1.4 EXPRESIONES RACIONALES

Dominio de una expresión algebraica ▶ Simplificación de expresiones racionales ▶ Multiplicación y división de expresiones racionales ▶ Suma y resta de expresiones racionales ▶ Fracciones compuestas ▶ Racionalización del denominador o el numerador ▶ Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria.** A continuación veamos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección aprendemos a ejecutar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

▼ Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

(a) $2x^2 + 3x - 1$ **(b)** $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ **(c)** $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

SOLUCIÓN

(a) Este polinomio está definido para toda x. Entonces, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

(b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$

Como el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

(c) Para que el numerador esté definido, debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$ para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} && \text{Factorice} \\ &= \frac{x + 1}{x + 2} && \text{Cancele factores comunes} \end{aligned}$$

No podemos cancelar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque x^2 no es un factor.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} &= \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} && \text{Factorice} \\ &= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} && \text{Propiedad de fracciones} \\ &= \frac{3(x + 3)}{x + 4} && \text{Cancele factores comunes} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} \qquad \text{Invierta y multiplique}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Evite hacer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{Error!}$$

Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la Sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ **(b)** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Escriba fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Sume fracciones}$$

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Combine los términos del numerador}$$

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} && \text{Factorice}\\
&= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine fracciones usando el MCD}\\
&= \frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Propiedad Distributiva}\\
&= \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine los términos del numerador}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **45**

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} &= \frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x}{x-y}\\
&= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}
\end{aligned}$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cortesía de NASA

Códigos para corregir errores

Las imágenes enviadas por la nave *Pathfinder (Explorador)* desde la superficie de Marte el 4 de julio de 1997, eran asombrosamente claras. Pero pocas personas que vieron estas imágenes estaban conscientes de las complejas matemáticas utilizadas para lograr esta hazaña. La distancia a Marte es enorme, y el ruido de fondo (o estática) es muchas veces más fuerte que la señal original emitida por la nave espacial. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, está llena de errores. Para obtener una imagen clara, los errores deben hallarse y corregirse. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria en la transmisión de registros bancarios cuando una persona usa un cajero automático o de voz cuando habla por teléfono.

Para entender la forma en que los errores se localizan y corrigen, primero debemos entender que para transmitir imágenes o texto los transformamos en bits (los dígitos 0 o 1; vea página 30). Para ayudar al receptor a reconocer errores, el mensaje se "codifica" al insertar bits adicionales. Por ejemplo, suponga que usted desea transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es como sigue: envía cada dígito un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si el primer bloque es principalmente de números 1, concluye que es probable que usted esté tratando de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es eficiente es un poco modesto; requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. Otro método inserta "dígitos de comprobación". Por ejemplo, cada bloque de ocho dígitos inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay un número par de números 1 en el bloque y 1 si hay un número impar. Por lo tanto, si un solo dígito está mal (un 0 cambiado a un 1, o viceversa), los dígitos de prueba nos permiten reconocer que ha ocurrido un error. Este método no nos dice dónde está el error, de modo que no podemos corregirlo. Los modernos códigos que corrigen errores usan interesantes algoritmos matemáticos que requieren insertar relativamente pocos dígitos pero permiten al receptor no sólo reconocer errores, sino también corregirlos. El primer código corrector de errores fue inventado en la década de 1940 por Richard Hamming en el MIT. Es interesante observar que el idioma inglés tiene un mecanismo corrector de errores ya integrado; para probarlo, trate de leer esta oración cargada de errores: Gve mo libty ox biv ne deth.

SOLUCIÓN 2 Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y denominador. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy} \qquad \text{Multiplique numerador y denominador por } xy$$

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)} \qquad \text{Factorice}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **59** Y **61**

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones en cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \qquad \text{Combine fracciones del numerador}$$

$$= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)}$$

$$= \frac{a-a-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-1}{a(a+h)} \qquad \text{Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Factorice la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño*, en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

SOLUCIÓN 2 Como $(1 + x^2)^{-1/2} = 1/(1 + x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar numerador y denominador por $(1 + x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

Racionalización del denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador al multiplicar numerador y denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto funciona bien, por la fórmula 1 de productos notables de la Sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador: $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de $1 + \sqrt{2}$, que es $1 - \sqrt{2}$.

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado $\sqrt{4 + h} + 2$.

$$\frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4 + h} + 2}{\sqrt{4 + h} + 2}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

$$= \frac{(\sqrt{4 + h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4 + h} + 2)}$$ Fórmula 1 de Productos Notables

$$= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

Evitar errores comunes

No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \cancel{=} a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \cancel{=} \dfrac{1}{a + b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a + b}{a} \cancel{=} b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \cancel{=} (a + b)^{-1}$

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

mientras que el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Como $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación indicada está en error. Del mismo modo, el lector debe convencerse del error en cada una de las otras ecuaciones. (Vea Ejercicio 105.)

1.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. De lo siguiente, ¿cuáles son expresiones racionales?

(a) $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{2x + 3}$ **(c)** $\dfrac{x(x^2 - 1)}{x + 3}$

2. Para simplificar una expresión racional, cancelamos *factores* que son comunes al ______ y ______. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)}$$

se simplifica a ________.

3. Para multiplicar dos expresiones racionales, multiplicamos sus ________ y multiplicamos sus ________. Por tanto, $\dfrac{2}{x + 1} \cdot \dfrac{x}{x + 3}$ es lo mismo que ________.

4. Considere la expresión $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

(a) ¿Cuántos términos tiene esta expresión?
(b) Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.
(c) Ejecute la adición y simplifique.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre el dominio de la expresión.

5. $4x^2 - 10x + 3$ **6.** $-x^4 + x^3 + 9x$

7. $\dfrac{2x + 1}{x - 4}$ **8.** $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

9. $\sqrt{x + 3}$ **10.** $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

11. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$ **12.** $\dfrac{\sqrt{2x}}{x + 1}$

13-22 ■ Simplifique la expresión racional.

13. $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$

14. $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

15. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

16. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

17. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$

18. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

19. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$

20. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$

21. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$

22. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

23-38 ■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

23. $\dfrac{4x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{16x}$

24. $\dfrac{x^2-25}{x^2-16}\cdot\dfrac{x+4}{x+5}$

25. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x-5}$

26. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$

27. $\dfrac{t-3}{t^2+9}\cdot\dfrac{t+3}{t^2-9}$

28. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

29. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

30. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

31. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}\div\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$

32. $\dfrac{2x+1}{2x^2+x-15}\div\dfrac{6x^2-x-2}{x+3}$

33. $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15}\div\dfrac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$

34. $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

35. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$

36. $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

37. $\dfrac{x/y}{z}$

38. $\dfrac{x}{y/z}$

39-58 ■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

39. $2+\dfrac{x}{x+3}$

40. $\dfrac{2x-1}{x+4}-1$

41. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

42. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

43. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

44. $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

45. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

46. $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

47. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

48. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

49. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$

50. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

51. $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$

52. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

53. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

54. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

55. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

56. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

57. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

58. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

59-68 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

59. $\dfrac{x+\dfrac{1}{x+2}}{x-\dfrac{1}{x+2}}$

60. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

61. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}}{x+2}$

62. $\dfrac{\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}}{x+3}$

63. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

64. $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

65. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

66. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

67. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

68. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

69-74 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

69. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x+h}-\dfrac{1}{1+x}}{h}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

71. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

72. $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-(x^3-7x)}{h}$

73. $\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

74. $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

75-80 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del cociente".)

75. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2-(x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

76. $\dfrac{2x(x+6)^4-x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

77. $\dfrac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

78. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

79. $\dfrac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

80. $\dfrac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

81-86 ■ Racionalice el denominador.

81. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

82. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

83. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

84. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

85. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

86. $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

87-92 ■ Racionalice el numerador.

87. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

88. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

89. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$

90. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

91. $\sqrt{x^2+1} - x$

92. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

93-100 ■ Diga si la ecuación dada es verdadera para todos los valores de las variables. (No considere ningún valor que haga que el denominador sea cero.)

93. $\dfrac{16+a}{16} = 1 + \dfrac{a}{16}$

94. $\dfrac{b}{b-c} = 1 - \dfrac{b}{c}$

95. $\dfrac{2}{4+x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}$

96. $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x}{y}$

97. $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{1+y}$

98. $2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{2a}{2b}$

99. $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

100. $\dfrac{1+x+x^2}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + x$

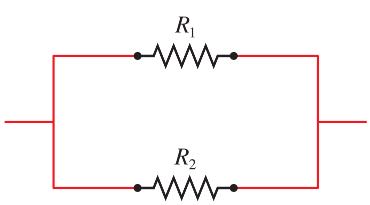
APLICACIONES

101. **Resistencia eléctrica** Si dos resistores eléctricos con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (vea la figura), entonces la resistencia total R está dada por

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

(a) Simplifique R de la expresión.

(b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia R total?



102. **Costo promedio** Un fabricante de ropa encuentra que el costo de producir x camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

(a) Explique por qué el costo promedio por camisa está dado por la expresión racional

$$A = \frac{500 + 6x + 0.01x^2}{x}$$

(b) Complete la tabla al calcular el costo promedio por camisa para los valores dados de x.

x	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1000	

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

103. **Comportamiento límite de una expresión racional** La expresión racional

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas y determine a cuál valor se aproxima la expresión cuando x se acerca más y más a 3. ¿Por qué es esto razonable? Factorice el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

104. **¿Es esto racionalización?** En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Esto es lo mismo que racionalizar el denominador?

105. **Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, dé un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \cancel{=} \dfrac{1}{a+b}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \cancel{=} a^2+b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \cancel{=} a+b$	
$\dfrac{a+b}{a} \cancel{=} b$	
$(a^3+b^3)^{1/3} \cancel{=} a+b$	
$a^m/a^n \cancel{=} a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \cancel{=} \dfrac{1}{a^n}$	

106. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su "forma" siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2+\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1+x)\left(1+\frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para A y B, la primera tiene la forma $A+B$, la segunda AB, la tercera A/B y la cuarta $A^{1/2}$. Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $x+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ **(b)** $(1+x^2)(1+x)^3$

(c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ **(d)** $\dfrac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 ECUACIONES

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3+5=8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x+7=19$$

$x=3$ es una solución de la ecuación $4x+7=19$, porque sustituir $x=3$ hace verdadera la ecuación:

$x=3$

$4(3)+7=19$ ✔

la letra x es la variable. Consideramos x como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A=B \quad \Leftrightarrow \quad A+C=B+C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A=B \quad \Leftrightarrow \quad CA=CB \quad (C\neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.