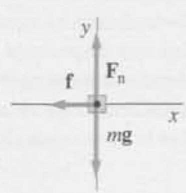


Figura 5.19

2. Para relacionar la distancia necesaria para parar, Δx, con la velocidad inicial v_0 usamos la ecuación 2.15, suponiendo que la aceleración es constante. Los coeficientes de rozamiento varían con la temperatura y dado que al resbalar los neumáticos se calientan, los coeficientes de rozamiento varían también. Sin embargo no tendremos en cuenta este efecto aquí:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x$$

Cuando $v = 0$,

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a_x}$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al coche. Primero se obtiene la fuerza normal, después la fuerza de rozamiento.

$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$, por lo tanto

$F_n = mg$ y

$f_{e,máx} = \mu_e F_n$, con lo cual $f_{e,máx} = \mu_e mg$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche y se obtiene la aceleración:

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{e,máx} = ma_x$

y

$-\mu_e mg = ma_x$, con lo cual $a_x = -\mu_e g$

5. Aplicando estos resultados en la ecuación de Δx en el paso 2 se obtiene la distancia de frenado:

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2\mu_e g}$$

$$= \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}5)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{91{,}8\ \text{m}}$$

(b) 1. Cuando las ruedas se bloquean, la fuerza ejercida por la carretera sobre el coche es el rozamiento cinético. Mediante un razonamiento semejante al del apartado (a), se obtiene para la aceleración:

$$a_x = -\mu_c g$$

2. La distancia de frenado es por lo tanto:

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2\mu_c g}$$

$$= \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}3)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{153\ \text{m}}$$

Observación La distancia de frenado es superior en un 50% cuando las ruedas están bloqueadas. Obsérvese también que esta distancia es independiente de la masa del coche: la distancia de frenado es igual para un pequeño coche utilitario que para un camión, siempre que los coeficientes de rozamiento sean iguales.

Ejercicio ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y los neumáticos de un coche con tracción a las cuatro ruedas si el coche se acelera desde el reposo a 25 m/s en un tiempo de 8 s? (*Respuesta* 0,319.)

5.2 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva

En el capítulo 3 se estableció que si una partícula se mueve con una velocidad v a lo largo de una trayectoria curva con un radio de curvatura r, la partícula tiene una componente de la aceleración $a_c = v^2/r$ en la dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura), y una componente de la aceleración en la dirección tangencial $a_t = dv/dt$.

Además, la fuerza neta va en la dirección de la aceleración. La componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta se denomina **fuerza centrípeta**. La fuerza centrípeta no es una clase de fuerza distinta de las que ya hemos estudiado, sino que meramente designa a la componente de la fuerza neta perpendicular a la dirección del movimiento que puede ejercerse mediante una cadena, un muelle o cualquier otra fuerza de contacto como la fuerza normal o la fuerza de rozamiento; también puede producir una fuerza centrípeta una fuerza de acción a distancia como la fuerza de gravitación, o puede darse como resultado de una combinación de todas. En cualquier caso, siempre apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

WEB

EXPLORANDO

Las leyes de Newton no son válidas en los sistemas de referencia no inerciales. Explore sistemas de referencia no inerciales, pseudofuerzas, y ciclones en www.whfreeman.com/tipler5e

EJEMPLO 5.8 | Dando vueltas a un cubo

Se hace girar un cubo de agua siguiendo una circunferencia vertical de radio r (figura 5.20). Si la velocidad del cubo en su parte más alta es v_a, calcular (*a*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en este punto; (*b*) el valor mínimo de v_t para que el agua no se salga del cubo; (*c*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo, en donde la velocidad del cubo es v_b.

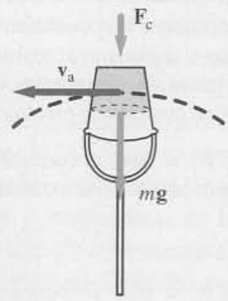


Figura 5.20

Planteamiento del problema Apliquemos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua. Como el agua se mueve según una trayectoria circular, existirá una aceleración centrípeta v^2/r hacia el centro del círculo.

(a) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para el agua en la parte superior y en la parte inferior del círculo (figura 5.21). En cada caso, elegir como dirección positiva del eje x la dirección hacia el centro del círculo.

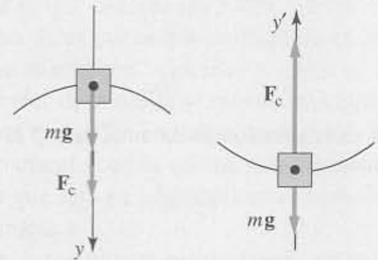


Figura 5.21

2. Aplicar $\sum F_y = ma_y$ al agua cuando pasa por la parte más alta del círculo a velocidad v_a. Despejar la fuerza F_c que hace el cubo sobre el agua:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_c + mg = m\frac{v_a^2}{r}$$

por lo tanto

$$F_c = \boxed{m\left(\frac{v_a^2}{r} - g\right)}$$

(b) El cubo puede empujar el agua, pero no puede tirar de ella. La fuerza mínima que puede ejercer es cero. Haciendo $F_p = 0$ y despejando $v_{a,\,min}$:

$$0 = m\left(\frac{v_{a,\,min}^2}{r} - g\right) \Rightarrow v_{a,\,min} = \boxed{\sqrt{rg}}$$

(c) Aplicar $\sum F_{y'} = ma_{y'}$ al agua cuando pasa por la parte más baja del cubo a velocidad v_b. Despejar F_c:

$$\Sigma F_{y'} = ma_{y'} \Rightarrow F_c - mg = \frac{mv_b^2}{r}$$

por lo tanto

$$F_c = \boxed{m\left(\frac{v_b^2}{r} + g\right)}$$

Observación En los diagramas de fuerzas para el agua no está representada la fuerza centrípeta. La fuerza centrípeta no es un tipo de fuerza ejercida por un agente; es sólo el nombre de la fuerza resultante que debe apuntar hacia el centro del círculo para proporcionar la aceleración centrípeta. Cuando el cubo giratorio está en la parte alta del círculo, tanto la gravedad como la fuerza de contacto del cubo contribuyen a la fuerza centrípeta que actúa sobre el agua. Cuando el agua se mueve a la velocidad mínima en lo alto del círculo, su aceleración es **g** (aceleración en caída libre debida a la gravedad) y la única fuerza que actúa sobre ella en este punto es su peso, mg. En la parte más baja del círculo, F_c debe ser mayor que el peso mg para suministrar al agua la fuerza centrípeta necesaria.

Comprobar el resultado Cuando $v = 0$ en la parte más baja del círculo, $F_c = mg$.

Ejercicio Estimar (*a*) la velocidad mínima en la parte alta del círculo y (*b*) el período máximo de revolución que evita que el líquido se derrame al hacer girar un cubo de agua en un círculo vertical a velocidad constante. (*Respuestas* (*a*) Suponiendo que $r \sim 1$ m, resulta $v_{a,\,min} \sim 3$ m/s. (*b*) $T = (2\pi r/v) \sim 2$ s.)

EJEMPLO 5.9 | Un péndulo

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una bola de masa m está suspendida de una cuerda de longitud L y se mueve con velocidad constante v en un círculo horizontal de radio r. La cuerda forma un ángulo $\theta = r/L$. Determinar (*a*) la dirección de la aceleración, (*b*) la tensión de la cuerda y (*c*) la velocidad de la bola.

Planteamiento del problema Dos fuerzas actúan sobre la bola: su peso, $m\mathbf{g}$, y la tensión, $\mathbf{T}$, de la cuerda (véase la figura 5.22). La suma vectorial de estas fuerzas va en la dirección de la aceleración.

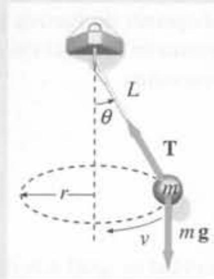
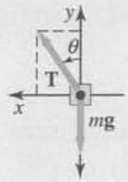


Figura 5.22

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) La bola se mueve en un círculo horizontal dando vueltas a velocidad constante. La aceleración va en la dirección centrípeta.	La aceleración es horizontal y dirigida desde la bola hacia el centro del círculo por donde se mueve.
(b) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola. Elegir la dirección positiva del eje x en la dirección de la aceleración de la pelota.	 Figura 5.23
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ para la bola y obtener la tensión T.	$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T \cos\theta - mg = 0$ por lo tanto $\boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta}}$
(c) 1. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la bola.	$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T \text{ sen } \theta = m\frac{v^2}{r}$
2. Sustituir $mg/\cos\theta$ para T y obtener v.	$\frac{mg}{\cos\theta} \text{ sen } \theta = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{v^2}{rg}$ por lo tanto $v = \boxed{\sqrt{rg \text{ tg } \theta}}$

Observación Un objeto atado a una cuerda y moviéndose en un círculo horizontal, de modo que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical, se denomina *péndulo cónico.*

Cuando el coche circula por una curva de una carretera horizontal, la fuerza centrípeta se origina por la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos del coche. Si el coche no se desliza radialmente, el rozamiento es estático. Si el coche se mueve a velocidad constante, la componente hacia delante de la fuerza de rozamiento se equilibra con las fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo, como la fuerza de arrastre del aire y la fuerza de rozamiento a la rodadura. Si la resistencia del aire es despreciable, la componente en la dirección del movimiento de la fuerza de rozamiento es nula.

EJEMPLO 5.10 | Una prueba de carretera

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Durante un trabajo de verano, un equipo de estudiantes diseña neumáticos de automóviles. Se prueba un nuevo prototipo de neumáticos para ver si su comportamiento cumple las previsiones. En una prueba de deslizamiento, el modelo BMW 530i fue capaz de recorrer a velocidad constante un círculo de 45,7 m de radio en 15,2 s sin patinar. (*a*) ¿Cuál fue su velocidad v? (*b*) ¿Cuál fue la aceleración centrípeta? (*c*) Suponiendo que la fuerza del aire y el rozamiento son despreciables, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático?

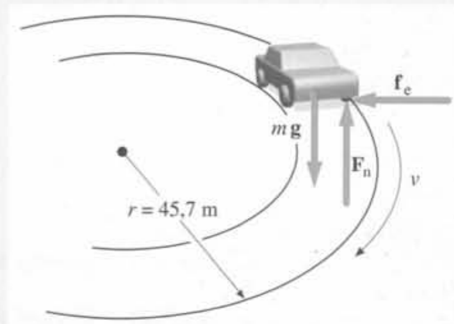


Figura 5.24

Planteamiento del problema La figura 5.24 muestra las fuerzas que actúan sobre el coche. La fuerza normal F_n equilibra el peso mg. La fuerza horizontal es la fuerza de rozamiento estático, que suministra la fuerza centrípeta. Cuanto más rápido circula el coche, mayor es la fuerza centrípeta requerida. La velocidad se determina a partir de la longitud de la circunferencia y del período T. Esta velocidad impone un límite inferior al valor máximo del coeficiente de rozamiento estático.

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.25). La dirección positiva en la dirección r señala en la dirección opuesta al centro de curvatura.

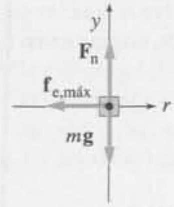


Figura 5.25

2. Usar "la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo" para determinar la velocidad v:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(45{,}7\ \text{m})}{15{,}2\ \text{s}} = \boxed{18{,}90\ \text{m/s}}$$

(b) Utilizar v para calcular la aceleración:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(18{,}9\ \text{m/s})^2}{45{,}7\ \text{m}} = \boxed{7{,}81\ \text{m/s}^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \boxed{0}$$

La aceleración es 7,81 m/s^2 en la dirección centrípeta,

(c) 1. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a los movimientos vertical y radial del coche. Escoger como dirección positiva la radial hacia fuera:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg \quad \text{y} \quad f_{e,\,máx} = \mu_e mg$$

2. Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al coche. Sustituyendo el resultado obtenido en el apartado (c) 1 se obtiene para μ_e:

$$\Sigma F_r = ma_r \Rightarrow -f_{e,\,máx} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right)$$

con lo cual,

$$\mu_e mg = m\frac{v^2}{r} \quad \text{y} \quad \mu_e = \frac{v^2}{rg}$$

$$\mu_e = \frac{(18{,}9\ \text{m/s})^2}{(45{,}7\ \text{m})(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{0{,}796}$$

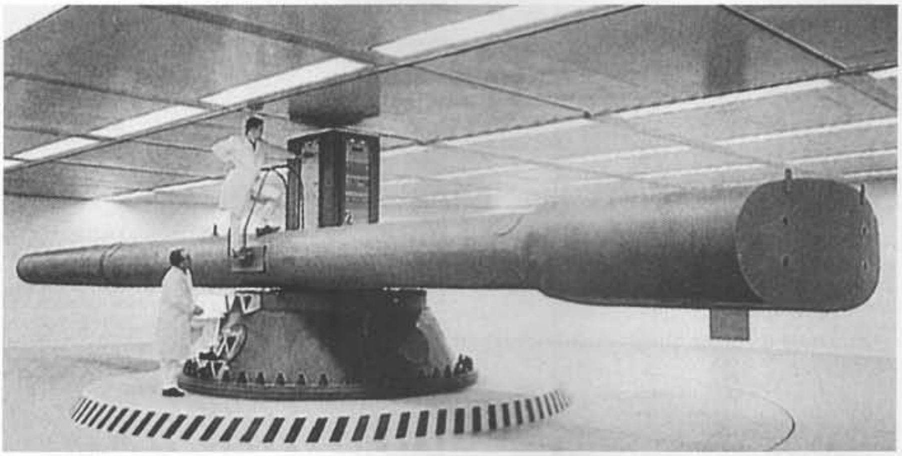
Observación Cuando se calculan los valores de las magnitudes con tres cifras significativas, una buena práctica es calcular los valores intermedios con cuatro cifras significativas. Por ejemplo, si se usan los valores que se muestran en el apartado (b), se obtiene $a_c = 7{,}816$ m/s^2. Este resultado no debe redondearse a 7,82 m/s^2, ya que en el paso 2 del apartado (a), sustituyendo los valores exactos nos lleva a obtener, con cuatro cifras significativas, $v = 18{,}89$ m/s. Calculando a_c usando $v = 18{,}89$ m/s (en vez de 18,9 m/s) da $a_c = 7{,}808$ m/s^2, que redondeado lleva a $a_c = 7{,}81$ m/s^2. Guardar en la calculadora los valores intermedios y utilizarlos en cálculos posteriores facilita este proceso.

Comprobar el resultado Si μ_e fuera igual a 1, la fuerza hacia dentro del círculo sería mg y la aceleración centrípeta igual a g. En el ejemplo $\mu_e \approx 0{,}8$ y $a_c \approx 0{,}8g$.

*Curvas con pendiente (peralte)

Si una carretera curvada no es horizontal, sino inclinada, la fuerza normal de la carretera tendrá una componente dirigida hacia el centro del círculo que contribuye a la fuerza centrípeta. El ángulo de la pendiente (o peralte) puede elegirse de tal modo que, para una determinada velocidad, no sea necesario el rozamiento para tomar la curva sin patinar.

Cuando un coche coge una curva, la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera deforma los neumáticos.

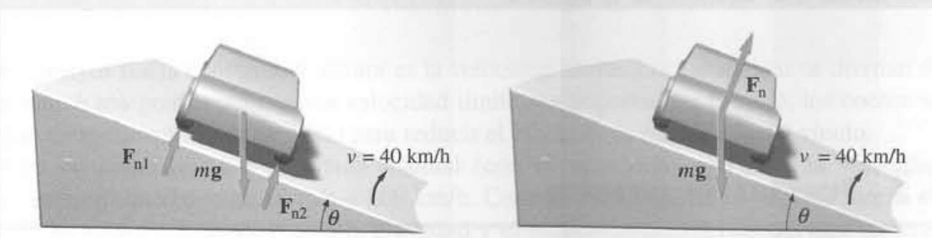


Centrífuga gigantesca utilizada para investigación en *Sandia National Laboratories* (EE. UU.)

EJEMPLO 5.11 | Una curva con peralte

Una curva de radio 30 m tiene un ángulo de peralte θ. Determinar el valor de θ para el cual un coche puede tomar la curva a 40 km/h aunque esté cubierta de hielo.

Planteamiento del problema En este caso existen sólo dos fuerzas sobre el coche: la gravedad y la fuerza normal. Dado que el coche se mueve en un círculo a velocidad constante, la aceleración va en la dirección centrípeta. El vector suma de las dos fuerzas va en la dirección de la aceleración.



(*a*) (*b*)

Figura 5.26

1. En la figura 5.26*a* las fuerzas que ejerce el asfalto sobre el coche se designan como $\mathbf{F}_{n1}$ y $\mathbf{F}_{n2}$. Estas fuerzas se combinan y dan $\mathbf{F}_n$ en la figura 5.26*b*. El ángulo entre la fuerza normal $\mathbf{F}_n$ y la vertical es θ, el mismo ángulo del peralte. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche.

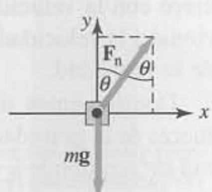


Figura 5.27

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al coche:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n \cos\theta - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = \frac{mg}{\cos\theta}$$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche. Sustituir F_n usando el resultado del paso 2 y se obtiene θ:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

y

$$\frac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r} \quad \text{con lo cual} \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{[(40\,000\ \text{m})/(3600\ \text{s})]^2}{(30\ \text{m})(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{22{,}8°}$$

Observación El ángulo de peralte θ depende de v y r, pero no de la masa m; θ aumenta con v creciente y disminuye al aumentar r. Cuando el ángulo de peralte, la velocidad y el radio satisfacen la ecuación tg $\theta = v^2/rg$, el coche toma la curva con suavidad sin tendencia a patinar hacia dentro o hacia afuera. Si la velocidad del coche es mayor que $\sqrt{rg \text{ tg } \theta}$, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento según la pendiente hacia abajo. Esta fuerza tiene una componente horizontal hacia el centro de la curvatura que proporciona la fuerza centrípeta adicional necesaria para evitar que el coche se mueva hacia fuera (patinar hacia arriba según la pendiente). Si la velocidad del coche es inferior a esta magnitud, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento hacia arriba según la pendiente.

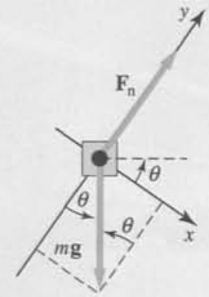


Figura 5.28

Solución alternativa En la resolución del problema se ha usado el criterio de escoger como dirección de un eje de coordenadas la dirección del vector aceleración, la dirección centrípeta. Sin embargo, la solución no es más difícil si elegimos como dirección de un eje la dirección de la pendiente. Esta es la opción que hemos tomado en la solución siguiente.

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.28). La dirección del eje x se toma en la dirección de la pendiente y el eje y se toma en la dirección perpendicular.
2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche: $\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow mg \text{ sen } \theta = ma_x$
3. Dibujar un esquema y usar la trigonometría para obtener una expresión para a_x en función de a y de θ (figura 5.29): $a_x = a \cos \theta$
4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2. Sustituir v^2/r por a y se obtiene θ: $mg \text{ sen } \theta = ma \cos \theta$

$$g \text{ sen } \theta = \frac{v^2}{r} \cos \theta$$

$$\text{tg } \theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = \text{arctg}\frac{v^2}{rg}$$

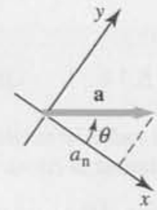


Figura 5.29

Ejercicio Determinar la componente de la aceleración normal a la superficie de la carretera. (*Respuesta* 1,60 m/s²)

*5.3 Fuerzas de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, tal como el aire o el agua, el fluido ejerce una fuerza de resistencia o **fuerza de arrastre** que tiende a reducir la velocidad del objeto. Esta fuerza depende de la forma del objeto, de las propiedades del fluido y de la velocidad del objeto respecto al fluido. A diferencia de la fuerza de rozamiento, la fuerza de arrastre crece con la velocidad del objeto. Para pequeñas velocidades es aproximadamente proporcional a la velocidad del objeto; para velocidades superiores es casi proporcional al cuadrado de la velocidad.

Consideremos un objeto que cae libremente desde el reposo bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, supuesta constante. Ahora agregamos una fuerza de arrastre de magnitud bv^n, en donde b y n son constantes. Así tenemos una fuerza hacia abajo constante, mg, y una fuerza hacia arriba bv^n (figura 5.30).

Si tomamos positiva la dirección hacia abajo, resulta según la segunda ley de Newton

$$\sum F_y = mg - bv^n = ma_y \tag{5.6}$$

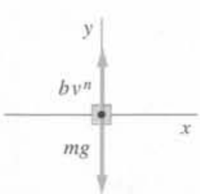


Figura 5.30 Diagrama de fuerzas de un objeto que cae libremente en el aire, que le ofrece una fuerza de resistencia.

Para $t = 0$, cuando se deja caer el objeto, la velocidad es nula, de modo que la fuerza de arrastre es cero y la aceleración es g hacia abajo. Cuando la velocidad del objeto crece, la fuerza de arrastre se incrementa y la aceleración es menor que g. Finalmente, la velocidad se hace lo suficientemente grande para que la fuerza de arrastre bv^n sea igual a la fuerza de gravedad mg, de modo que la aceleración se hace cero. El objeto continúa entonces moviéndose a la velocidad constante v_l, llamada **velocidad límite** o velocidad terminal. Haciendo $a_y = 0$ resulta, de la ecuación 5.7

$$bv_l^n = mg$$

Y por lo tanto, para la velocidad límite

$$v_1 = \left(\frac{mg}{b}\right)^{1/n} \tag{5.7}$$

Cuanto mayor sea la constante b, menor es la velocidad límite. Los paracaídas se diseñan de modo que b sea grande para que la velocidad límite sea pequeña. En cambio, los coches se diseñan de modo que b sea pequeño para reducir el efecto de la resistencia del viento.

Para un paracaidista de apertura manual (con el paracaídas cerrado), la velocidad límite es aproximadamente 60 m/s ≈ 200 km/h. Cuando el paracaídas se abre, la fuerza de arrastre es mayor que la fuerza de la gravedad y el paracaidista experimenta una aceleración hacia arriba mientras cae, es decir, su velocidad hacia abajo disminuye. Entonces la fuerza de arrastre disminuye hasta que se alcanza una nueva velocidad límite, del orden de 20 km/h.

EJEMPLO 5.12 | Velocidad límite

Un paracaidista de masa 64 kg alcanza una velocidad límite de 180 km/h con sus brazos y piernas extendidas. (*a*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de arrastre F_a sobre el paracaidista? (*b*) Si la fuerza de arrastre es igual a bv^2, ¿cuál es el valor de b?

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas:

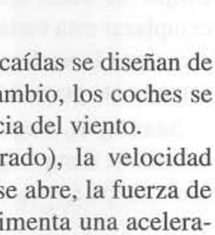


Figura 5.31

2. Aplicar $\sum F_y = ma_y$. Como el paracaidista se mueve con velocidad constante, la aceleración es cero:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_a - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_a = mg = (64\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) = \boxed{628\text{ N}}$$

(b) 1. Para determinar b, basta considear que $F_a = bv^2$:

$$F_a = mg = bv^2$$

por lo tanto

$$b = \frac{mg}{v^2}$$

2. Determinar la velocidad en m/s y después calcular b:

$$180 \text{ km/h} = \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}}\left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)$$

$$= \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}}\left(\frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}\right) = 50 \text{ m/s}$$

$$b = \frac{(64 \text{ kg})(9{,}81 \text{ N/kg})}{(50 \text{ m/s})^2} = \boxed{0{,}251 \text{ kg/m}}$$

*5.4 Integración numérica: el método de Euler

Si una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza *constante*, su aceleración es constante y para la determinación de su velocidad y de su posición se usan las fórmulas cinemáticas que, en el caso de aceleración constante, se han descrito en el capítulo 2. Consideremos ahora una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza, y por consiguiente, de una aceleración, que depende de la posición y de la velocidad de la partícula. La posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en un instante de tiempo determinan la posición y la velocidad en el siguiente instante que, a su vez, determinan la aceleración. La posición, la velocidad y la aceleración real de un objeto cambian continuamente con el tiempo. Se suele aproximar esta situación mediante el **método de Euler** que consiste en reemplazar esta variación continua con el tiempo por pequeños intervalos de tiempo Δt de tal forma que la aceleración en cada intervalo sea constante. Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, el cambio de la aceleración es pequeño y puede despreciarse.

Sean x_0, v_0 y a_0 la posición, la velocidad y la aceleración iniciales de la partícula en un instante de tiempo t_0. Si suponemos que durante Δt la aceleración es constante, la velocidad en el tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ viene dada por

$$v_1 = v_0 + a_0 \, \Delta t$$

Similarmente, si despreciamos cualquier cambio de la velocidad durante el intervalo de tiempo, la nueva posición viene dada por la ecuación

$$x_1 = x_0 + v_0 \, \Delta t$$

A partir de los valores de v_1 y x_1 calculamos la nueva aceleración a_1 usando la segunda ley de Newton y, posteriormente usamos x_1, v_1, y a_1 para calcular x_2 y v_2.

$$x_2 = x_1 + v_1 \, \Delta t \tag{5.8}$$

$$v_2 = v_1 + a_1 \, \Delta t \tag{5.9}$$

La conexión entre la posición y la velocidad en el tiempo t_n y el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ viene dada por

$$x_{n+1} = x_n + v_n \, \Delta t \tag{5.10}$$

y

$$v_{n+1} = v_n + a_n \, \Delta t \tag{5.11}$$

Por lo tanto, para determinar la velocidad y la posición en un tiempo t dividimos el intervalo de tiempo $t - t_0$ en un gran número de pequeños intervalos Δt y aplicamos las ecuaciones 5.10 y 5.11 empezando en el instante inicial t_0. Esto comporta un gran cantidad de cálculos simples y repetitivos que mediante un ordenador son fáciles de hacer. La técnica de dividir el intervalo de tiempo en pequeños intervalos de tiempo y calcular la aceleración, la velocidad y la posición en cada intervalo usando los valores del intervalo anterior se denomina integración numérica.

Fuerzas de resistencia Para ilustrar el uso de la integración numérica, consideremos el problema de un paracaidista que salta en caída libre, partiendo del reposo, desde una altura determinada, de modo que su movimiento depende únicamente de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de resistencia del aire, que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Tenemos que calcular la velocidad v y la distancia recorrida x en función del tiempo.

La ecuación que describe el movimiento de un objeto de masa m que parte del reposo y que cae bajo la acción de la gravedad es la ecuación 5.6 con $n = 2$

$$mg - bv^2 = ma$$

donde la dirección positiva es la dirección hacia abajo. La aceleración, en estas condiciones, vale

$$a = g - \frac{b}{m}v^2 \tag{5.12}$$

Conviene escribir la constante b/m en función de la velocidad límite v_l. Si $a = 0$ en la ecuación 5.12, se obtiene

$$0 = g - \frac{b}{m}v_l^2$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_l^2}$$

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0,00	0,0	0,00	9,81
10	0,50	0,0	4,91	9,74
11	1,00	2,5	9,78	9,55
12	1,50	7,3	14,55	9,23
13	2,00	14,6	19,17	8,81
14	2,50	24,2	23,57	8,30
15	3,00	36,0	27,72	7,72
41	16,00	701,0	59,55	0,15
42	16,50	730,7	59,62	0,16
43	17,00	760,6	59,68	0,10
44	17,50	790,4	59,74	0,09
45	18,00	820,3	59,78	0,07
46	18,50	850,2	59,82	0,06
47	19,00	880,1	59,85	0,05
48	19,50	910,0	59,87	0,04
49	20,00	939,9	59,89	0,04
50				

(a)

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0	=B2	=B3	=$B$4*(1-C9^2/$B$5^2)
10	=A9+$B$1	=B9+C9*$B$1	=C9+D9*$B$1	=$B$4*(1-C10^2/$B$5^2)
11	=A10+$B$1	=B10+C10*$B$1	=C10+D10*$B$1	=$B$4*(1-C11^2/$B$5^2)
12	=A11+$B$1	=B11+C11*$B$1	=C11+D11*$B$1	=$B$4*(1-C12^2/$B$5^2)
13	=A12+$B$1	=B12+C12*$B$1	=C12+D12*$B$1	=$B$4*(1-C13^2/$B$5^2)
14	=A13+$B$1	=B13+C13*$B$1	=C13+D13*$B$1	=$B$4*(1-C14^2/$B$5^2)
15	=A14+$B$1	=B14+C14*$B$1	=C14+D14*$B$1	=$B$4*(1-C15^2/$B$5^2)
41	=A40+$B$1	=B40+C40*$B$1	=C40+D40*$B$1	=$B$4*(1-C41^2/$B$5^2)
42	=A41+$B$1	=B41+C41*$B$1	=C41+D41*$B$1	=$B$4*(1-C42^2/$B$5^2)
43	=A42+$B$1	=B42+C42*$B$1	=C42+D42*$B$1	=$B$4*(1-C43^2/$B$5^2)
44	=A43+$B$1	=B43+C43*$B$1	=C43+D43*$B$1	=$B$4*(1-C44^2/$B$5^2)
45	=A44+$B$1	=B44+C44*$B$1	=C44+D44*$B$1	=$B$4*(1-C45^2/$B$5^2)
46	=A45+$B$1	=B45+C45*$B$1	=C45+D45*$B$1	=$B$4*(1-C46^2/$B$5^2)
47	=A46+$B$1	=B46+C46*$B$1	=C46+D46*$B$1	=$B$4*(1-C47^2/$B$5^2)
48	=A47+$B$1	=B47+C47*$B$1	=C47+D47*$B$1	=$B$4*(1-C48^2/$B$5^2)
49	=A48+$B$1	=B48+C48*$B$1	=C48+D48*$B$1	=$B$4*(1-C49^2/$B$5^2)
50				

(b)

Figura 5.32 (*a*) Hoja de cálculo que se usa para calcular la posición y la velocidad de un paracaidista con una resistencia del aire proporcional a v^2. (*b*) Se muestra la misma hoja de cálculo Excel, con las fórmulas.

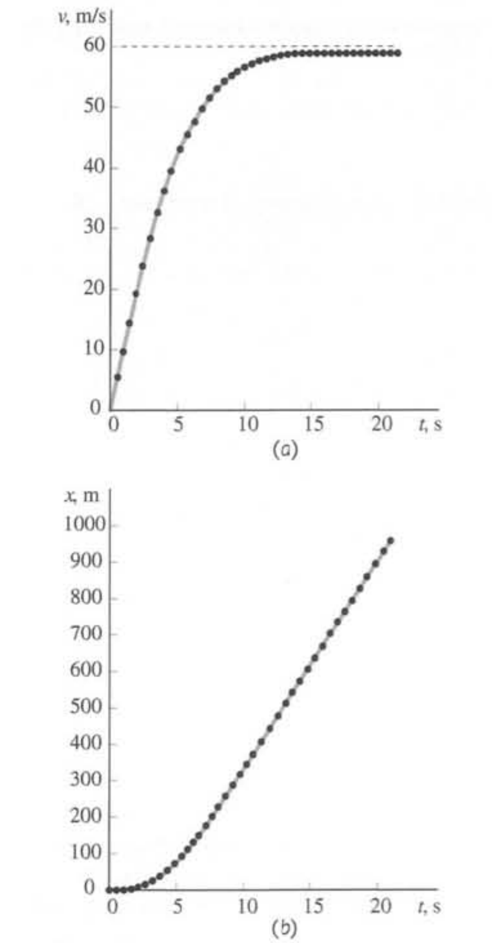


Figura 5.33 (*a*) Gráfico $v-t$ para un paracaidista, calculado mediante una integración numérica con $\Delta t = 0{,}5$ s. La línea horizontal discontinua muestra la velocidad límite $v_l = 60$ m/s. (*b*) Gráfico $x-t$ si $\Delta t = 0{,}5$ s.

Sustituyendo g/v_t^2 por b/m en la ecuación 5.12, se llega a

$$a = g\left(1 - \frac{v}{v_l^2}\right) \tag{5.13}$$

La aceleración en el tiempo t_n se calcula usando los valores de x_n y de v_n.

Para resolver la ecuación 5.13 numéricamente, tenemos que usar los valores numéricos de g y de v_l. Una velocidad límite razonable es 60 m/s. Si tomamos $x_0 = 0$, los valores iniciales son $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, y $a_0 = g = 9{,}81$ m/s^2. Para determinar la velocidad v y la posición x transcurrido un tiempo $\Delta t = 20$ s, dividimos el intervalo de tiempo $0 < t < 20$ s en muchos intervalos pequeños Δt y aplicamos las ecuaciones 5.10, 5.11, y 5.13. Lo hacemos escribiendo un programa o usando una hoja de cálculo, como la que se muestra en la figura 5.32. Esta hoja de cálculo considera $\Delta t = 0{,}5$ s y para $t = 20$ s, obtiene $x = 59{,}89$ m y $v = 939{,}9$ m/s.

La figura 5.33 muestra la representación gráfica de v respecto a t y de x respecto a t para estos datos.

¿Cuál es la precisión de estos cálculos? Podemos estimarla volviendo a usar el mismo programa con otro intervalo de tiempo más pequeño. Si usamos $\Delta t = 0{,}25$ s, la mitad del valor utilizado en el primer cálculo, cuando $t = 20$ s obtenemos $v = 59{,}86$ m/s y $x = 943{,}1$ m. La diferencia en la velocidad es de un 0,05 por ciento mientras que la de la posición es un 0,4 por ciento. Estas son pues las estimaciones de la exactitud de los cálculos iniciales.

Si la diferencia entre el valor a_m para un intervalo de tiempo y el valor de a al comienzo del intervalo se hace más pequeña a medida que el intervalo de tiempo disminuye, podríamos pensar en la conveniencia de usar intervalos de tiempo muy pequeños, como por ejemplo $\Delta t = 0{,}000000001$ s. Hay dos razones que muestran que este procedimiento no conviene. Primera, cuanto más pequeño es el intervalo, mayor es el número de cálculos que hay que realizar, con lo cual el tiempo que necesita el programa aumenta. Segunda, el ordenador en cada paso del cálculo guarda un número determinado de dígitos significativos, por lo que en cada paso se produce un redondeo. Este es un proceso aditivo, con lo que cuantos más cálculos realicemos más significativo será el error del redondeo. Cuando hemos disminuido por primera vez el intervalo de tiempo, la precisión del resultado mejora porque a_i se aproxima a a_m para ese intervalo. Sin embargo, a medida que el intervalo disminuye, los errores de redondeo crecen y la exactitud del cálculo disminuye. Una buena regla en este tipo de cálculos es no usar más de 10^4 o 10^5 intervalos para una integración numérica típica.

Resumen

Las fuerzas de rozamiento y de arrastre son fenómenos complejos que se aproximan empíricamente mediante ecuaciones simples.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Rozamiento	Dos objetos en contacto ejercen fuerzas de rozamiento entre sí. Estas fuerzas son paralelas a las superficies de los objetos en los puntos de contacto y su dirección es opuesta a la dirección del deslizamiento o tendencia a deslizar.
Rozamiento estático	$f_e \le \mu_e F_n$ **(5.2)** en donde F_n es la fuerza normal de contacto y μ_e el coeficiente de rozamiento estático.
Rozamiento cinético	$f_c = \mu_c F_n$ **(5.3)** en donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético. Este coeficiente es ligeramente menor que el de rozamiento estático.
2. Movimiento a lo largo de una curva	Una partícula que se mueve a lo largo de una curva arbitraria puede considerarse que se mueve en un arco circular durante un pequeño intervalo de tiempo. Su vector aceleración instantánea tiene una componente $a_r = v^2/r$ hacia el centro de curvatura del arco y una componente $a_t = dv/dt$ que es tangencial a la curva. Si la partícula se mueve por una trayectoria circular de radio r a velocidad constante v, $a_t = 0$ y la velocidad, el radio r y el periodo T están relacionados mediante la ecuación $2\pi r = vT$

3. *Fuerzas de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, experimenta una fuerza de arrastre que se opone al movimiento. Esta fuerza crece al aumentar la velocidad del objeto. Si el cuerpo se deja caer libremente desde el reposo, su velocidad crece hasta que la fuerza de arrastre iguala a la fuerza de gravedad, después de lo cual se mueve con una velocidad constante llamada velocidad límite. Esta velocidad límite depende de la forma del cuerpo y del medio a través del cual cae.

4. *Integración numérica: método de Euler

Para estimar la posición x y la velocidad v en un instante de tiempo t, se divide primero t en muchos intervalos de tiempo pequeños Δt. La aceleración inicial a_0 se calcula a partir de los valores de la posición inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0. La posición x_1 y la velocidad v_1 en un tiempo Δt posterior se estiman usando las relaciones

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \tag{5.10}$$

y

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \tag{5.11}$$

con $n = 0$. La aceleración a_{n+1} se calcula usando los valores de x_{n+1} y v_{n+1} y así sucesivamente. Este proceso continúa hasta que se obtienen la posición y la velocidad para el tiempo t.

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

1 ● En el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal hay varios objetos. Si el camión acelera, ¿qué fuerza actúa sobre los objetos para que éstos se aceleren?

2 ● SSM Todo objeto situado sobre el suelo de un camión se desliza si la aceleración de éste es grande. ¿Qué relación hay entre la aceleración crítica del camión para que un objeto ligero comience a deslizarse y la que corresponde a un objeto mucho más pesado?

3 ● Un bloque de masa m descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es (*a*) $\mu_e \geq g$, (*b*) $\mu_e = \text{tg}\ \theta$, (*c*) $\mu_e \leq \text{tg}\ \theta$, (*d*) $\mu_e \geq \text{tg}\ \theta$.

4 ● SSM Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre un plano inclinado 30° con la horizontal, como indica la figura 5.34. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a la fuerza de rozamiento estático es necesariamente cierta? (*a*) $f_e > mg$. (*b*) $f_e < mg \cos 30°$. (*c*) $f_e = mg \cos 30°$. (*d*) $f_e = mg\ \text{sen}\ 30°$. (*e*) Ninguna es cierta.

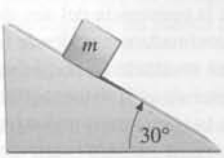


Figura 5.34 Problema 4

5 ●● En un día helado de invierno, el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos de un coche y la superficie de una carretera puede reducirse a la mitad de su valor en un día seco. Como resultado, la velocidad máxima a la cual puede tomarse una curva de radio R es (*a*) la misma que en un día seco, (*b*) reducida a un 71% de su valor en un día seco, (*c*) reducida al 50% de su valor en un día seco. (*d*) reducida al 25% de su valor en un día seco, (*e*) reducida a un valor desconocido que depende de la masa del coche.

6 ●● SSM Mostrar con un diagrama de fuerzas cómo una motocicleta puede recorrer un círculo sobre una pared vertical. Considerar parámetros razonables (coeficiente de rozamiento, radio del círculo, masa de la motocicleta, etc.) y calcular la velocidad mínima necesaria.

7 ●● Este es un experimento muy interesante que se puede realizar en casa: se coge un bloque de madera y se pone en el suelo o sobre alguna superficie plana. Se ata el bloque a un muelle y se tira de él con un movimiento suave y constante en la dirección horizontal, de modo que, a partir de un momento, el bloque empieza a moverse, pero no de forma continua, sino que se mueve, se para, se mueve, se para, etc. Explicar por qué se da este movimiento.

8 ● Verdadero o falso: visto desde un sistema de referencia inercial, un objeto no puede moverse en círculo a menos que actúe sobre él una fuerza resultante neta.