CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS

En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan $9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga y por trabajar x horas mediante la ecuación $y = 9x$. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación $y = 9x$ en un *plano coordenado* nos ayuda a "ver" cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

1.1 NÚMEROS REALES

Propiedades de los números reales ▶ Adición y sustracción ▶ Multiplicación y división ▶ La recta de números reales ▶ Conjuntos e intervalos ▶ Valor absoluto y distancia

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche," y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales.** Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir "número real". La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

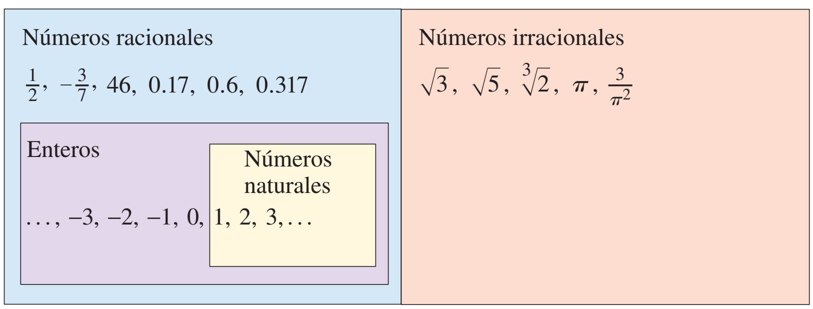


FIGURA 1 El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

▼ Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales a, b y c.

La Propiedad Distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

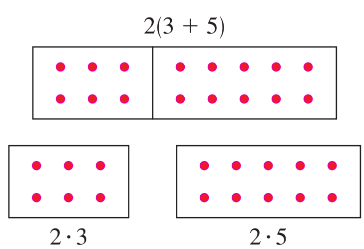


FIGURA 2 La Propiedad Distributiva

EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

(a) $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

(b) $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ — Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (Propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sea x, y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \dfrac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores.
2. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$	$\dfrac{2}{3} \div \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{15}$	Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a + b}{c}$	$\dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{5} = \dfrac{2 + 7}{5} = \dfrac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**.
4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$	$\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \dfrac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$	$\dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \dfrac{2}{3}$	**Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.
6. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\dfrac{5}{36} + \dfrac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real.** A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

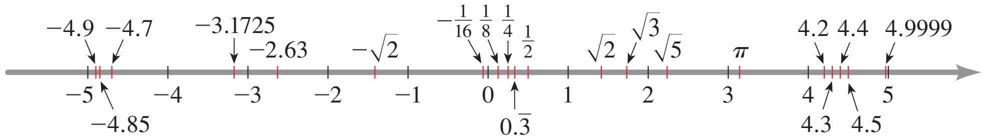


FIGURA 3 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leq 2$$

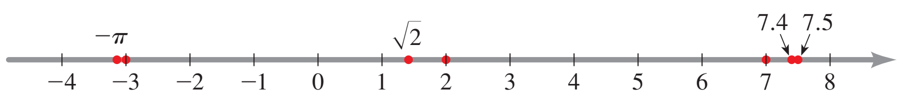


FIGURA 4

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$".

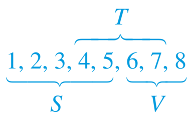
Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S o T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en S y T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN



$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	Todos los elementos en S o T
$S \cap T = \{4, 5\}$	Elementos comunes a S y T
$S \cap V = \varnothing$	S y V no tienen elementos en común

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

FIGURA 5 El intervalo abierto (a, b)

FIGURA 5 El intervalo cerrado $[a, b]$

Nótese que los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

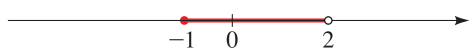
El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

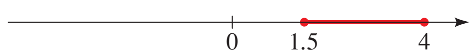
EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

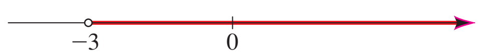
(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$



(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$



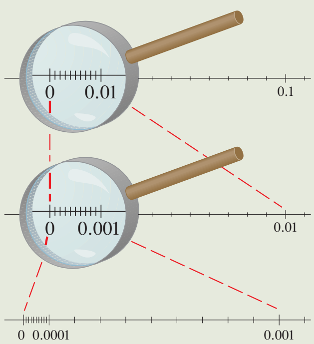
(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.



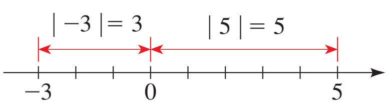


FIGURA 9

EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

(a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

(a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

(b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

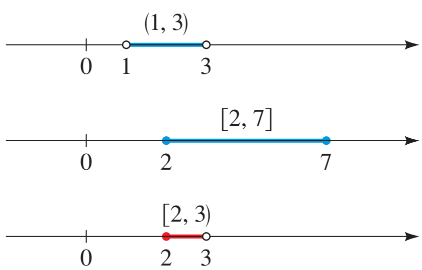


FIGURA 7 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

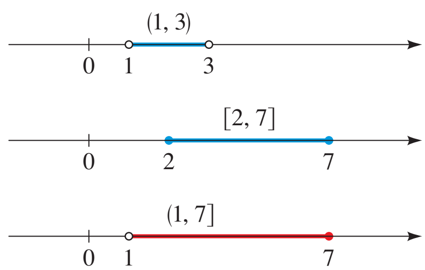


FIGURA 8 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

(a) $|3| = 3$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|0| = 0$

(d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $|11 - (-2)| = 13$ o $|(-2) - 11| = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

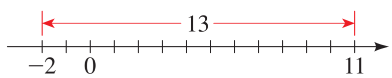


FIGURA 10

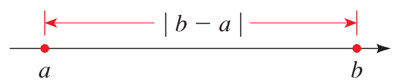


FIGURA 11 La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a.

EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = \lvert -8 - 2 \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

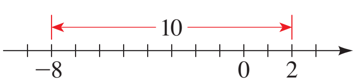


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73** ■

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo de:
   (a) Un número natural
   (b) Un entero que no sea número natural
   (c) Un número racional que no sea entero
   (d) Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.
   (a) $ab =$ ________; ________ Propiedad
   (b) $a + (b + c) =$ ________; ________ Propiedad
   (c) $a(b + c) =$ ________; ________ Propiedad

3. El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:
   ________en notación constructiva de conjuntos y
   ________en notación de intervalos.

4. El símbolo $|x|$ representa la ________del número x. Si x no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre________.

HABILIDADES

5-6 ■ Mencione los elementos del conjunto dado que sean
(a) números naturales
(b) números enteros
(c) números racionales
(d) números irracionales

5. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

6. $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

7-14 ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

7. $7 + 10 = 10 + 7$

8. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

9. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

10. $2(A + B) = 2A + 2B$

11. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

12. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

13. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

14. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

15-18 ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

15. Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$ ____

16. Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ ____

17. Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$ ____

18. Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$ ____

19-24 ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

19. $3(x + y)$ **20.** $(a - b)8$

21. $4(2m)$ **22.** $\frac{4}{3}(-6y)$

23. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **24.** $(3a)(b + c - 2d)$

25-30 ■ Ejecute las operaciones indicadas.

25. **(a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **(b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

26. **(a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **(b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

27. **(a)** $\frac{2}{3}\left(6 - \frac{3}{2}\right)$ **(b)** $0.25\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\right)$

28. **(a)** $\left(3 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

29. **(a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

30. **(a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

31-32 ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

31. **(a)** 3 ____ $\frac{7}{2}$ **(b)** -3 ____ $-\frac{7}{2}$ **(c)** 3.5 ____ $\frac{7}{2}$

32. **(a)** $\frac{2}{3}$ ____ 0.67 **(b)** $\frac{2}{3}$ ____ -0.67 **(c)** $|0.67|$ ____ $|-0.67|$

33-36 ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

33. **(a)** $-6 < -10$ **(b)** $\sqrt{2} > 1.41$

34. **(a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

35. **(a)** $-\pi > -3$ **(b)** $8 \le 9$

36. **(a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **(b)** $8 \le 8$

37-38 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

37. **(a)** x es positivo
(b) t es menor a 4
(c) a es mayor o igual a π
(d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a -5
(e) La distancia de p a 3 es como máximo 5

38. **(a)** y es negativa
(b) z es mayor a 1
(c) b es como máximo 8
(d) w es positiva y menor o igual a 17
(e) y está al menos 2 unidades de π

39-42 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

39. **(a)** $A \cup B$ **(b)** $A \cap B$

40. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

41. **(a)** $A \cup C$ **(b)** $A \cap C$

42. **(a)** $A \cup B \cup C$ **(b)** $A \cap B \cap C$

43-44 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

43. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

44. **(a)** $A \cap C$ **(b)** $A \cap B$

45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

45. $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$

47. $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

49. $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

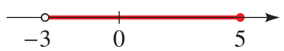
51. $x \leq 1$ **52.** $1 \leq x \leq 2$

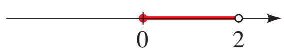
53. $-2 < x \leq 1$ **54.** $x \geq -5$

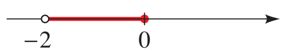
55. $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

57–58 ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

57. **(a)** 

(b) 

58. **(a)** 

(b) 

59-64 ■ Grafique el conjunto.

59. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

61. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

63. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

65. **(a)** $|100|$ **(b)** $|-73|$

66. **(a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **(b)** $|10 - \pi|$

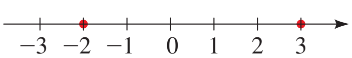
67. **(a)** $\big||-6| - |-4|\big|$ **(b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

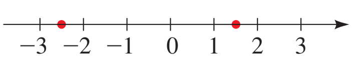
68. **(a)** $\big|2 - |-12|\big|$ **(b)** $-1 - \big|1 - |-1|\big|$

69. **(a)** $|(-2) \cdot 6|$ **(b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

70. **(a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **(b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

71. 

72. 

73. **(a)** 2 y 17 **(b)** -3 y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

74. **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** -38 y -57 **(c)** -2.6 y -1.8

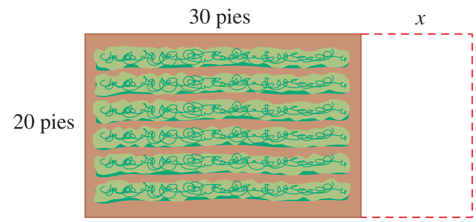
75-76 ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

75. **(a)** $0.\overline{7}$ **(b)** $0.2\overline{8}$ **(c)** $0.\overline{57}$

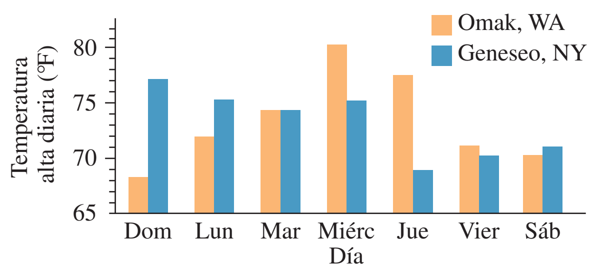
76. **(a)** $5.\overline{23}$ **(b)** $1.3\overline{7}$ **(c)** $2.1\overline{35}$

APLICACIONES

77. Área de un jardín El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



78. Variación de temperatura La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

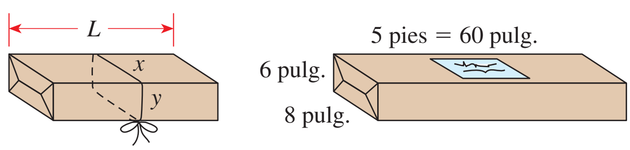


79. Envío de un paquete por correo La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

(a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

(b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

80. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

(a) $-a$ **(b)** $-b$ **(c)** bc

(d) $a - b$ **(e)** $c - a$ **(f)** $a + bc$

(g) $ab + ac$ **(h)** $-abc$ **(i)** ab^2

81. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

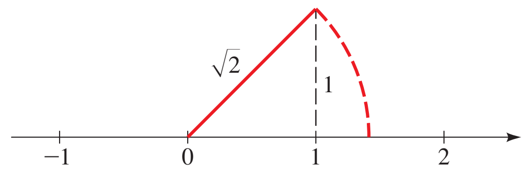
82. Combinación de números racionales con números irracionales ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

83. Limitación del comportamiento de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x crece? ¿Y cuando x disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

84. Números irracionales y geometría Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.



85. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿La sustracción es conmutativa?

(b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ▶ Reglas para trabajar con exponentes ▶ Notación científica ▶ Radicales ▶ Exponentes racionales ▶ Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n.

▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.