DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

80. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

(a) $-a$ **(b)** $-b$ **(c)** bc

(d) $a - b$ **(e)** $c - a$ **(f)** $a + bc$

(g) $ab + ac$ **(h)** $-abc$ **(i)** ab^2

81. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

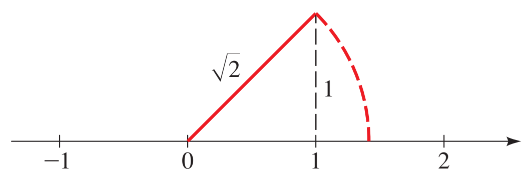
82. Combinación de números racionales con números irracionales ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

83. Limitación del comportamiento de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x crece? ¿Y cuando x disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

84. Números irracionales y geometría Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.



85. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿La sustracción es conmutativa?

(b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ▶ Reglas para trabajar con exponentes ▶ Notación científica ▶ Radicales ▶ Exponentes racionales ▶ Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n.

▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

EJEMPLO 1 | Notación exponencial

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

(b) $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$

(c) $-3^4 = -(3\cdot3\cdot3\cdot3) = -81$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2:

$$5^4\cdot5^2 = \underbrace{(5\cdot5\cdot5\cdot5)}_{\text{4 factores}}\underbrace{(5\cdot5)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}_{\text{6 factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes.* En general, para cualquier número real a y cualesquier enteros positivos m y n, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{m\text{ factores}}\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{ factores}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m+n\text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando m y n fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0\cdot2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4\cdot5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 2 | Exponentes cero y negativos

(a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

(b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

(c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

Reglas para trabajar con exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3 Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$(a^m)^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}$$

Los casos para los que $m \le 0$ o $n \le 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4 Si n es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las Propiedades Conmutativa y Asociativa. Si $n \le 0$, la Ley 4 se puede demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar las Leyes 2 y 5.

EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

(a) $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(d) $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

(e) $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$

(f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35, 37** Y **39** ■

EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

(a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n\\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3}\\ &= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47** ■

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7 Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$ ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar la Ley 6.

EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

(a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Aun cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, describiremos con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

t^{-4} pasa al denominador y se convierte en t^4

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

s^{-2} pasa al numerador y se convierte en s^2

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

(b) Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la *derecha:*

$$4 \times 10^{13} = 40{,}000{,}000{,}000{,}000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda:*

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

EJEMPLO 6 | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

(a) 56,920 **(b)** 0.000093

SOLUCIÓN

(a) $\underbrace{56{,}920}_{\text{4 lugares}} = 5.692 \times 10^4$ **(b)** $0.\underbrace{000093}_{\text{5 lugares}} = 9.3 \times 10^{-5}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79** ■

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada EE o EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, ingresamos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12 o 1.23468 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

EJEMPLO 7 | Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use calculadora para aproximar el cociente ab/c.

SOLUCIÓN Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36} \end{aligned}$$

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

En el Apéndice *Cálculo de cifras significativas* vea guías para trabajar con cifras significativas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **83** Y **85** ■

▼ Radicales

Sabemos lo que 2^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz positiva de". Entonces

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0}$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n. La raíz n de x es el número que, cuando se eleva a la n potencia, dará x.

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ *n*

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz *n* principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que } b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces n se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

PROPIEDADES DE RAÍCES *n*

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \|-3\| = 3$

EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces *n*

(a)
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^4} &= \sqrt[3]{x^3 x} && \text{Factorice el cubo más grande} \\ &= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \\ &= x\sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c} \\ &= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a| \\ &= 3x^2|y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|,\ |x^2| = x^2 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

(a) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ Propiedad Distributiva

(b) Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ Propiedad Distributiva

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz n,

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales.*

EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$ **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

DIOFANTO Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra donde da métodos para hallar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (vea página 99) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora, fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma} \alpha \varsigma \eta \pitchfork \Delta^{\gamma} \zeta \mathring{M} \varepsilon \iota^{\sigma} \kappa \delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ — Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c)
$$\begin{aligned}(2a^3b^4)^{3/2} &= 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2} && \text{Ley 4: } (abc)^n = a^n b^n c^n\\ &= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)} && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\frac{y^4}{x^{-1/2}}\right) &= \frac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2}) && \text{Leyes 5, 4 y 7}\\ &= \frac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2} && \text{Ley 3}\\ &= 8x^{11/4}y^3 && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63, 67** Y **69**

EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a)
$$\begin{aligned}(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) &= (2x^{1/2})(3x^{1/3}) && \text{Definición de exponentes racionales}\\ &= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6} && \text{Ley 1}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt{x\sqrt{x}} &= (xx^{1/2})^{1/2} && \text{Definición de exponentes racionales}\\ &= (x^{3/2})^{1/2} && \text{Ley 1}\\ &= x^{3/4} && \text{Ley 3}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **71** Y **75**

Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

(c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **89** Y **91**

1.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir el producto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ como ______.
   (b) En la expresión 3^4, el número 3 se denomina______, y el número 4 se llama______.

2. **(a)** Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $3^4 \cdot 3^5 =$ ______.
   (b) Cuando dividimos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $\dfrac{3^5}{3^2} =$ ______.

3. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir $\sqrt[3]{5}$ como ______.
   (b) Usando radicales, podemos escribir $5^{1/2}$ como ______.
   (c) ¿Hay diferencia entre $\sqrt{5^2}$ y $(\sqrt{5})^2$? Explique.

4. Explique qué significa $4^{3/2}$ y, a continuación, calcule $4^{3/2}$ en dos formas diferentes:

$(4^{1/2})^{\square} =$ ________ o $(4^3)^{\square} =$ ________

5. Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

6. Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo: $5^{1/3} \cdot 5^{\square} = 5$.

HABILIDADES

7-14 ■ Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

	Expresión radical	Expresión exponencial
7.	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
8.	$\sqrt[3]{7^2}$	
9.		$4^{2/3}$
10.		$11^{-3/2}$
11.	$\sqrt[5]{5^3}$	
12.		$2^{-1.5}$
13.		$a^{2/5}$
14.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$	

15-24 ■ Evalúe cada expresión.

15. **(a)** -3^2 **(b)** $(-3)^2$ **(c)** $(\frac{1}{3})^4(-3)^2$

16. **(a)** $5^4 \cdot 5^{-2}$ **(b)** $\dfrac{10^7}{10^4}$ **(c)** $\dfrac{3}{3^{-2}}$

17. **(a)** $(\frac{5}{3})^0 2^{-1}$ **(b)** $\dfrac{2^{-3}}{3^0}$ **(c)** $(\frac{1}{4})^{-2}$

18. **(a)** $(-\frac{2}{3})^{-3}$ **(b)** $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ **(c)** $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$

19. **(a)** $\sqrt{16}$ **(b)** $\sqrt[4]{16}$ **(c)** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

20. **(a)** $\sqrt{64}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64}$ **(c)** $\sqrt[5]{-32}$

21. **(a)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **(b)** $\sqrt[4]{256}$ **(c)** $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

22. **(a)** $\sqrt{7}\sqrt{28}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

23. **(a)** $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ **(b)** $(-32)^{2/5}$ **(c)** $-32^{2/5}$

24. **(a)** $1024^{-0.1}$ **(b)** $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ **(c)** $(\frac{25}{64})^{-3/2}$

25-28 ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

25. $\sqrt{x^2 + y^2}$ **26.** $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$

27. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$ **28.** $(xy)^{2z}$

29-34 ■ Simplifique la expresión.

29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ **30.** $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$ **32.** $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$ **34.** $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$

35-40 ■ Simplifique cada expresión.

35. **(a)** x^8x^2 **(b)** $(3y^2)(4y^5)$ **(c)** x^2x^{-6}

36. **(a)** $x^{-5}x^3$ **(b)** $w^{-2}w^{-4}w^6$ **(c)** $z^5z^{-3}z^{-4}$

37. **(a)** $\dfrac{y^{10}y^0}{y^7}$ **(b)** $\dfrac{x^6}{x^{10}}$ **(c)** $\dfrac{a^9a^{-2}}{a}$

38. **(a)** $\dfrac{z^2z^4}{z^3z^{-1}}$ **(b)** $(2y^2)^3$ **(c)** $(8x)^2$

39. **(a)** $(a^2a^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{a^2}{4}\right)^3$ **(c)** $(3z)^2(6z^2)^{-3}$

40. **(a)** $(2z^2)^{-5}z^{10}$ **(b)** $(2a^3a^2)^4$ **(c)** $\left(\dfrac{3x^4}{4x^2}\right)^2$

41-52 ■ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente(s) negativo(s).

41. **(a)** $(4x^2y^4)(2x^5y)$ **(b)** $(8a^2z)(\frac{1}{2}a^3z^4)$

42. **(a)** $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-5})$ **(b)** $(2s^3t^{-2})(\frac{1}{4}s^7t)(16t^4)$

43. **(a)** $(5x^2y^3)(3x^2y^5)^4$ **(b)** $(2a^3b^2)^2(5a^2b^5)^3$

44. **(a)** $(s^{-2}t^2)^2(s^2t)^3$ **(b)** $(2u^2v^3)^3(3u^{-3}v)^2$

45. **(a)** $\dfrac{6y^3z}{2yz^2}$ **(b)** $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^2y^2z)^3}$

46. **(a)** $\dfrac{2x^3y^4}{x^5y^3}$ **(b)** $\dfrac{(2v^3w)^2}{v^3w^2}$

47. **(a)** $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^5\left(\dfrac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ **(b)** $\dfrac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

48. **(a)** $\left(\dfrac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\dfrac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ **(b)** $\dfrac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

49. **(a)** $\dfrac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

50. **(a)** $\dfrac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

51. **(a)** $\left(\dfrac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ **(b)** $\left(\dfrac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

52. **(a)** $\left(\dfrac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)$ **(b)** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

53-60 ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras denotan cualesquier números reales.

53. $\sqrt[4]{x^4}$ **54.** $\sqrt[5]{x^{10}}$

55. $\sqrt[4]{16x^8}$ **56.** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

57. $\sqrt[6]{64a^6b^7}$ **58.** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

59. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ **60.** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

61-70 ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

61. **(a)** $x^{3/4}x^{5/4}$ **(b)** $y^{2/3}y^{4/3}$

62. **(a)** $(4b)^{1/2}(8b^{1/4})$ **(b)** $(3a^{3/4})^2(5a^{1/2})$

63. **(a)** $\dfrac{w^{4/3}w^{2/3}}{w^{1/3}}$ **(b)** $\dfrac{s^{5/2}(2s^{5/4})^2}{s^{1/2}}$

64. **(a)** $(8y^3)^{-2/3}$ **(b)** $(u^4v^6)^{-1/3}$

65. **(a)** $(8a^6b^{3/2})^{2/3}$ **(b)** $(4a^6b^8)^{3/2}$

66. **(a)** $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$ **(b)** $(2x^3y^{-1/4})^2(8y^{-3/2})^{-1/3}$

67. **(a)** $\dfrac{(8s^3t^3)^{2/3}}{(s^4t^{-8})^{1/4}}$ **(b)** $\dfrac{(32y^{-5}z^{10})^{1/5}}{(64y^6z^{-12})^{-1/6}}$

68. **(a)** $\left(\dfrac{x^8y^{-4}}{16y^{4/3}}\right)^{-1/4}$ **(b)** $\left(\dfrac{-8y^{3/4}}{y^3z^6}\right)^{-1/3}$

69. **(a)** $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$ **(b)** $\left(\dfrac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3}$

70. **(a)** $\left(\dfrac{a^{1/6}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$ **(b)** $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}\left(\dfrac{3s^{-2}}{4t^{1/3}}\right)^{-1}$

71-76 ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

71. **(a)** $\sqrt[6]{y^5}\sqrt[3]{y^2}$ **(b)** $(5\sqrt[3]{x})(2\sqrt[4]{x})$

72. **(a)** $\sqrt[4]{b^3}\sqrt{b}$ **(b)** $(2\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2})$

73. **(a)** $\sqrt{4st^3}\sqrt[6]{s^3t^2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}$

74. **(a)** $\sqrt[5]{x^3y^2}\sqrt[10]{x^4y^{16}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt{x}}$

75. **(a)** $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{16u^3v}{uv^5}}$

76. **(a)** $\sqrt{s\sqrt{s^3}}$ **(b)** $\sqrt[3]{\dfrac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

77-78 ■ Escriba cada número en notación científica.

77. **(a)** 69,300,000 **(b)** 7,200,000,000,000
(c) 0.000028536 **(d)** 0.0001213

78. **(a)** 129,540,000 **(b)** 7,259,000,000
(c) 0.0000000014 **(d)** 0.0007029

79-80 ■ Escriba cada número en notación decimal.

79. **(a)** 3.19×10^5 **(b)** 2.721×10^8
(c) 2.670×10^{-8} **(d)** 9.999×10^{-9}

80. **(a)** 7.1×10^{14} **(b)** 6×10^{12}
(c) 8.55×10^{-3} **(d)** 6.257×10^{-10}

81-82 ■ Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

81. **(a)** Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5,900,000,000,000 millas.

(b) El diámetro de un electrón alrededor de 0.0000000000004 centímetros.

(c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

82. **(a)** La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.

(b) La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0.000000000000000000000053 g.

(c) La masa de la Tierra es de unos 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg.

83-88 ■ Use notación científica, las Leyes de Exponentes, y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Exprese su respuesta redondeada al número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

83. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

84. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

85. $\dfrac{1.295643 \times 10^{9}}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^{6})}$

86. $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

87. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594{,}621{,}000)(0.0058)}$

88. $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^{9}}{(5.05 \times 10^{4})^{12}}$

89-92 ■ Racionalice el denominador.

89. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

90. **(a)** $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{x}{6}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{y}{2z}}$

91. **(a)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ **(c)** $\dfrac{x}{y^{2/5}}$

92. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

93. Sean a, b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

(a) b^5 **(b)** b^{10} **(c)** ab^2c^3

(d) $(b - a)^3$ **(e)** $(b - a)^4$ **(f)** $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

94. Demuestre las Leyes de Exponentes dadas para el caso en que m y n sean enteros positivos y $m > n$.

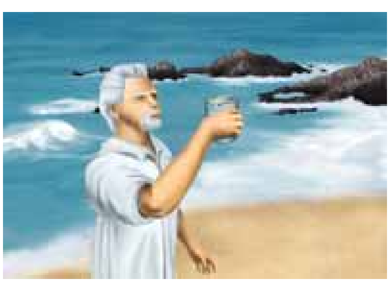
(a) Ley 2 **(b)** Ley 5 **(c)** Ley 6

APLICACIONES

95. Distancia a la estrella más cercana Proxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del Ejercicio 81(a) para expresar esta distancia en millas.

96. Velocidad de la luz La velocidad de la luz es de unas 186,000 mi/s. Use la información del Ejercicio 82(a) para hallar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

97. Volumen de los océanos El promedio de profundidad de los océanos es 3.7×10^3 m y el área de los océanos es 3.6×10^{14} m². ¿Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



98. Deuda nacional Al mes de julio de 2010, la población de Estados Unidos era de 3.070×10^8, y la deuda nacional era de 1.320×10^{13} dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?

99. Número de moléculas Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22.4 L de cualquier gas contienen 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

100. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura h se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1135 pies sobre el suelo?

101. Rapidez de un auto que patina La policía usa la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la rapidez s (en mi/h) a la que un auto se desplaza si patina d pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número f es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo "resbaloso" de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para f.

	Asfalto	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Mojado	0.5	0.4	0.1

(a) Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se aplicaron los frenos?

(b) Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?

102. Distancia de la Tierra al Sol Se deduce de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante gravitacional, y T es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es de alrededor de 365.25 días para hallar la distancia de la Tierra al Sol.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

103. ¿Cuánto es mil millones? Si usted tuviera un millón (10^6) de dólares en una maleta, y gastara mil dólares (10^3) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo paso, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

104. Potencias fáciles que se ven difíciles Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

(a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ **(b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

105. Límite del comportamiento de potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre a la n raíz de 2 cuando n se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la n raíz de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué ocurre a la n raíz de n cuando n se hace grande?

106. Comparación de raíces Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

(a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

(c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **(d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ▶ Multiplicación de expresiones algebraicas ▶ Fórmulas de productos notables ▶ Factorización de factores comunes ▶ Factorización de trinomios ▶ Fórmulas especiales de factorización ▶ Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x, y y z, y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica.** Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n**. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.