1.8 GEOMETRÍA DE COORDENADAS

El plano coordenado ▶ Las fórmulas para distancia y punto medio ▶ Gráficas de ecuaciones con dos variables ▶ Puntos de intersección ▶ Círculos ▶ Simetría

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación entre las variables de la ecuación. En esta sección estudiamos el plano coordenado.

▼ El plano coordenado

El plano cartesiano recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596–1650), aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601–1665), inventó los principios de geometría de coordenadas al mismo tiempo. (Vea sus biografías en las páginas 181 y 99.)

En la misma forma en que puntos sobre una recta pueden ser identificados con números reales para formar la recta coordenada, los puntos en un plano se pueden identificar con pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacer esto, trazamos dos rectas reales perpendiculares que se cruzan en 0 en cada recta. Por lo general, una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina **eje *y***. El punto de intersección del eje x y el eje y es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, marcados I, II, III y IV en la Figura 1. (Los puntos *sobre* los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

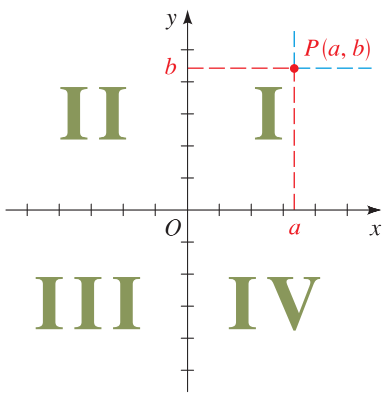


FIGURA 1

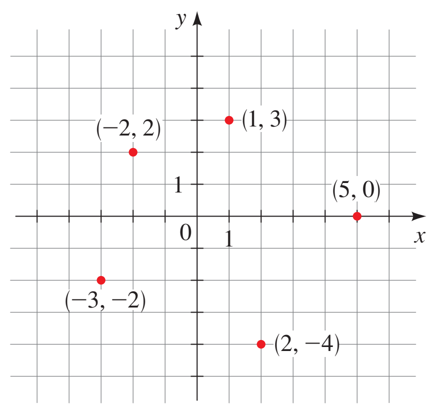


FIGURA 2

Aun cuando la notación para un punto (a, b) es la misma que la notación para un intervalo abierto (a, b), el contexto debe dejar claro cuál significado se persigue.

Cualquier punto P del plano coordenado puede ser localizado por un **par ordenado** de números (a, b), como se muestra en la Figura 1. El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Podemos considerar las coordenadas de P como su "dirección", porque especifican su ubicación en el plano. Varios puntos están marcados en la Figura 2.

EJEMPLO 1 | Graficar regiones en el plano coordenado

Describa y trace las regiones dadas por cada conjunto.

(a) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid y = 1\}$ **(c)** $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUCIÓN

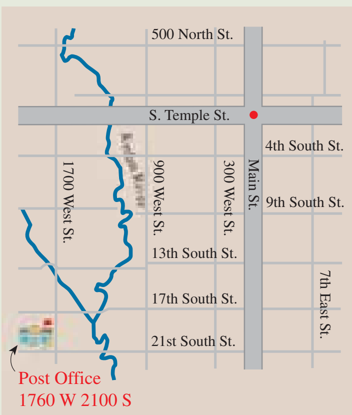
(a) Los puntos cuyas coordenadas x son 0 o positivos se encuentran sobre el eje y o a la derecha del mismo, como se ve en la Figura 3(a).

(b) El conjunto de todos los puntos con coordenada $y = 1$ es una recta horizontal que está una unidad arriba del eje x, como se ve en la Figura 3(b).

Coordenadas como direcciones
Las coordenadas de un punto en el plano *xy* determinan de manera única su ubicación. Podemos considerar las coordenadas como la "dirección" del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de casi todos los edificios están de hecho expresadas como coordenadas. La ciudad está dividida en cuadrantes con la Calle Principal como eje vertical (Norte–Sur) y la Calle del Templo S. como eje horizontal (Oriente–Poniente). Una dirección como

1760 W   2100 S

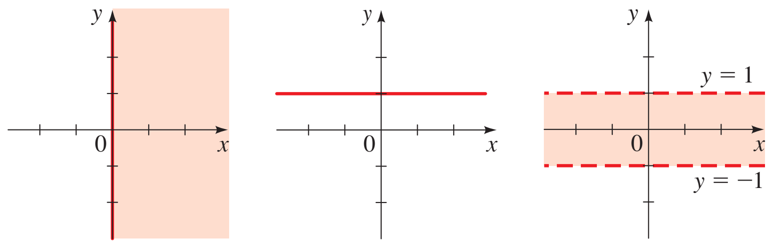
indica una ubicación a 17.6 manzanas al poniente de la Calle Principal y 21 manzanas al sur de la Calle del Templo S. (Ésta es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible que alguien no familiarizado con la ciudad pueda localizar de inmediato cualquier dirección, tan fácil como uno localiza un punto en el plano coordenado.



(c) Recuerde, de la Sección 1.7, que

$$|y| < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad -1 < y < 1$$

Entonces la región dada está formada por los puntos del plano cuyos ejes coordenados y están entre -1 y 1. Por lo tanto, la región dada consta de todos los puntos que están entre (pero no sobre) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. Estas rectas se muestran como líneas interrumpidas en la Figura 3(c) para indicar que los puntos sobre estas rectas no están en el conjunto.



(a) $x \geq 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23, 25** Y **29**

Las fórmulas para distancia y punto medio

A continuación encontramos una fórmula para la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano. Recuerde de la Sección 1.1 que la distancia entre los puntos a y b en una recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. Entonces, de la Figura 4, vemos que la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$.

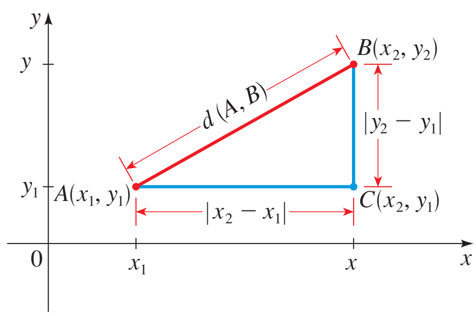


FIGURA 4

Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras da

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

FÓRMULA PARA DISTANCIAS

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 2 | Aplicar la fórmula para distancias

¿Cuál de los puntos $P(1, -2)$ o $Q(8, 9)$ está más cercano al punto $A(5, 3)$?

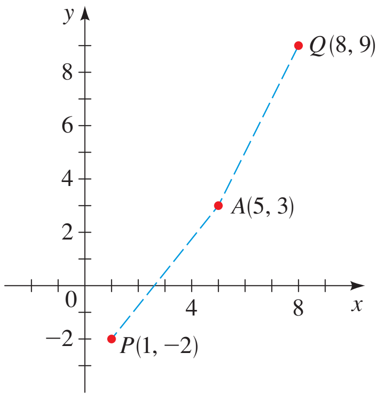


FIGURA 5

SOLUCIÓN Por la Fórmula para distancias tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$
$$d(Q, A) = \sqrt{(5-8)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, de modo que P está más cercano a A (vea Figura 5).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

Ahora encontremos las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une al punto $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$. En la Figura 6 observe que los triángulos APM y MQB son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales.

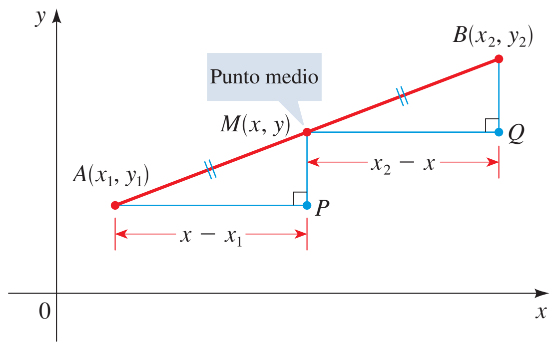


FIGURA 6

Se deduce que $d(A, P) = d(M, Q)$, por lo que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Despejando x de esta ecuación obtendremos $2x = x_1 + x_2$, por lo que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Del mismo modo, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio del segmento de recta de $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 3 | Aplicar la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo al probar que sus diagonales se bisecan entre sí.

SOLUCIÓN Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse entre sí. El punto medio de la diagonal PR es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

y el punto medio de la diagonal QS es

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

de modo que cada diagonal biseca a la otra, como se ve en la Figura 7. (Un teorema de geometría elemental dice que el cuadrilátero es por lo tanto un paralelogramo.)

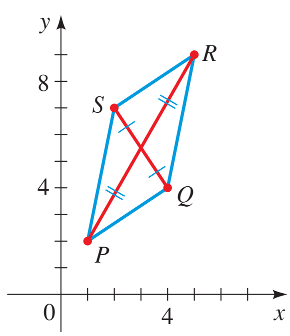


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

Principio fundamental de la Geometría Analítica
Un punto (x, y) está sobre la gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Gráficas de ecuaciones con dos variables

Una **ecuación con dos variables**, por ejemplo $y = x^2 + 1$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto (x, y) **satisface** la ecuación si hace verdadera a la ecuación cuando los valores para x y y son sustituidos en la ecuación. Por ejemplo, el punto $(3, 10)$ satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto $(1, 3)$ no la satisface porque $3 \neq 1^2 + 1$.

LA GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

La **gráfica** de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano de coordenadas que satisface la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de manera que para graficar una ecuación localizamos tantos puntos como podamos y a continuación los enlazamos con una curva sin cambios bruscos de dirección.

EJEMPLO 4 | Trazar una gráfica localizando puntos

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

SOLUCIÓN Primero despejamos y de la ecuación dada para obtener

$$y = 2x - 3$$

Esto nos ayuda a calcular las coordenadas y en la tabla siguiente.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$
4	5	$(4, 5)$

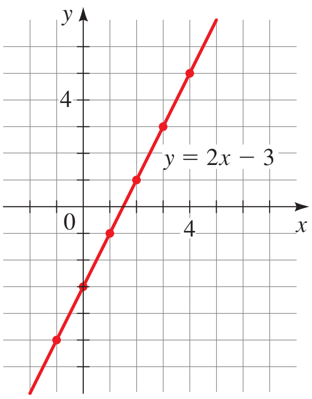


FIGURA 8

Desde luego que hay un infinito de puntos y es imposible localizarlos todos, pero, cuantos más puntos localicemos, mejor podemos imaginar el aspecto de la gráfica representada por la ecuación. Localizamos los puntos hallados en la Figura 8; parecen encontrarse sobre una recta, por lo cual completamos la gráfica al unir los puntos con una recta. (En la Sección 1.10 verificamos que la gráfica de esta ecuación es en verdad una recta.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59** ■

En el Capítulo 10 se presenta una discusión detallada de parábolas y sus propiedades geométricas.

EJEMPLO 5 | Trazar una gráfica al localizar puntos

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

SOLUCIÓN En la tabla siguiente encontramos algunos de los puntos que satisfacen la ecuación. En la Figura 9 localizamos estos puntos y luego los conectamos por medio de una curva sin cambios bruscos de dirección. Una curva con esta forma recibe el nombre de *parábola.*

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

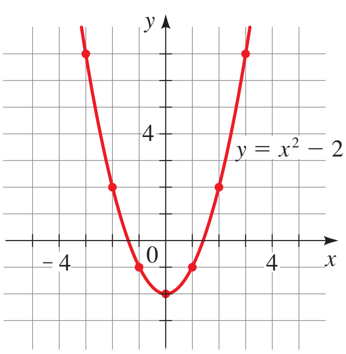


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63** ■

EJEMPLO 6 | Gráfica de una ecuación con valor absoluto

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores:

x	$y = \|x\|$	(x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

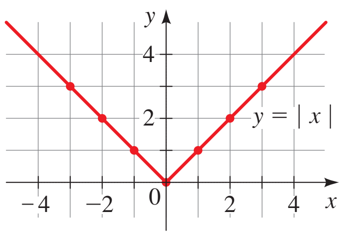


FIGURA 10

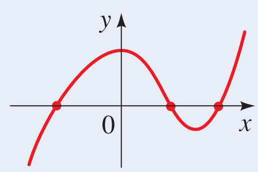
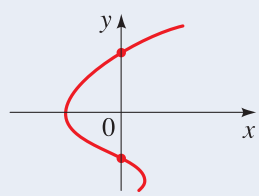
En la Figura 10 localizamos estos puntos y los usamos para trazar la gráfica de la ecuación.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 75

Puntos de intersección

Las coordenadas x de los puntos donde una gráfica interseca al eje x reciben el nombre de **puntos de intersección x** de la gráfica y se obtienen al hacer $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas y de los puntos donde una gráfica interseca al eje y se denominan **puntos de intersección y** de la gráfica y se obtienen al hacer $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

DEFINICIÓN DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

Puntos de intersección	Cómo hallarlos	En dónde están sobre la gráfica
Puntos de intersección x: Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje x	Haga $y = 0$ y despeje x	
Puntos de intersección y: Las coordenadas y de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje y	Haga $x = 0$ y despeje y	

EJEMPLO 7 | Hallar puntos de intersección

Encuentre los puntos de intersección x y y de la ecuación $y = x^2 - 2$.

SOLUCIÓN Para hallar los puntos de intersección x, hacemos $y = 0$ y despejamos x. Así,

$$0 = x^2 - 2 \qquad \text{Haga } y = 0$$

$$x^2 = 2 \qquad \text{Sume 2 a cada lado}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Los puntos de intersección x son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para hallar los puntos de intersección y, hacemos $x = 0$ y despejamos y. Así,

$$y = 0^2 - 2 \qquad \text{Haga } x = 0$$
$$y = -2$$

El punto de intersección y es -2.

La gráfica de esta ecuación se trazó en el Ejemplo 5. Se repite en la Figura 11 con los puntos de intersección x y y marcados.

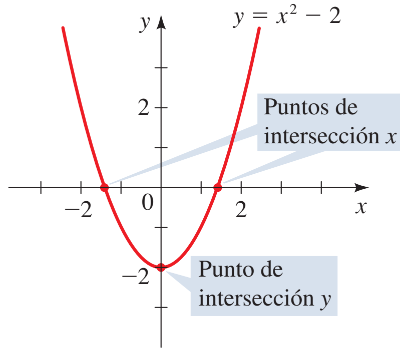


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

Circunferencias

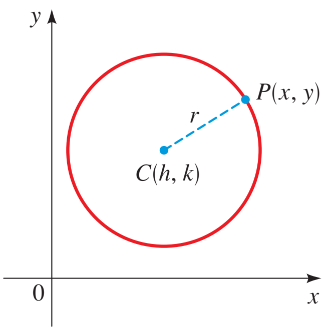


FIGURA 12

Hasta este punto, hemos estudiado cómo hallar la gráfica de una ecuación en x y y. El problema inverso es hallar una ecuación de una gráfica, es decir, una ecuación que represente una curva determinada en el plano xy. Esa ecuación queda satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre la curva y por ningún otro punto. Esto es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica formulado por Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada por una ecuación algebraica, entonces las reglas de álgebra se pueden usar para analizar la curva.

Como ejemplo de este tipo de problema, encontremos la ecuación de una circunferencia con radio r y centro (h, k). Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es r (vea Figura 12). Por lo tanto, P está sobre la circunferencia si y sólo si $d(P, C)= r$. De la fórmula para distancias tenemos

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada lado}$$

Ésta es la ecuación deseada.

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Una ecuación de la circunferencia con centro (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ésta se llama **forma ordinaria** para la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO 8 | Gráfica de una circunferencia

Grafique cada ecuación.

(a) $x^2 + y^2 = 25$ **(b)** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

SOLUCIÓN

(a) Reescribiendo la ecuación como $x^2 + y^2 = 5^2$, vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Su gráfica se ilustra en la Figura 13.

(b) Reescribiendo la ecuación como $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$, vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en $(2, -1)$. Su gráfica se ilustra en la Figura 14.

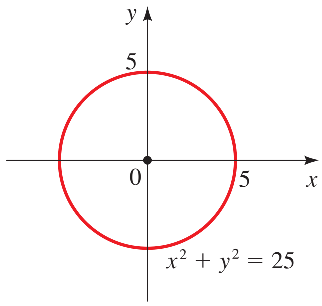


FIGURA 13

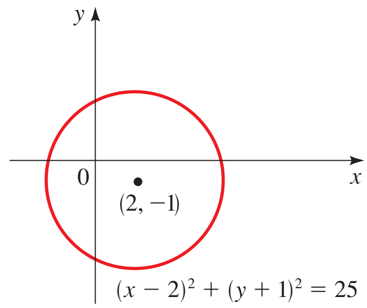


FIGURA 14

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **87** Y **89**

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una circunferencia

(a) Encuentre la ecuación de la circunferencia con radio 3 y centro $(2, -5)$.

(b) Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$ como los puntos extremos de un diámetro.

SOLUCIÓN

(a) Usando la ecuación de la circunferencia con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

La gráfica se muestra en la Figura 15.

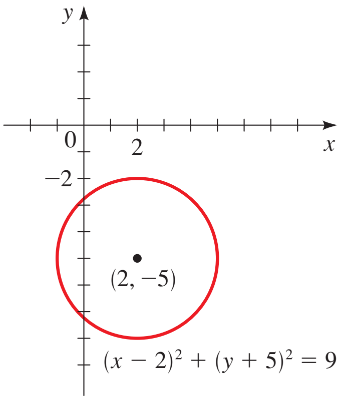


FIGURA 15

(b) Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro PQ, de modo que, por la Fórmula del Punto Medio, el centro es

$$\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{8 - 6}{2}\right) = (3, 1)$$

El radio r es la distancia de P al centro, y por la Fórmula para Distancias,

$$r^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$$

La gráfica se muestra en la Figura 16.

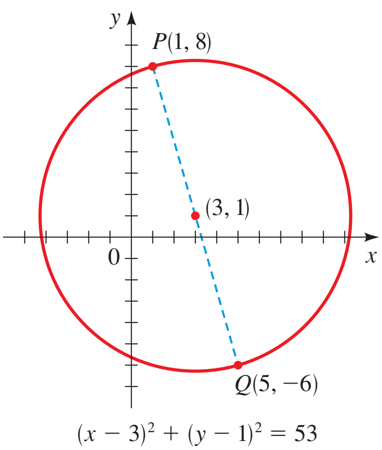


FIGURA 16

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **93** Y **97**

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo precedente.

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$	Forma ordinaria
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 53$	Desarrolle los cuadrados
$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 43$	Reste 10 para obtener forma desarrollada

Completar el cuadrado se usa en muchos contextos en álgebra. En la Sección 1.5 usamos completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas.

Suponga que nos dan la ecuación de una circunferencia en forma desarrollada. Entonces, para hallar su centro y radio, debemos regresar la ecuación a su forma ordinaria. Eso significa que debemos invertir los pasos del cálculo precedente y, para hacerlo, necesitamos saber qué sumar a una expresión como $x^2 - 6x$ para hacerla un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 | Identificar una ecuación de un círculo

Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ representa una circunferencia, y encuentre el centro y el radio.

SOLUCIÓN Primero agrupamos los términos en x y en y. A continuación completamos el cuadrado para $x^2 + 2y$ al sumar $\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = 1$, y completamos el cuadrado para $y^2 - 6y$ al sumar $\left[\frac{1}{2}\cdot(-6)\right]^2 = 9$.

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x \qquad) + (y^2 - 6y \qquad) &= -7 && \text{Agrupe términos}\\
(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) &= -7 + 1 + 9 && \text{Complete el cuadrado al sumar 1 y 9 a cada lado}\\
(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 3 && \text{Factorice y simplifique}
\end{aligned}
$$

Debemos agregar los mismos números a *cada lado* para mantener la igualdad.

Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, vemos que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada representa una circunferencia con centro $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **103**

Simetría

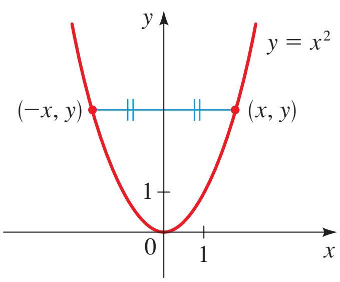
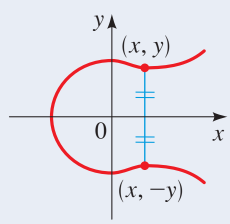
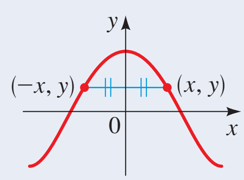
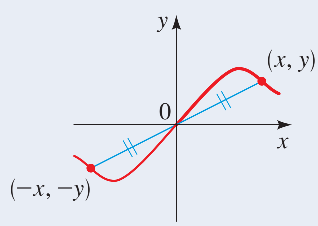


FIGURA 17

La Figura 17 muestra la gráfica de $y = x^2$. Nótese que la parte de la gráfica a la izquierda del eje y es la imagen espejo de la parte a la derecha del eje y. La razón es que si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces también está $(-x, y)$, y estos puntos son reflexiones uno del otro respecto del eje y. En esta situación decimos que la gráfica es **simétrica con res-**

DEFINICIÓN DE SIMETRÍA

Tipo de simetría	Cómo probar si hay simetría	Qué aspecto tiene la gráfica (figuras en esta sección)	Significado geométrico
Simetría con respecto al eje x	La ecuación no cambia cuando y es sustituida por $-y$	 (Figuras 13, 18)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje x
Simetría con respecto al eje y	La ecuación no cambia cuando x es sustituida por $-x$	 (Figuras 9, 10, 11, 13, 17)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje y
Simetría con respecto al origen	La ecuación no cambia cuando x es sustituida por $-x$ y y por $-y$	 (Figuras 13, 19)	La gráfica no cambia cuando gira 180° alrededor del origen

pecto al eje *y*. Del mismo modo, decimos que una gráfica es **simétrica con respecto al eje *x*** si siempre que el punto (x, y) esté en la gráfica, entonces también lo estará $(x, -y)$. Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si siempre que (x, y) esté en la gráfica, también lo estará $(-x, -y)$.

Los ejemplos restantes de esta sección muestran cómo la simetría nos ayuda a trazar las gráficas de ecuaciones.

EJEMPLO 11 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $x = y^2$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Si y es sustituida por $-y$ en la ecuación $x = y^2$, obtenemos

$$x = (-y)^2 \qquad \text{Sustituya } y \text{ por } -y$$

$$x = y^2 \qquad \text{Simplifique}$$

y por lo tanto la ecuación no cambió. En consecuencia, la gráfica es simétrica respecto al eje x. Pero cambiar x por $-x$ da la ecuación $-x = y^2$, que no es la misma que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica alrededor del eje y.

Usamos la simetría respecto al eje x para trazar la gráfica al localizar primeramente los puntos justo para $y > 0$ y a continuación reflejar la gráfica en el eje x, como se ve en la Figura 18.

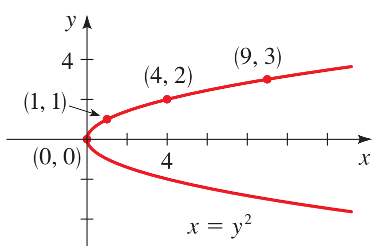


FIGURA 18

y	$x = y^2$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

EJEMPLO 12 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $y = x^3 - 9x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación, obtenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \qquad \text{Sustituya } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$

$$-y = -x^3 + 9x \qquad \text{Simplifique}$$

$$y = x^3 - 9x \qquad \text{Multiplique por } -1$$

y así la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La trazamos al localizar primero puntos para $x > 0$ y luego usando simetría alrededor del origen (vea Figura 19).

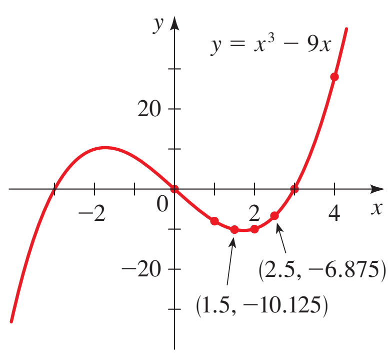


FIGURA 19

x	$y = x^3 - 9x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	−8	(1, −8)
1.5	−10.125	(1.5, −10.125)
2	−10	(2, −10)
2.5	−6.875	(2.5, −6.875)
3	0	(3, 0)
4	28	(4, 28)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

1.8 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El punto que está 3 unidades a la derecha del eje y y 5 unidades abajo del eje x tiene coordenadas (___, ___)

2. La distancia entre los puntos (a, b) y (c, d) es ________.
   Por lo tanto, la distancia entre $(1, 2)$ y $(7, 10)$ es ________.

3. El punto medio entre (a, b) y (c, d) es _________.
   Asi que el punto medio entre $(1, 2)$ y $(7, 10)$ es _________.

4. Si el punto $(2, 3)$ está sobre la gráfica de una ecuación con x y y, entonces la ecuación se satisface cuando sustituimos x por _____ y y por _____. ¿El punto $(2, 3)$ está sobre la gráfica de la ecuación $2y = x + 1$?

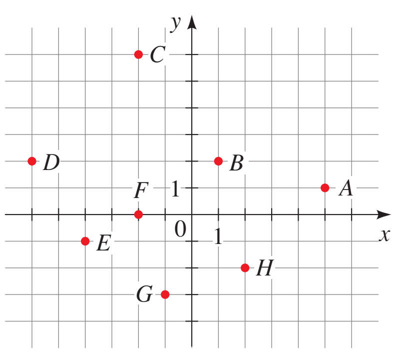
5. **(a)** Para hallar el (los) punto(s) de intersección x de la gráfica de una ecuación, igualamos ____a 0 y despejamos ______. Entonces, el punto de intersección x de $2y = x + 1$ es______.
   (b) Para hallar el (los) punto(s) de intersección y de la gráfica de una ecuación, igualamos ____a 0 y despejamos ____. Entonces, el punto de intersección y de $2y = x + 1$ es____.

6. La gráfica de la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ es una circunferencia con centro (___, ___) y radio _____.

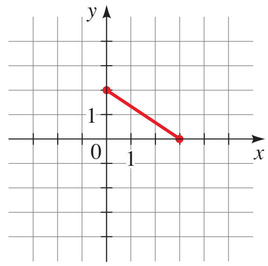
HABILIDADES

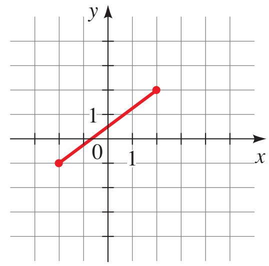
7. Localice los puntos dados en un plano de coordenadas.
   $(2, 3), (-2, 3), (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$

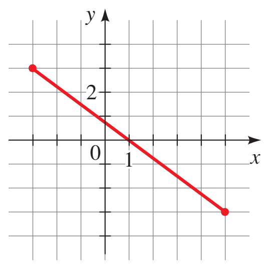
8. Encuentre las coordenadas de los puntos mostrados en la figura.

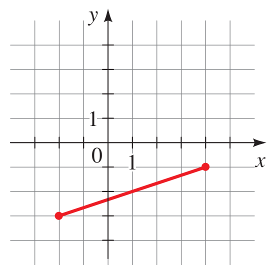


9-12 ■ Se grafica un par de puntos.
(a) Encuentre la distancia entre ellos.
(b) Encuentre el punto medio del segmento que los une.

9.


10.


11.


12.


13-18 ■ Se grafica un par de puntos.
(a) Localice los puntos en un plano de coordenadas.
(b) Encuentre la distancia entre ellos.
(c) Encuentre el punto medio del segmento que los une.

13. $(0, 8), (6, 16)$
14. $(-2, 5), (10, 0)$
15. $(-3, -6), (4, 18)$
16. $(-1, -1), (9, 9)$
17. $(6, -2), (-6, 2)$
18. $(0, -6), (5, 0)$
19. Trace el rectángulo con vértices $A(1, 3)$, $B(5, 3)$, $C(1, -3)$ y $D(5, -3)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del rectángulo.
20. Trace el paralelogramo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$ y $D(7, 6)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del paralelogramo.
21. Encuentre los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos AB, BC, CD y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$ y cuál es su área?
22. Determine los puntos $P(5, 1)$, $Q(0, 6)$ y $R(-5, 1)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto S para que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Encuentre el área de este cuadrado.

23–32 ■ Trace la región dada por el conjunto.

23. $\{(x, y) \mid x \geq 3\}$
24. $\{(x, y) \mid y < 3\}$
25. $\{(x, y) \mid y = 2\}$
26. $\{(x, y) \mid x = -1\}$
27. $\{(x, y) \mid 1 < x < 2\}$
28. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$
29. $\{(x, y) \mid |x| > 4\}$
30. $\{(x, y) \mid |y| \leq 2\}$
31. $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$
32. $\{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } |y| \leq 3\}$

33. ¿Cuál de los puntos $A(6, 7)$ o $B(-5, 8)$ está más cercano al origen?

34. ¿Cuál de los puntos $C(-6, 3)$ o $D(3, 0)$ está más cercano al punto $E(-2, 1)$?

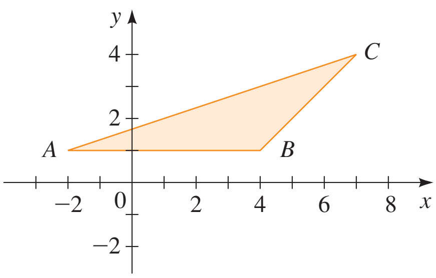
35. ¿Cuál de los puntos $P(3, 1)$ o $Q(-1, 3)$ está más cercano al punto $R(-1, -1)$?

36. **(a)** Demuestre que los puntos $(7, 3)$ y $(3, 7)$ están a la misma distancia del origen.

(b) Demuestre que los puntos (a, b) y (b, a) están a la misma distancia del origen.

37. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

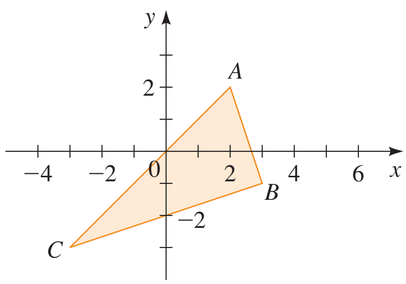
38. Encuentre el área del triángulo que se ve en la figura.



39. Consulte el triángulo ABC de la figura siguiente.

(a) Demuestre que el triángulo ABC es rectángulo, usando para ello el inverso del Teorema de Pitágoras (vea página 219).

(b) Encuentre el área del triángulo ABC.



40. Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es rectángulo, usando el inverso del Teorema de Pitágoras. Encuentre el área del triángulo.

41. Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

42. Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales, demostrando para ello que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

43. Encuentre el punto sobre el eje y que es equidistante de los puntos $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

44. Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una *mediana* es un segmento de recta que va del vértice al punto medio del lado opuesto.)

45. Localice los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto S de modo que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo?

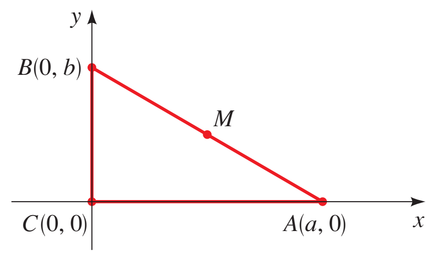
46. Si $M(6, 8)$ es el punto medio del segmento de recta AB y si A tiene coordenadas $(2, 3)$, encuentre las coordenadas de B.

47. **(a)** Trace el paralelogramo con vértices $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(1, 4)$.

(b) Encuentre los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

(c) De la parte (b) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

48. El punto M en la figura siguiente es el punto medio del segmento de recta AB. Demuestre que M es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



49-52 ■ Determine si los puntos dados están sobre la gráfica de la ecuación.

49. $x - 2y - 1 = 0$; $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

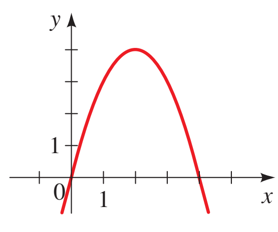
50. $y(x^2 + 1) = 1$; $(1, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

51. $x^2 + xy + y^2 = 4$; $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

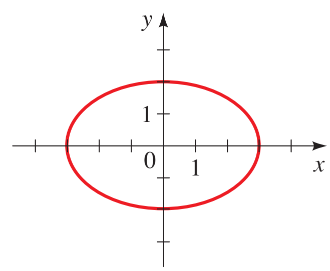
52. $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

53-56 ■ Se da una ecuación y su gráfica. Encuentre los puntos de intersección x y y.

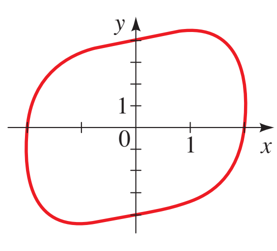
53. $y = 4x - x^2$



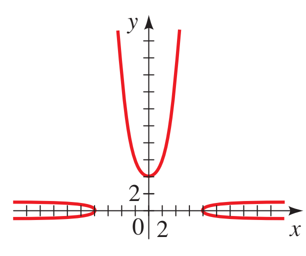
54. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



55. $x^4 + y^2 - xy = 16$



56. $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$



57-76 ■ Haga una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Encuentre los puntos de intersección x y y y pruebe si hay simetría.

57. $y = -x + 4$ **58.** $y = 3x + 3$

59. $2x - y = 6$ **60.** $x + y = 3$

61. $y = 1 - x^2$ **62.** $y = x^2 + 2$

63. $4y = x^2$ **64.** $8y = x^3$

65. $y = x^2 - 9$ **66.** $y = 9 - x^2$

67. $xy = 2$ **68.** $y = \sqrt{x + 4}$

69. $y = \sqrt{4 - x^2}$ **70.** $y = -\sqrt{4 - x^2}$

71. $x + y^2 = 4$ **72.** $x = y^3$

73. $y = 16 - x^4$ **74.** $x = |y|$

75. $y = 4 - |x|$ **76.** $y = |4 - x|$

77-82 ■ Pruebe si hay simetría en cada ecuación.

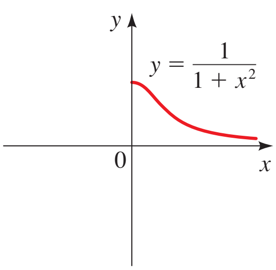
77. $y = x^4 + x^2$ **78.** $x = y^4 - y^2$

79. $x^2y^2 + xy = 1$ **80.** $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

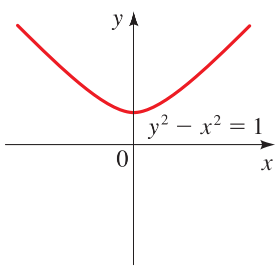
81. $y = x^3 + 10x$ **82.** $y = x^2 + |x|$

83-86 ■ Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

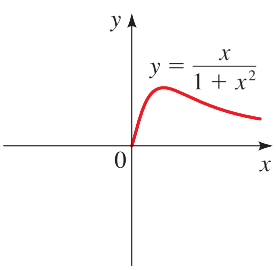
83. Simétrica con respecto al eje y.



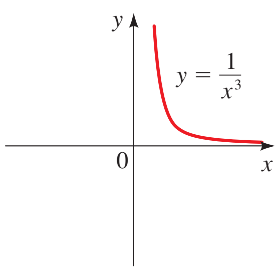
84. Simétrica con respecto al eje x.



85. Simétrica con respecto al origen.



86. Simétrica con respecto al origen.



87-92 ■ Encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

87. $x^2 + y^2 = 9$ **88.** $x^2 + y^2 = 5$

89. $(x - 3)^2 + y^2 = 16$ **90.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

91. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ **92.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$

93-100 ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

93. Centro $(2, -1)$; radio 3

94. Centro $(-1, -4)$; radio 8

95. Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

96. Centro $(-1, 5)$; pasa por $(-4, -6)$

97. Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 1)$ y $Q(5, 9)$

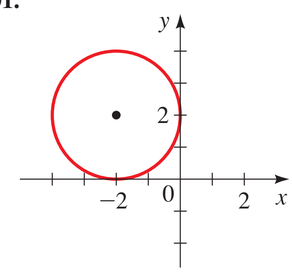
98. Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 3)$ y $Q(7, -5)$

99. Centro $(7, -3)$; tangente al eje x

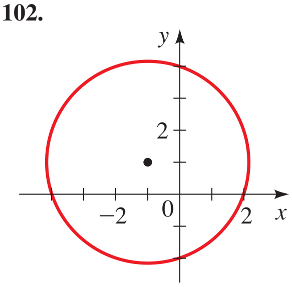
100. La circunferencia está en el primer cuadrante, tangente a los ejes x y y; radio 5

101–102 ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia de la figura.

101.



102.



103–108 ■ Demuestre que la ecuación representa una circunferencia, y encuentre el centro y radio.

103. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

104. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

105. $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

106. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

107. $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

108. $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

109–110 ■ Trace la región dada por el conjunto.

109. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

110. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

111. Encuentre el área de la región que está fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

112. Trace la región del plano coordenado que satisface las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 9$ y $y \geq |x|$. ¿Cuál es el área de esta región?

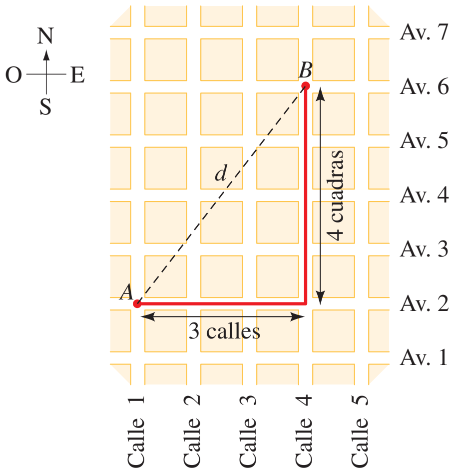
APLICACIONES

113. Distancias en una ciudad Una ciudad tiene calles que corren de norte a sur y avenidas que corren de oriente a poniente, todas igualmente espaciadas. Calles y avenidas están numeradas en forma secuencial, como se ve en la figura siguiente. La distancia *a pie* entre los puntos A y B es de 7 manzanas, es decir, 3 manzanas al oriente y 4 manzanas al norte. Para hallar la distancia d *en línea recta*, debemos usar la Fórmula para Distancias.

(a) Encuentre la distancia en línea recta (en manzanas) entre A y B.

(b) Encuentre la distancia a pie y la distancia en línea recta entre la esquina de la Calle 4 y la Avenida 2, y la esquina de la Calle 11 y la Avenida 26.

(c) ¿Qué debe ser cierto en relación con los puntos P y Q si la distancia a pie entre P y Q es igual a la distancia en línea recta entre P y Q?



114. Punto medio Dos amigos viven en la ciudad descrita en el Ejercicio 113, uno en la esquina de la Calle 3 y la Avenida 7, el otro en la esquina de la Calle 27 y la Avenida 17. Con frecuencia se ven en una cafetería que está a la mitad de distancia entre sus casas.

(a) ¿En cuál crucero está ubicada la cafetería?

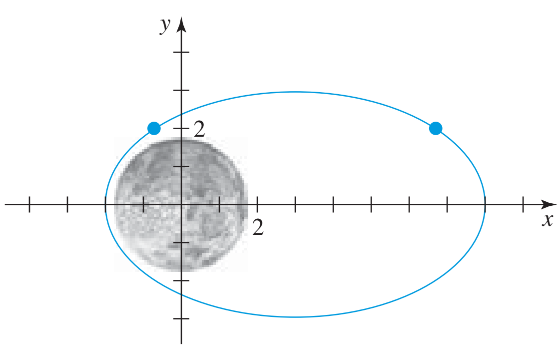
(b) ¿Cuánto debe caminar cada uno para llegar a la cafetería?

115. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Se elabora un plano de coordenadas que contiene la órbita, con el centro de la Luna en el origen como se muestra en la gráfica, con distancias medidas en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) De la gráfica, determine el punto más cercano y el más lejano que el satélite llega al centro de la Luna.

(b) Hay dos puntos en la órbita con coordenadas y 2. Encuentre las coordenadas x de estos puntos y determine sus distancias al centro de la Luna.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

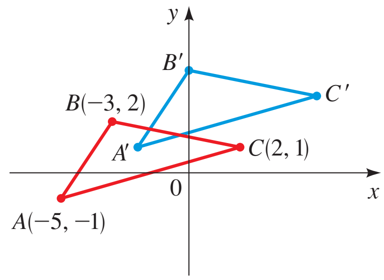
116. Desplazar el plano de coordenadas Suponga que cada uno de los puntos del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

(a) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto (5, 3)?

(b) ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto (a, b)?

(c) ¿Cuál punto se desplaza a (3, 4)?

(d) El triángulo ABC de la figura ha sido desplazado al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



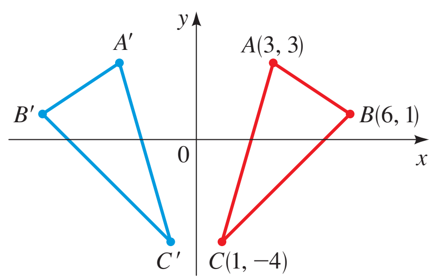
117. Reflejo en el plano de coordenadas Suponga que el eje y actúa como espejo que refleja cada punto a la derecha del mismo hacia un punto a su izquierda.

(a) ¿A qué punto se refleja el punto (3, 7)?

(b) ¿A qué punto se refleja el punto (a, b)?

(c) ¿Cuál punto se refleja al $(-4, -1)$?

(d) El triángulo ABC de la figura se refleja al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



118. Completar el segmento de recta Localice los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Si M es el punto medio del segmento de recta AB, encuentre las coordenadas de B. Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar B, así como sus razones para tomarlos.

119. Completar un paralelogramo Localice los puntos $P(0, 3)$, $Q(2, 2)$ y $R(5, 3)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo? Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar B, así como sus razones para tomarlos.

120. ¿Circunferencia, punto o conjunto vacío? Complete los cuadrados en la ecuación general $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ y simplifique el resultado cuanto sea posible. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación representa una circunferencia en los coeficientes a, b y c? ¿Un solo punto? ¿El conjunto vacío? En el caso en que la ecuación represente una circunferencia, encuentre su centro y radio.

121. ¿Las circunferencias se intersecan?

(a) Encuentre el radio de cada circunferencia del par y la distancia entre sus centros; a continuación use esta información para determinar si las circunferencias se intersecan.

(i) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9;$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4;$
$(x - 5)^2 + (y - 14)^2 = 9$

(iii) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1;$
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$

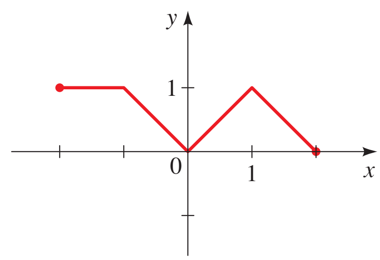
(b) ¿Cómo se puede averiguar, con sólo saber los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, si las circunferencias se intersectan? Escriba un breve párrafo que describa cómo se determina esto y trace gráficas para ilustrar su respuesta.

122. Hacer una gráfica simétrica La gráfica que se muestra en la figura no es simétrica alrededor del eje x, el eje y o el origen. Agregue más segmentos de recta a la gráfica para que muestre la simetría indicada. En cada caso, agregue tan poco como sea posible.

(a) Simetría alrededor del eje x

(b) Simetría alrededor del eje y

(c) Simetría alrededor del origen



1.9 CALCULADORAS GRAFICADORAS; RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Uso de una calculadora graficadora ▶ Resolver ecuaciones gráficamente ▶ Resolver desigualdades gráficamente

En las Secciones 1.5 y 1.7 resolvimos ecuaciones y desigualdades algebraicamente. En la Sección 1.8 aprendimos a trazar la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas. En esta sección usamos gráficas para resolver ecuaciones y desigualdades. Para hacer esto, debemos primero trazar una gráfica usando una calculadora graficadora. Por lo tanto empezamos por dar unas pocas guías para ayudarnos a usar con eficiencia una calculadora graficadora.

▼ Uso de una calculadora graficadora

Una calculadora graficadora o computadora exhibe una parte rectangular de la gráfica en una pantalla que llamamos **rectángulo de vista**. Es frecuente que la pantalla predeterminada dé una imagen incompleta o confusa, de modo que es importante escoger cuidadosamente un rectángulo de vista. Si escogemos que los valores x varíen de un valor mínimo de `Xmin` $= a$ a un valor máximo de `Xmax` $= b$ y los valores y varían de un valor mínimo de `Ymin` $= c$ a un valor máximo de `Ymax` $= d$, entonces la parte exhibida de la gráfica está en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

como se muestra en la Figura 1. Nos referimos a éste como el rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$.

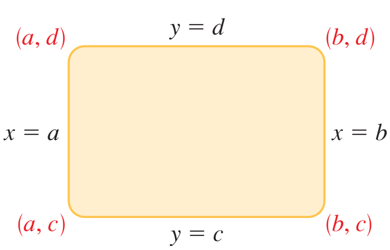


FIGURA 1 Rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$

La calculadora graficadora traza la gráfica de una ecuación en una forma muy semejante a como lo haríamos nosotros. Determina los puntos de la forma (x, y) para cierto número de valores de x, espaciados igualmente entre a y b. Si la ecuación no está definida para un valor x o si el valor y correspondiente está fuera del rectángulo de vista, la calculadora ignora este valor y continúa con el siguiente valor x. La máquina conecta cada punto al punto localizado precedente para formar una representación de la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 1 | Escoger un rectángulo de vista apropiado

Grafique la ecuación $y = x^2 + 3$ en un rectángulo de vista apropiado.