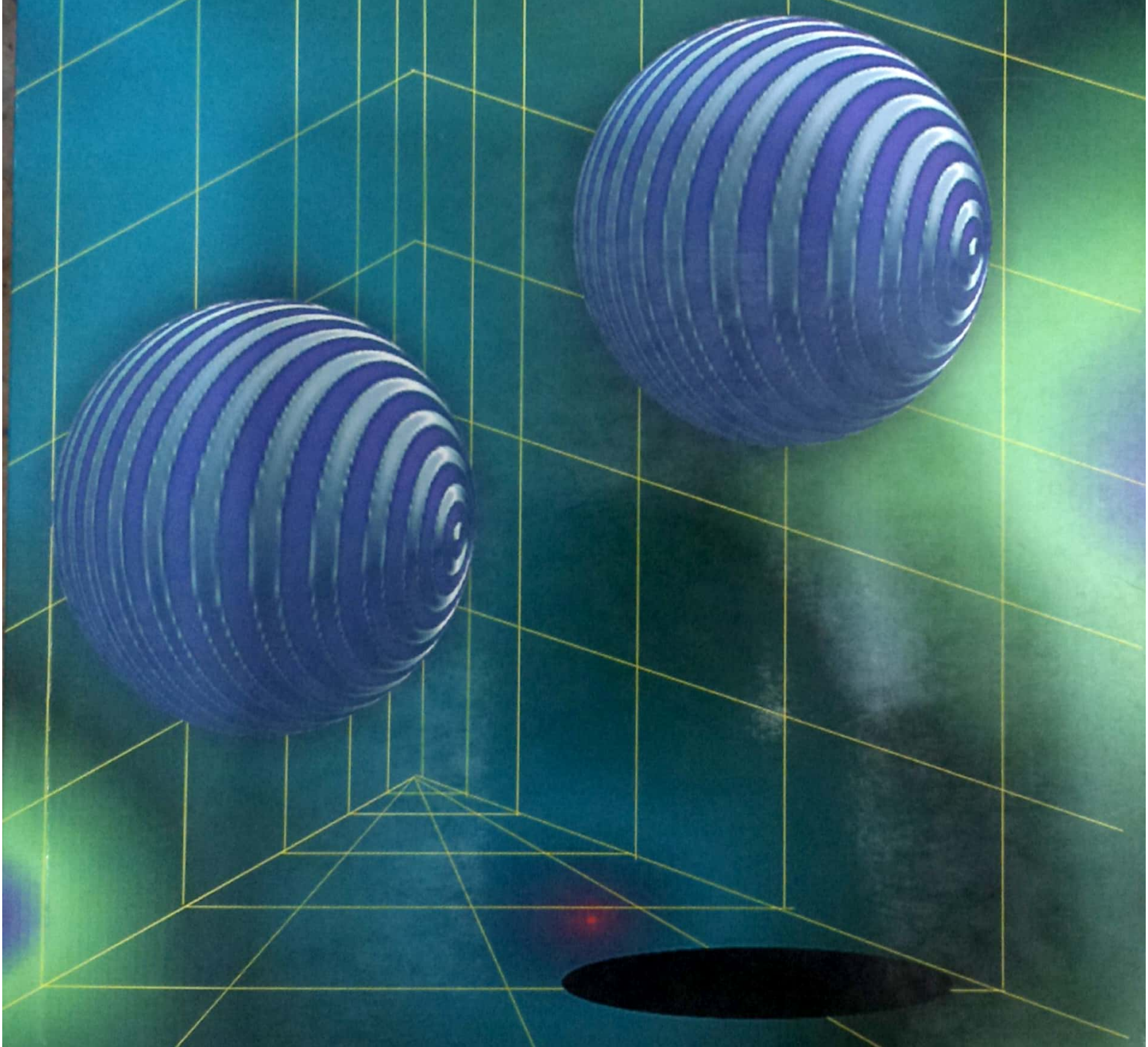
Problemario de Precálculo



MATEMÁTICAS

Natella Antonyan
Linda Medina Herrera
Piotr Wisniewski

INTERNATIONAL THOMSON

PROBLEMARIO DE PRECÁLCULO

PROBLEMARIO DE PRECÁLCULO

Natella Antonyan
Linda Medina
Piotr Marian Wisniewski

THOMSON LEARNING™

Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

PRÓLOGO

Este problemario es el resultado de la experiencia que los autores hemos adquirido durante la enseñanza de los cursos de Matemáticas Remediales en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México (ITESM-CCM). Por lo mismo, los contenidos están orientados hacia un curso de introducción al precálculo en el cual los alumnos manejan con facilidad los conceptos que normalmente se adquieren en los cursos previos. El material incluido es más que suficiente para un curso semestral de seis horas por semana, tomando en cuenta el trabajo que consideramos necesario por parte del alumno fuera del aula para alcanzar el nivel de manejo deseado de la materia.

El texto fue escrito pensando principalmente en los estudiantes que inician su conocimiento del precálculo, independientemente del área de especialidad a que pertenecen. La estructura general del libro permite que sea de máxima utilidad sin importar si lo lee, estudia o consulta una persona del área de ingeniería, negocios o humanidades. Para asegurar el cumplimiento de este propósito, en el libro se reúne gran cantidad de ejercicios y problemas relacionados con diferentes áreas, sin olvidar el tipo de problemas prácticos que podemos encontrar en múltiples situaciones de la vida diaria.

Aun cuando el nivel matemático del libro representa muy pocas dificultades para la mayoría de los estudiantes, trabajar hacia la comprensión de los conceptos y valorar el desarrollo lógico de la metodología puede a veces requerir un gran esfuerzo; este hecho se toma en cuenta a lo largo de la elaboración del texto. El contenido está dividido en nueve capítulos, y cada uno de ellos inicia el tratamiento del tema con un resumen, donde se incluyen todos los conceptos básicos que el alumno deberá manejar con soltura para enfrentar el material de cada capítulo. Posteriormente, se pone especial atención a la aplicación de los elementos que el alumno acaba de conocer, por medio de ejemplos, ejercicios y problemas de diferente grado de dificultad, pasando de los más básicos y sencillos, que permiten al alumno familiarizarse con el tema, hasta llegar a aquellos que representan un verdadero reto y que motivarán al estudiante para alcanzar mayor profundidad en su conocimiento.

El libro, sin embargo, no sólo es de gran utilidad y apoyo para los estudiantes, ya que también los profesores encontrarán en él un valioso recurso para reforzar en el alumno los conocimientos transmitidos en el aula. De la misma manera, la amplia gama de ejercicios sirven como base para la selección y elaboración de las diferentes tareas, asignaciones y exámenes que se manejen a lo largo del curso.

Durante el proceso de creación de este texto, los autores hemos puesto especial atención en lograr cubrir las necesidades e intereses de los diferentes grupos de personas que puedan tener acceso al material y obtener de él resultados satisfactorios. Si este objetivo se cumple, los autores podremos sentirnos realmente satisfechos por haber alcanzado el fruto más valioso de nuestro esfuerzo.

Los autores

■ CONTENIDO ■

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA SIMBÓLICA

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS

CAPÍTULO 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

CAPÍTULO 4

ECUACIONES

CAPÍTULO 5

DESIGUALDADES

CAPÍTULO 6

TRIGONOMETRÍA

CAPÍTULO 7

ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

CAPÍTULO 8

MATRICES Y DETERMINANTES

9 CAPÍTULO

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 1

Introducción a la lógica simbólica

Proposiciones

Una *proposición* en lógica es una oración que puede clasificarse o como verdadera o como falsa.

Las proposiciones por su forma pueden ser simples o compuestas. La *proposición simple* es aquella que no puede descomponerse en dos oraciones que sean a su vez proposiciones. Tales proposiciones vamos a representarlas por letras minúsculas: a, b, c, ...p, q,... Las *proposiciones compuestas* se forman al relacionar dos o más proposiciones simples mediante ciertas partículas gramaticales como: y, o, si ...entonces, si y sólo si,

Objetivos

- 1.1 Proposiciones
- 1.2 Tablas de verdad y tautologías
- 1.3 Cuantificadores
- 1.4 Argumentos lógicos (deducciones, demostraciones). Prueba directa
- 1.5 Contraejemplo
- 1.6 Prueba por contraposición (contrarrecíproca)
- 1.7 Prueba por contradicción
- 1.8 Principio de inducción matemática

etc. Tales partículas se conocen como conectivos lógicos. Cada uno de los conectivos se identifica por su nombre y su símbolo:

- La proposición "p y q" se llama la ***conjunción*** de p y q, y se escribe $p \wedge q$.
- La proposición "p o q" se llama la ***disyunción*** de p y q, y se escribe $p \vee q$.
- La proposición "sólo p o sólo q" se llama la ***disyunción exclusiva*** de p y q, y se escribe $p \veebar q$.
- Si p es una proposición, "no es cierto que p" se llama la ***negación*** de p, y se escribe $\sim p$.
- La proposición "si p, entonces q" se llama ***condicional*** y se escribe $p \Rightarrow q$; p se llama hipótesis o antecedente, y q se denomina conclusión o consecuente. Dada la condicional $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ es la recíproca, $\sim p \Rightarrow \sim q$ es la inversa y $\sim q \Rightarrow \sim p$ es la contrarrecíproca.
- La proposición "p si y sólo si q" se llama ***bicondicional*** y se escribe $p \Leftrightarrow q$.

Tablas de verdad y tautologías

Las ***tablas de verdad*** nos ayudarán de manera mecánica a determinar la verdad o falsedad de una proposición dada, dándole todos los posibles valores a las proposiciones simples que la conforman. Las proposiciones verdaderas las denotamos por "1" y las falsas por "0":

		Conjunción	Disyunción	Disyunción exclusiva	Negación	Condicional	Bicondicional
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1

Una ***tautología*** es una proposición cuyos valores de verdad son 1 en todos los casos de su tabla de verdad. Si todos los valores de verdad son 0, la proposición se llama ***contradicción***.

Cuantificadores

- Una ***proposición abierta*** es una oración con una variable libre (x, y, z, él, ella,...) que puede ser una proposición al darle valores a la variable.

- Cualquier operador lógico de la forma "para todo", "para cada", "todo" o "cada", es un ***cuantificador universal*** y se representa con el símbolo $\forall$.
- Los operadores de la forma "existe", "algún", "por lo menos un", son ***cuantificadores existenciales*** y se representan con el símbolo $\exists$.

La siguiente tabla nos muestra la negación de proposiciones que contienen alguno de los cuantificadores anteriores.

Proposición	**Negación**
$\forall$...	$\exists$...
$\exists$...	$\forall$...
Algunos	Ningún
Todos	Algunos no...
Algunos no...	Todos
Ningún	Algunos

Argumentos lógicos (deducciones, demostraciones). Prueba directa

Si se quiere probar la veracidad de una proposición del tipo $p \Rightarrow q$, revisamos todos los posibles casos en los que la hipótesis "p" se cumple y verificamos que la conclusión "q" se obtenga a partir de cada uno de ellos. Esto se le conoce como una ***prueba directa***.

Contraejemplo

Si consideramos la proposición $p \Rightarrow q$. Podemos mostrar que la proposición es falsa, dando un ejemplo donde la hipótesis "p" es verdadera y la conclusión "q" es falsa, este se conoce como ***contraejemplo***.

Prueba por contraposición (contrarrecíproca)

Consideremos la proposición $p \Rightarrow q$ y su contrarrecíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$. La proposición $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ es una tautología, por lo tanto $p \Rightarrow q$ es equivalente a su ***contrarrecíproca***. Así que si probamos directamente que $\sim q \Rightarrow \sim p$ estaremos probando que $p \Rightarrow q$.

Prueba por contradicción

En una ***prueba por contradicción*** suponemos que la proposición que queremos probar es falsa y que esto implica una contradicción. Una de las contradicciones a la que se llega con más frecuencia es $p \wedge \sim p$.

Principio de inducción matemática

La ***inducción matemática*** se puede usar para probar cierto tipo de proposiciones matemáticas, usualmente aquellas donde se quiere demostrar que cierta afirmación se cumple para todo entero positivo. Para esto se realizan dos pasos:

Paso 1. Se demuestra que la afirmación es cierta para algún entero n (usualmente $n = 1$).
Paso 2. Se supone que la afirmación es cierta para un entero k y después se demuestra que es cierta para el entero $k + 1$.

Si se pueden completar estos dos pasos, entonces se ha demostrado la validez de la afirmación para todos los enteros positivos mayores o iguales que n.

EJERCICIOS I

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
a. Luis y Jaime estudian Ingeniería de Sistemas.
b. ¡Qué miedo!
c. ¿Cómo estás?
d. Estaciona el auto.
e. En Ganímedes hay seres vivos.
f. ¿Cuándo regresas?
g. Olga regresa mañana.
h. Tengo mucho dinero.
i. No tengo dinero.
j. ¿Qué estudias?
k. Necesito estudiar matemáticas.
l. Ella pesa 50 kilos.
m. No me gusta estudiar.
n. Hoy es 22 de noviembre.
o. Lunes, 20 de noviembre.
p. No me gusta la música moderna.
q. Dos más dos es cuatro.
r. Yo me caso mañana.
s. ¿Eres casado?

2. Identifique cuáles de las siguientes proposiciones son simples y cuáles son compuestas:
a. Estoy en la casa o en la universidad.
b. Gabriela está trabajando.
c. Juan y Tomás son atractivos.
d. Si gano suficiente, voy a un viaje.
e. Si multiplicamos por cero, el producto siempre es igual a cero.
f. Una fracción es impropia cuando el numerador es mayor o igual al denominador.

3. Simbolice las siguientes proposiciones, usando letras sólo para las proposiciones simples:
a. Daniel está cantando, bailando y divirtiéndose.
b. Samuel vive en Cuernavaca o en Chihuahua.
c. Juan no aceptará el trabajo.
d. Esta noche iremos a la fiesta y no al cine.
e. La calificación final dependerá del esfuerzo y la dedicación, no de qué tan bien le caes al profesor.

4. Si p es la proposición "Luisa quiere a Supermán" y q la proposición "Supermán quiere a Luisa", exprese con palabras las proposiciones:

a. $\sim (p \wedge q)$.

b. $\sim p \vee \sim q$.

c. $\sim p \wedge \sim q$.

5. Exprese cada uno de los conectivos siguientes como $p \Rightarrow q$ o como $q \Rightarrow p$:

a. p solamente si q.

b. p, si q.

c. p es condición suficiente para q.

d. p es condición necesaria para q.

e. p se sigue de q.

6. En los siguientes ejercicios a partir de la proposición dada construir: *i*) la recíproca, *ii*) la inversa, *iii*) la contrarrecíproca:

a. Si tienes vacaciones, entonces vas a descansar.

b. Si estamos en una fiesta, entonces nos divertimos.

c. Si están enamorados, entonces se casan.

d. Si lees mucho, entonces eres inteligente.

e. Si vamos a comer en casa, entonces compramos un pan.

f. Si tienes mucho dinero, entonces eres rico.

g. Si compro esta bolsa, compro zapatos negros.

7. Sea p: llueve, q: hace frío, r: voy a la fiesta. Exprese en lenguaje cotidiano las siguientes proposiciones.

a. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim r$

b. $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

c. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow r$.

8. Sean p y q como en el ejemplo anterior. Dada $p \Rightarrow q$. Escriba en lenguaje cotidiano su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

9. Considere la proposición "$\sim p \Rightarrow q$". Escriba su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

10. Considere la proposición "$\sim p \Rightarrow \sim q$". Escriba su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

11. De los enunciados siguientes decida cuáles son verdaderos:

a. 10 es par y termina en cero.

b. 10 es par y $3 \times 3 = 9$

c. 10 es par y 9 también.

d. 13 es par o 13 termina en cero.

e. 12 es par o 12 termina en dos.

f. 13 es par o $2 \times 2 = 4$.

g. 13 es par o $2 \times 2 = 5$.

12. Sean k y n números naturales. De los enunciados siguientes decide cuáles son verdaderos:

a. Si k es par, entonces kn es par.

b. Si kn es par, entonces k y n son pares.

c. Si kn es par, entonces k es par.

d. Si k es par, entonces k o, n es par.

e. Si $kn = 0$, entonces k y n son cero.

f. Si $kn = 0$, entonces k o n es cero.

g. Si $kn = 3$, entonces k o n es 3.

h. Si $kn = 3$, entonces $n = \frac{3}{k}$.

13. Suponga que p es una proposición verdadera y q una proposición falsa. Escriba de manera simbólica cada una de las siguientes proposiciones y encuentre el valor de verdad de cada una de ellas:

a. p o q.

b. p o no q.

c. ni p ni q.

d. no p y no q.

e. p o q pero no ambas.

14. Obtenga la tabla de verdad de las proposiciones siguientes:

a. $\sim p \vee q$.

b. $\sim p \vee \sim q$.

c. $\sim (p \wedge q)$.

d. $p \wedge (\sim q)$.

e. $\sim p \vee (\vee q)$.

f. $\sim p \vee (\sim q)$.

g. $(p \vee q) \vee (p \wedge q)$.

h. $p \wedge (q \vee (\sim p))$.

i. $(p \wedge q) \wedge r$.

j. $((p \wedge q) \wedge (\sim p)) \wedge q$.

k. $[p \vee (q \vee (p \wedge q))] \vee (\sim q)$.

l. $\{(p \vee q) \wedge [(\sim p) \vee q]\} \vee (\sim p \wedge q)$.

m. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

n. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

o. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \wedge (\sim \vee q)]$.

15. ¿Cuáles de los siguientes enunciados compuestos son verdaderos?

a. $p \veebar q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

b. $p \veebar q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

c. $\sim (p \vee \veebar q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$.

16. Exprese $p \veebar q$ en términos de $\vee$, $\sim$, $\wedge$, y compruebe con una tabla de verdad que es cierto.

17. Escriba la negación de cada una de las proposiciones siguientes:

a. Todos los números son divisibles entre dos.
b. A todos los estudiantes les gustan las matemáticas.
c. Todas las actrices son guapas.
d. Algunos extranjeros hablan inglés.
e. Todos los estudiantes son inteligentes.
f. Ninguna de mis respuestas es correcta.
g. Todos los libros son interesantes.
h. Todas las enfermedades son curables.
i. Todos tenemos nuestras propias casas.
j. Todos los números son enteros.
k. Ningún hombre quiere casarse.
l. Algunos jóvenes son románticos.
m. Todos quieren estudiar filosofía.
n. Todas las mujeres quieren tener hijos.
o. Ninguna manzana es verde.
p. Todos los ricos son felices.
q. Algunos números son negativos.

18. Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

a. Él es feo o tiene la frente amplia.
b. Al lado hay alguien que me ama.
c. Lo único seguro en la vida es la muerte.
d. Todos los cuadrados son rectángulos.

19. Construya tablas de verdad para las siguientes proposiciones. ¿Cuáles de ellas son tautologías? ¿Cuáles son contradicciones?

a. $p \Rightarrow (p \vee q)$.
b. $(p \vee q) \Rightarrow p$.
c. $(p \vee q) \Rightarrow q$.
d. $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.
e. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$.
f. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$.
g. $\sim (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee q$.
h. $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$.
i. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.
j. $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
k. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$.
l. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.
m. $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow q$.
n. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
o. $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p$.
p. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$.
q. $[\sim (p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge r)$.
r. $[\sim q \vee (r \Rightarrow (p \wedge s))] \vee (q \Rightarrow r)$.
s. $[(p \wedge \sim q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$.

20. Muestre que las siguientes proposiciones son tautologías. Note que son negaciones de proposiciones básicas.

a. Ley de De Morgan: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.
b. Ley de De Morgan: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.
c. Ley de implicación y conjunción: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.
d. $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$.

21. Las siguientes son **leyes de la lógica.** Pruebe que son tautologías.

a. Principio de identidad : $p \Leftrightarrow p$.
b. Propiedad idempotente: $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.
c. Propiedad idempotente: $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.
d. Ley de la doble negación: $p \Leftrightarrow \sim (\sim p)$.
e. Razonamiento directo (Modus Ponens): $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.
f. Razonamiento indirecto (*Modus Tollens*): $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.
g. Ley del medio excluido $p \vee (\sim p)$.
h. Ley de transitividad $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
i. Ley de la contrarrecíproca $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.
j. Silogismo disyuntivo (*Modus Tollendo Ponens*): $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$.
k. Ley de contradición: $\sim [p \wedge (\sim p)]$.
l. Leyes de reducción: $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.
$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.
m. Leyes distributivas:
$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.
n. Leyes asociativas:
$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r)]$.
$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r)]$.

22. Cada uno de los siguientes casos ilustra una de las tautologías anteriores. ¿Cuál?

a. Si María usa maquillaje, entonces se ve mayor. María no se ve mayor, por lo tanto no usa maquillaje.
b. Carlos o Roberto está herido. Roberto no está herido. Por lo tanto, Carlos está herido.
c. Yolanda es fea o es bonita.
d. Si un alumno no hace ejercicios, entonces no aprende matemáticas. El alumno aprende matemáticas, entonce hace ejercicios.
e. Si como en exceso, entonces engordo. No como en exceso, por tanto, no engordo.

f. Si Juan le trae flores a Laura, ella lo invita a cenar. Juan le trae flores, entonces, Laura lo invita a cenar

g. Si Claudia no usa los lentes, no puede leer. Claudia está leyendo, por lo tanto, está usando los lentes.

23. Decide si son válidos o no los razonamientos siguientes:

a. Siempre que llueve hay humedad; hoy llovió, luego hay humedad.

b. Los burros tienen orejas, X tiene orejas, luego X es burro.

c. Siempre hay pollo o pato; hoy no hubo pollo, luego hoy hubo pato.

d. Si voy a Acapulco es que fui de vacaciones; no fui a Acapulco, luego no fui de vacaciones.

e. Sólo en domingo no hay clases, hoy no es domingo, luego hay clases.

24. Simbolice los siguientes argumentos y deduzca la conclusión.

a. Diana tiene 18 o 20 años. Si Diana tiene 20 años entonces nació antes que Sara. Diana no nació antes que Sara.

b. Si la mamá no le da permiso a Claudia, tendrá que pedírselo a su papá. Pero si su mamá no le da permiso, nadie se lo dará, y tendrá que irse sin avisar. Por lo tanto, si su mamá no le da permiso...

c. Si Camilo va al cine, Liliana también. Pero si Liliana va al cine, Pedro no va. Carlos o Camilo van al cine. Por lo tanto, si Pedro va al cine, entonces...

d. Si Susana ingiere 1500 calorías a diario bajará 2 kg. por semana. Si no ingiere 1500 calorías a diario romperá su dieta. Si rompe su dieta y no baja 2 kilos por semana, no irá al desfile. Si no va al desfile, no obtendrá una nueva publicidad. En conclusión: si Susana obtiene una nueva publicidad ...

e. Sara es rica o pobre. Si es rica, su esposo también. Si su esposo es rico entonces Sara no es pobre. Por lo tanto, si el esposo de Sara es pobre, entonces ...

25. Utilice cuantificadores para convertir los siguientes predicados en proposiciones verdaderas:

a. $x \cdot 3 = 3 \cdot x$.

b. Su idioma natal es islandés.

c. $4x - 3 = 7$.

d. $\frac{x-2}{x+4} \geq 0$.

e. Él fue la primera persona que escaló el Everest.

26. ¿Cúales son valores lógicos de las siguientes proposiciones?

a. $\forall x \in R\ (x + 3 = 5)$.

b. $\sim[\exists x \in Q\ (x^2 + 1 = 3)]$.

c. $\forall x \in R\ \forall y \in R\ (x + y = 3)$.

d. $\forall x \in N\ \exists y \in R\ (x + y = 3)$.

e. $\exists x \in R\ \forall y \in R\ (x + y = 3)$.

f. $\forall a \in N\ \forall b \in N\ (a + b)^2 = a^2 + b^2$.

g. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ (a + b)^2 = a^2 + b^2$.

h. $\exists a \in N\ \exists b \in N\ (a + b)^2 = a^2 + b^2$.

i. $\forall x \in R\ \forall y \in R\ (x \neq y \Rightarrow x < y \lor x > y)$.

j. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ (a^2 = b^2 \Rightarrow a = b)$.

k. $\forall a \in R\ \forall b \in R\ (|a| = |b| \Rightarrow a = b)$.

l. $\forall a \in R\ \exists b \in R\ (a = b \Rightarrow |a| = |b|)$.

m. $\forall n \in N\ \exists m \in N\ (m > n)$.

n. $\exists n \in N\ \forall m \in N\ (n > m)$.

o. $x > y \Rightarrow \exists r \in R\ (r > 0 \land y + r = x)$.

p. $\forall x \in R\ \sqrt{x^2} = x$.

q. $\forall x \in R\ (x + 5)^2 = x^2 + 25$.

r. $\forall x \in R\ x^2 = x^2 > x$.

27. Demuestre que $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

28. Demuestre que: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{(n+1)^2}{4}n^2$.

29. Demuestre que: $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$.

30. Demuestre que para $\forall n \in N$ $a_n = 4^n + 15n + 17$ se divide entre 9.

31. Demuestre que para $\forall n \in N$ $a_n = 10^n - 4$ se divide entre 6.

32. Demuestre que para $\forall n \in N$ $a_n = 7^n - 1$ se divide entre 3.

33. Demuestre que para $\forall n \in N$ $a_n = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ se divide entre 9.

34. Demuestre que para $\forall n \in N$

a. $n^2 + n$ es un número par y use este resultado para demostrar que:

b. $a_n = n^3 - n$ se divide entre 6.

35. Demuestre que para $\forall n \in N$

a. $n^2 + n + 2$ es un número par y use este resultado para demostrar que:

b. $a_n = n^3 + 5n$ se divide entre 6.

36. Demuestre que para $\forall n \in N$
a. $b_n = 4^k + 5$ se divide entre 3 y use éste resultado para probar que:
b. $a_n = 4^n + 15n - 1$ se divide entre 9.

37. Demuestre que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

38. Demuestre que: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

39. Demuestre que: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

40. Demuestre que:
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

41. Demuestre que:
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

EJERCICIOS II

1. ¿Puede una proposición ser verdadera y falsa a la vez?

2. Explique con sus propias palabras para qué sirven las tablas de verdad.

3. ¿Qué símbolo se usa para cambiar el valor de verdad de la proposición dada?

4. Simbolice cada pareja de proposiciones siguientes y construya la proposición compuesta
a. Usando la conjunción.
b. Usando la disyunción.
c. Usando la condicional.
d. Usando la bicondicional.

Soy muy joven. Quiero disfrutar la vida.
Hoy es sábado. Vamos a salir al campo.

5. Construya la doble negación para las siguientes proposiciones:
a. *Me voy de viaje.*
b. *Las mujeres de hoy quieren ser independientes.*

6. Dé un ejemplo de una proposición compuesta y construya las tablas de verdad
a. de su inversa.
b. de su recíproca.
c. de su contrarrecíproca.

7. Demuestre que las siguientes afirmaciones son tautologías:
a. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.
b. $p \Leftrightarrow [\sim p \rightarrow (q \wedge \sim p)]$.

8. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
a. *"Hoy es lunes"* $\wedge$ *"Hoy es domingo".*
b. $3 \times 8 - 20 = 4 \vee 12$ *es un número par.*
c. *Si* $2 \leq 4$ *entonces* $3 + 1 = 4$.
d. *París está en Francia si y sólo si Francia está en Europa.*
e. *No es cierto que* $\frac{6}{2} = 3$, *entonces* $3^2 = 9$.

9. Escriba las negaciones de las siguientes proposiciones dadas:
a. *Todas las películas son interesantes.*
b. *Algunos animales son peligrosos.*
c. *Ninguna fruta es saludable.*

10. Complete las siguientes tablas de verdad:
a. $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

b. $(p \wedge q) \Leftrightarrow [\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p]$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow [\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p]$

11. Dé un ejemplo para cada uno de los siguientes incisos:

a. Silogismo disyuntivo

b. Razonamiento indirecto

c. Ley de contradicción

d. Ley de medio excluido

12. Compruebe la verdad de las siguientes proposiciones dadas:

a. $(p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$.

p	q	$p \vee q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \vee (p \vee q)$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$

b. $\sim [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee \sim p$.

p	q							

13. Demuestre que para todo $n \in N$

a. $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible entre 133.

b. $a_n + n^5 - n$ es divisible entre 30.

CAPÍTULO 2

Conjuntos

Cualquier colección o lista de objetos bien definidos se llama un ***conjunto***. Los objetos de los que consta un conjunto se denominan ***elementos*** del conjunto. Notamos los conjuntos con letras mayúsculas A, B, X, Y,... y los elementos con minúsculas a, b, x, y,... Si A es un conjunto arbitrario y x es cualquier objeto, la notación $x \in A$ se utiliza para indicar el hecho de que x es un elemento de A. Si x no es un elemento de A se indica escribiendo $x \notin A$. Para escribir un conjunto se emplean llaves, entre las cuales están los elementos del conjunto.

Existen dos formas para definir un conjunto: por ***enumeración***, cuando se determina un conjunto mediante una lista de los elementos que lo forman, por ***comprensión***, si el conjunto se especifica estableciendo una regla de pertenencia.

- El símbolo $\emptyset$ se usa para denotar el ***conjunto vacío***, esto es, el conjunto que carece de elementos, y por ejemplo, $A = \emptyset$ significa que el conjunto A no contiene elementos.
- Se dice que el conjunto B es un ***subconjunto*** del conjunto A si cada elemento de B también es un elemento de A, esto es:

$$B \subseteq A \text{ si y sólo si } \forall x\, (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Objetivos

- 2.1 Operaciones entre conjuntos
- 2.2 Diagramas de Venn - Euler
- 2.3 Leyes del álgebra de conjuntos
- 2.4 Cardinalidad
- 2.5 Conjuntos numéricos

Tendremos en cuenta que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

- Se dice que B ***no es un subconjunto*** de A si hay por lo menos un elemento de B que no está en A. En tal caso, vamos escribir: $B \not\subseteq A$.
- Se dice que el conjunto B es un ***subconjunto propio*** del conjunto A si se cumple lo siguiente: $B \subseteq A$ y $B \neq A$. En tal caso, escribimos: $B \subsetneq A$ o $B \subset A$.

Sea dada alguna familia de conjuntos, a menudo será muy útil considerar estos conjuntos como subconjuntos de un mismo conjunto U. En este caso, U se llama el ***conjunto universal*** para la familia dada.

- Dos conjuntos A y B son ***iguales*** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir, A y B tienen los mismos elementos. En tal caso, escribimos $A = B$. Esto es:

$$A = B \text{ si y sólo si } \forall x\,(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$$

■ Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios.

- La ***unión*** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B. Se denota $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \bigvee (x \in B)\}$$

- La ***intersección*** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que están en A y están en B, esto es, los elementos que A y B tienen en común. Se denota $A \cap B$. Así:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \bigwedge (x \in B)\}$$

- Si A y B no tienen elementos en común: $A \cap B = \emptyset$, se dice entonces que A y B son ***disjuntos***.
- Sea dado el conjunto $A \subseteq U$. El ***complemento*** de A respecto a U, denotado por A^c o $U - A$ es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A:

$$A^c = \{x : (x \in U) \bigwedge (x \notin A)\}$$

- La ***diferencia entre A y B*** es el conjunto de todos los elementos que están en A y no están en B. Se denota $A - B$:

$$A - B = \{x : (x \in A) \bigwedge (x \notin B)\}$$

- La ***diferencia simétrica*** entre A y B es el conjunto de todos los elementos de A o de B, pero no de ambos. Se denota $A \triangle B$:

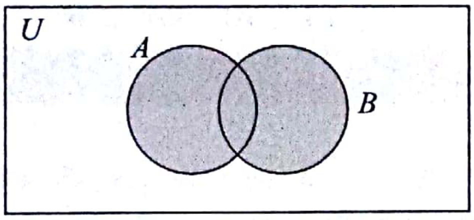
$$A \triangle B = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Dos conjuntos A y B son ***comparables*** si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. En cambio, A y B ***no*** son ***comparables*** si hay un elemento de A que no esté en B o hay un elemento de B que no esté en A.

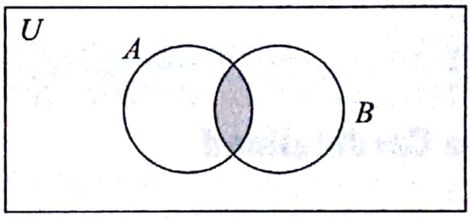
■ Diagramas de Venn-Euler

Se pueden representar los conjuntos y sus relaciones de manera sencilla e instructiva mediante ***diagramas de Venn-Euler*** (diagramas de Venn). Los conjuntos estarán representados por áreas planas, generalmente limitadas por círculos.

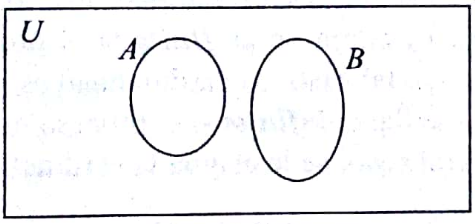
Los siguientes diagramas de Venn - Euler nos ilustran las definiciones y operaciones anteriores.



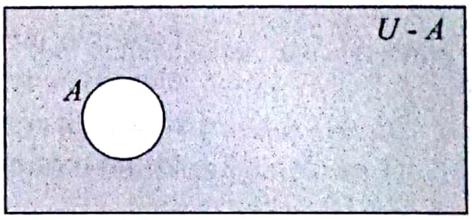
$A \cup B$



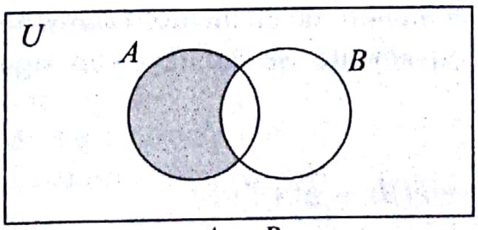
$A \cap B$



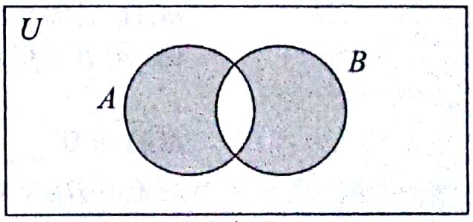
A y B son disjuntos



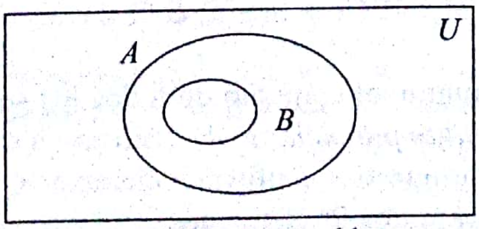
A^c



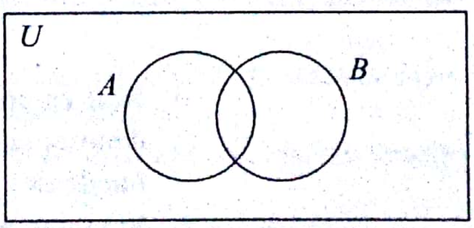
$A - B$



$A \triangle B$



A y B son comparables



A y B no son comparables

Leyes del álgebra de conjuntos

Leyes de idempotencia:	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Leyes asociativas:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes conmutativas:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad:	$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U, A \cap U = A$
Leyes de complemento:	$A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$ $(A^c)^c = A$ $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$
Leyes de De Morgan:	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Cardinalidad

El número de elementos diferentes que tiene un conjunto es su ***cardinalidad***. Dependiendo de la cardinalidad, los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. El conjunto es ***finito*** si el proceso de contar sus elementos termina; en tal caso, su cardinalidad es un número determinado. Un conjunto se llama ***infinito*** si el proceso de contar sus elementos no termina; en tal caso, se le asigna la cardinalidad "infinita".

Sean A ,B y C tres conjuntos arbitrarios finitos. Vamos a denotar por $n(A)$, $n(B)$ y $n(C)$ el número de elementos (cardinalidad) de los conjuntos A, B y C respectivamente. Se satisfacen las siguientes fórmulas:

$$n(\emptyset) = 0$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

- Si A es un conjunto, el conjunto de todos los subconjuntos de A se denomina ***conjunto potencia***: $P(A)$. Esto es: $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$. Se puede demostrar que si A contiene n elementos, entonces el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos.

Conjuntos numéricos

Notaremos por:

R al conjunto de los ***números reales***;

N al conjunto de los ***naturales***: $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$;

Z al conjunto de los ***enteros***: $Z = \{\ldots, -3, -2, -10, 1, 2, 3, \ldots\}$;

Q al conjunto de los ***números racionales***, números que pueden expresarse como razón de dos enteros, donde el denominador es diferente de cero: $Q = \{\frac{p}{q} : (p \in Z) \wedge (q \in Z, q \neq 0)\}$;

I al conjunto de los ***números irracionales***, números que no pueden ser escritos como razón de dos enteros: $I = \{r \in R : r \notin Q\}$.

Se tienen las siguientes relaciones:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

EJERCICIOS I

1. Escriba las siguientes afirmaciones en notación conjuntista:

a. x es un elemento de A.
b. y no pertenece a B.
c. C es un conjunto vacío.
d. B es subconjunto propio de A.
e. x está en A y no está en B.
f. A no es subconjunto de B.
g. Si x está en A, entonces x está en B.
h. Si A está contenido en B y B está contenido en C, entonces A está contenido en C.
i. El conjunto potencia de B.
j. A y B son dos conjuntos iguales.
k. Existe un elemento de A que no está en B.
l. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.
m. x pertenece al complemento de A.
n. y está en la unión de los conjuntos A y B.

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están determinados por comprensión, y cuáles por enumeración?

a. $A = \{1,3,5,7,9\}$
b. $B = \{x : x$ es impar, y $0 \leq x \leq 10\}$
c. $X = \{x : x$ es una isla del Caribe$\}$
d. $Y = \{x : x$ es un país productor de café$\}$
e. $Z = \{$Juan, José, Clara, Paola$\}$

3. Determine por enumeración los siguientes conjuntos:

a. $A = \{x : x$ es par, primo y menor que $10\}$
b. $B = \{x : 0 \leq x \leq 50, x$ es múltiplo de $5\}$

4. Determine por comprensión los siguientes conjuntos:

a. $A = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$
b. $B = \{1,3,5,7,\ldots\}$
c. $C = \{-1,-2,-3,-5,\ldots\}$

5. Escriba los siguientes conjuntos por enumeración:

a. El conjunto de los meses del año que tienen 31 días
b. El conjunto de los días de la semana cuyo nombre tiene la letra "e"
c. El conjunto de los meses del año que tienen 30 días
d. El conjunto de las estaciones del año

6. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son vacios:

a. $A = \{x : x \neq x\}$
b. $B = \{x : x + 2 = 4, 2x = 4\}$
c. $C = \{x : 5x = 0\}$
d. $D = \{x : x^2 + 1 = 0\}$
e. $X = \{x : x$ es una letra en la palabra "tiera"$\}$
f. $Z = \{x : x$ es una persona que vive 200 años$\}$
g. $P = \{x : x$ es la 31 letra del alfabeto español$\}$
h. $O = \{x : x$ es un número real y $x^2 < 0\}$
i. $T = \{x : x$ es un número natural y $x^2 = 5\}$

7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{4,2,3\}$
$C = \{3,2,1\}$
$D = \{1,2,3,1\}$
$E = \{4,2,2,3\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$X = \{x : (x - 2)(x - 3) = 0\}$
$Y = \{2,3\}$
$Z = \{2,2,3\}$

9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? $\{a,b,c\}$, $\{c,b,a\}$, $\{a,b,c,a\}$, $\{a,b,b,c\}$.

10. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

a. $A = \{x : x$ es una letra de la palabra caso$\}$
b. $B = \{x : x$ es una letra de la palabra cosa$\}$
c. $C = \{x : x$ es una letra de la palabra acaso$\}$

11. Diga cuál de los siguientes conjuntos es vacio; si no es vacío, diga cuántos elementos tiene.

a. $A = \{\{\emptyset\}\}$
b. $B = \{\emptyset\}$
c. $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
d. $D = \{\emptyset, \emptyset\}$
e. $E = \emptyset$

12. Sean A, B, C, D y E como en el ejercicio 11. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta.

a. $A = B$
b. $B = D$
c. $C = E$
d. $D \subsetneq E$
e. $E \subsetneq C$

13. Dé en cado caso un conjunto que pueda usarse como universal:

a. {el niño nacido en el año 1999}
b. {El libro de García Márquez *Cien años de soledad*}
c. $\{-1,0,1,2\}$
d. {mayo, junio}
e. $\{a,b,c,d\}$

14. ¿Cuál es la diferencia entre los enunciados siguientes?

a) $B \in A$
b) $B \subset A$
c) $\{B\} \subset A$

15. Sea $A = \{a, \{a\}\}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

a. $a \in A$
b. $\{a\} \in A$
c. $\{a\} \subseteq A$

16. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

a. $\{0,0,0\} = \emptyset$
b. $\{a\} = a$
c. $\{-2\} = \{0\}$

17. Si $A = \{a,b,c,d\}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

a. $a \subset A$
b. $A \subset a$
c. $a \in A$
d. $b \notin A$
e. $\{a\} \in A$

18. Responda falso o verdadero:

a. $5 \notin \{1,3,6\}$
b. $\{3\} \in \{1,3,6\}$
c. $\emptyset \in \{1,3,6\}$
d. $\{\emptyset\} \subset \{1,3,6\}$
e. $\emptyset \subset \{1,3,6\}$

19. Responda verdadero o falso:

a. $2 \notin \{1,2,3,4\}$
b. $B \in \{a,b,c\}$
c. jueves $\in \{x : x$ es un día de la semana$\}$
d. El conjunto de estudiantes inscritos en este curso es finito.

20. Sea $A = \{0,1,2,3,4\}$ y $B = \{1,2,3\}$. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta.

a. $B \in A$

b. $B \subset A$
c. $0 \in A$
d. $\{0\} \in A$
e. $2 \notin B$
f. $\{3\} \subseteq A$

21. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?
a. $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$
b. $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$
c. $\emptyset \subseteq \{1\}$
d. $\emptyset \notin \{\{1\}\}$
e. $\emptyset = \{0\}$
f. $\{1,2\} \in \{1, \{1,2\}, 3\}$
g. $\{4\} \in \{1, \{4,2,\} 3\}$

22. Considere el conjunto $B = \{1,2,3, \{1,2\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:
a. El conjunto B sólo tiene tres elementos diferentes.
b. $\{1,2,3\} \in B$
c. $\{1,2,3\} \subseteq B$
d. $B \cap \{1,2\} = \{\{1, 2\}\}$
e. $\{2\} \in \{1,2\}$
f. $B \cap \{\{1,2,3\}\} = \{1,2,3\}$
g. $2 \subseteq B$
h. $B \cup \{\{1\}\} = B$

23. Sean $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{b,d,e\}$, encuentre:
a. $C = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$
b. $E = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$

24. Sean A, B dos conjuntos arbitrarios, tales que $B \subseteq A$. Determine:
a. $A \cup A$
b. $A \cap A$
c. $A \cup \emptyset$
d. $\emptyset \cap A$
e. $B \cap A$
f. $B \cup A$

25. Sean $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\theta,\pi,\varphi,\kappa,\rho\}$, $B = \{\alpha,\delta,\theta,\pi,\varphi,\kappa\}$ y $C = \{\beta,\delta,\varepsilon,\kappa,\rho\}$, encuentre:
a. $A \cap B$
b. $B \cap C$
c. $A - B$
d. $B - A$
e. $A - (B \cup C)$

26. Sean los conjuntos $A = \{m,e,x,i,c,o\}$, $B = \{e,s\}$, $C = \{p,a,d,r,i,s,i,m,o\}$
a. Encuentre $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \cup C$
b. Muestre que $A \cap B \cap C = \emptyset$
c. Muestre que $A - (B \cup C)$ es un conjunto sin vocales
d. Compruebe que $B - C = A \cap B$
e. Compruebe que $\{m,a,x,i,m,o\} \subseteq A \cup B$

27. Sean A y B dos conjuntos tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. ¿Qué relación se cumple entre A y B en las siguientes expresiones?
a. $(A \cup B) \subset B$
b. $A \cup B = B$
c. $A \cap B = B$
d. $A \subset (A \cap B)$
e. $A \subset A - B$

28. Sean $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,b,1\}$, $C = \{1,2\}$. Encuentre:
a. $A \cup B$
b. $B \cup C$
c. $A \cap C$
d. $C \cup C$
e. $B \cap B$
f. $(A \cup B) \cup C$
g. $(B\cup C) \cup A(A \cup B) \cap C$
h. $(A \cup B) \cap C$
i. $(A \cap C) \cup (B\cap C)$

29. Si $a \in A$; $b \in B$; $A \subset B$ y $B \subset C$, ¿cuáles afirmaciones son ciertas?
a. $a \in B$
b. $b \in A$
c. $B \subseteq C$
d. $A \subseteq C$
e. $A \neq C$
f. $A \subset C$

30. Sean $A = \{x,y,z,t,u\}$, $B = \{x,z,t\}$ y $C = \{z,t,u\}$. Determine si son falsos o verdaderos los enunciados siguientes:
a. $C \subset A$
b. $A \subseteq B$
c. $B \subseteq A$
d. $C \subsetneq A$
e. $C \subset B$
f. $A \subsetneq C$

31. Sean dados el conjunto arbitrario A y el conjunto universal U. Indique qué condiciones deben cumplir los conjuntos A y B para que se verifiquen las igualdades siguientes:

a. $A \cup B = \emptyset$
b. $A \cap \emptyset = A$
c. $A \cup U = A$
d. $A \cap B = A$
e. $A \cap U = A$
f. $A \cup \emptyset = U$
g. $A \cap B = U$
h. $A \cup B = A$
i. $A \cup U = U$
j. $A \cup \emptyset = \emptyset$

32. Sean $A = \{a,b,c,d\}$; $B = \{a,b,1\}$ y $C = \{1,2\}$, encuentre:

a. $A - B$
b. $C - A$
c. $B - C$
d. $C - B$
e. $A - C$
f. $B - A$

33. Sean dados $A = \{3,5,6\}$ y $B = \{6,7\}$ y el conjunto universal $U = \{3,5,6,7,9\}$, encuentre:

a. $A \cap B$
b. $A \cup B$
c. $B \cup U$
d. $(B \cup A)^c$
e. $A \cap B^c$

34. Dados los conjuntos $U = \{1,2,3,5,7,11\}$, $A = \{3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,5,11\}$, encuentre:

a. A^c
b. $A^c \cap B^c$
c. $A^c \cup B^c$
d. $(A \cup B)^c$
e. $(A \cap B)^c$

35. Use diagramas de Venn para mostrar que cada una de las siguientes afirmaciones es cierta:

a. $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
b. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
d. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

36. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,a,b\}$ y $C = \{a,\{c\}, 1,5\}$, encuentre:

a. $B \triangle C$
b. $A \cap (B \triangle C)$
c. $B \triangle A$
d. $A \triangle A$
e. $A \triangle (B \triangle C)$
f. $A \triangle B$
g. $A \triangle \emptyset$
h. $A \cap (B \setminus A)$

37. Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U. Simplifique las siguientes expresiones:

a. $A \cup (A \cap A^c)$
b. $A \cap (A \cup A^c)$
c. $A \cap (A \cup B)$
d. $A \cup (A \cap B)$
e. $U \cup U$
f. $U \cup \emptyset$

38. Demuestre que:

a. $A \cap (A \cup B) = A$
b. $(A \cap B) \cup B = B$
c. $B \cup (A - B) = A \cup B$
d. $[A \cup (A \cap B)] \cup B = A \cup B$

39. Demuestre que:

a. $A - B = (A \cup B) - B$
b. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
c. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
d. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

40. Demuestre que:

a. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
b. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

41. Pruebe que:

a. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (P(A) \subseteq P(B))$
b. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
c. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Dé un contraejemplo que muestre que $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ no siempre se cumple.

42. Sea U el conjunto de los seres humanos, B el conjunto de los ciudadanos colombianos, C el conjunto de las personas que viven en Bogotá, y D el conjunto de todas las mujeres. Describa cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $B \cap C$
b. $U \cap D$
c. $U \cap B$
d. $C \cap D$
e. $B^c \cap C$
f. $B \cap D^c$
g. $(B - C) \cap D$
h. $B - (C^c \cap D)$

43. Si el conjunto universal es $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, encuentre el complemento de los siguientes conjuntos:

a. $A = \{1,2,3,4\}$
b. $B = \{1,4,5,6,7,8,9\}$
c. $C = \emptyset$

44. Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A = \{1,3,5,7\}$, y $B = \{2,3,4,5\}$, obtenga:

a. A^c
b. $U - (A \cup B)^c$
c. $(A \cap B)^c$

45. Sea $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, y $C = \{1,2,3,4\}$, encuentre:

a. $A \cup B$
b. $A \cap C$
c. $A \cap B$
d. A^c
e. $(A \cap B)^c$
f. $B - C$
g. $C - B$
h. $(A - C)^c$

46. Represente con diagramas de Venn los siguientes conjuntos:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $A - B$
d. $(A \cap B) - C^c$
e. $(A \cup C)^c - B$
f. $(A^c \cap C) - B$
g. $A \cap B^c$
h. $(A - B) \cap (B - A)$

47. Demuestre que:

a. $A \cap B \subseteq A$
b. $A \cap (A \cup B) = A$
c. $B - A = B \cap A^c$
d. $A \cup (B - A) = A \cup B$

48. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son finitos?

a. El conjunto de las rectas que pasan por el origen.
b. El conjunto de números reales entre 0 y 1.
c. El conjunto de números pares entre 10 y 300.
d. El conjunto de los estados de la República Mexicana.
e. El conjunto de números naturales.
f. El conjunto de franceses que viven en México, en un momento dado.
g. El conjunto $\{2,4,6,8,\ldots\}$.
h. El conjunto de puntos del plano.
i. El conjunto de arena del mar.

49. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son finitos?

a. $A = \{\{1,2,3\},1,2\}$
b. $B = \{x : x \text{ es impar}\}$
c. $C = \{x : x^2 - 25 = 0\}$
d. $D = \{x : x \leq 7, x \in Z\}$
e. $E = \{x : x \leq 7, x \in N\}$
f. $X = \{2,4,8,\ldots\}$
g. $Y = \{y : y \text{ es una hoja de un árbol}\}$

50. Dado $A = \{3,5,6\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A? ¿Cuáles son?

51. Dado $A = \{a,b,c,d\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A? ¿Cuáles son?

52. Dado $A = \{a,\{b,c\}\}$, ¿cuántos subconjuntos tiene A? ¿Cuáles son?

53. Sea $C = \{a,b\}$ escriba el conjunto $P(P(C))$.

54. Responda verdadero o falso y justifique su respuesta.

a. $-3 \in N$
b. $2 \in Q$
c. $\sqrt{2} \in I$
d. $\sqrt{2} \in R$
e. $\sqrt[3]{27} \in N$

f. $\sqrt[4]{\pi} \in R$
g. $\frac{3}{4} \in Z$
h. $\frac{6}{2} \in Z$
i. $2\pi \in R$
j. $8 \in R$

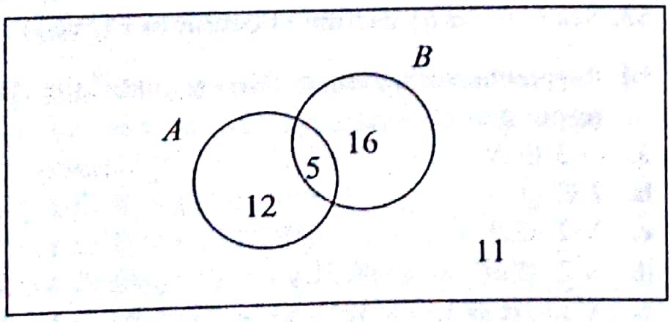
55. Liste todos los subconjuntos de cada uno de los siguientes conjuntos:
a. $\{5,10\}$
b. $\{1,2,3\}$
c. $\emptyset$

56. Para el conjunto $\{x,y,z,t\}$, enumere los subconjuntos que contienen:
a. un elemento
b. cuatro elementos
c. dos elementos
d. ningún elemento
e. tres elementos

57. Escriba todos los subconjuntos del siguiente conjunto:
$P = \{\{a\}, b, -0.2\}$.

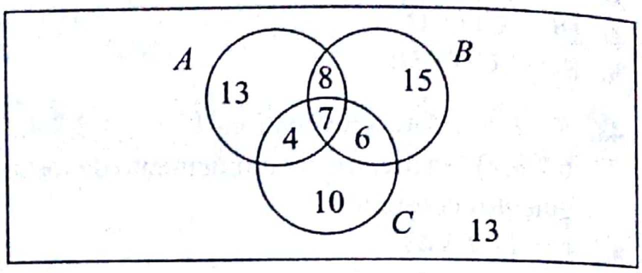
58. Sean dados los conjuntos $X = \{a,c,e\}$; $Y = \{a,b,d\}$; $Z = \{b,c,d,e\}$ y el conjunto universal $U = \{a,b,c,d,e\}$, encuentre:
a. X^c
b. Y^c
c. $U - Z$
d. $Y - X$
e. $Z - Y$
f. $X - Z^c$
g. $Z - (X - Y)$
h. $(Y - Z)^c$
i. $(X^c)^c$

59. Use la figura para hallar las cardinalidades siguientes:



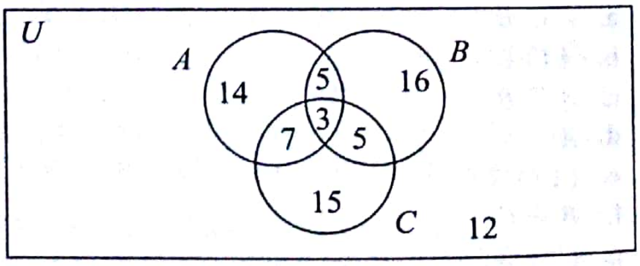
a. $n(A)$
b. $n(B)$
c. $n(A \cap B)$
d. $n(A \cup B)$
e. $n(A^c)$
f. $n(B^c)$
g. $n(A^c \cap B^c)$
h. $n(A^c \cup B^c)$

60. Use la figura para hallar las cardinalidades siguientes:



a. $n(A)$
b. $n(B)$
c. $n(C)$
d. $n(U)$
e. $n(B \cup C)$
f. $n(B \cap C)$
g. $n(A \cap B \cap C)$
h. $n(A \cup B \cup C)$

61. Use la figura para hallar las cardinalidades siguientes:



a. $n(A)$
b. $n(B)$
c. $n(C)$
d. $n(A - B)$
e. $n(A \cap B \cap C)$
f. $n((A \cap B) - C)$
g. $n(C - (A \cap B))$

62. Un conjunto tiene 32 subconjuntos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?

63. Un conjunto tiene 7 subconjuntos propios. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto?

64. Si A es el conjunto de los números divisibles por 2 y B el conjunto de los números divisibles por 4, se tiene que ¿$A \subseteq B$ o que $B \subseteq A$?

65. Supongamos que $n(A) = 20$, $n(B) = 10$ y $n(A \cap B) = 2$. Encuentre $n(A \cup B)$.

66. Supongamos que $n(A) = 18$, $n(B) = 10$ y $n(A \cap B) = 3$. Encuentre $n(A \cup B)$.

67. Supongamos que $n(A) = 18$, $n(B) = 24$ y $n(A \cup B) = 31$. Encuentre $n(A \cap B)$.

68. Supongamos que $n(A) = 38$, $n(B) = 25$ y $n(A \cup B) = 50$. Encuentre $n(A \cap B)$.

69. Si $n(A) = 26$, $n(A \cap B) = 14$ y $n(A \cup B) = 30$. Determine $n(B)$.

70. Si $n(B) = 36$, $n(A \cap B) = 14$ y $n(A \cup B) = 54$. Determine $n(A)$.

71. Sabiendo que $n(A) = 12$ y que $n(B) = 13$, halle $n(A \cup B)$ si:

a. $A \cap B = \emptyset$

b. $n(A \cap B) = 2$

72. Si $n(A) = 14$, $n(B) = 17$, $n(A \cup B) = 24$ y $n(A^c \cap B^c) = 22$, determine:

a. $n(A \cap B)$

b. $n(U)$

73. De los 200 estudiantes de nuevo ingreso de una universidad, 98 son mujeres, 60 estudian comunicación y 60 son mujeres que no estudian comunicación. ¿Cuántos hombres no estudian comunicación?

74. En una academia se realiza una encuesta a 120 jovencitas y se obtienen los siguientes datos: 80 quieren ser actrices; 70 quieren ser cantantes, y 50 quieren ser actrices y cantantes. Determine cuántas de ellas:

a. no quieren ser cantantes

b. no quieren ser actrices

c. cantantes, pero no actrices

d. actrices, pero no cantantes

e. ni actrices ni cantantes

75. Se hizo una entrevista a 1000 personas y se les preguntó en qué lugares hacían sus compras. Se encontró que: 750 compran en el mercado; 775 en tiendas de autoservicio; 520 en la tiendita de la esquina; 570 en el mercado y en tiendas de autoservicio; 345 en tiendas de autoservicio y en la tiendita de la esquina; 440 en el mercado y en la tiendita de la esquina, y todas hacen sus compras en al menos uno de estos tres lugares. Determine cuántas de las personas entrevistadas hacen sus compras en los tres tipos de lugares mencionados.

76. En un concurso de dibujo se inscribieron 60 participantes, de los cuales 35 eran mayores de 8 años, 32 eran niñas, y 20 eran niñas mayores de 8 años. Determine el número de participantes:

a. varones

b. varones mayores de 8 años

c. varones con 8 años o menos

d. tienen 8 o menos años

77. Una agencia automotriz vendió 42 automóviles en un mes: 23 de ellos tenían barra estabilizadora; 26 eran de transmisión automática; 23 tenían reproductor de compactos; 5 tenían barra estabilizadora, transmisión automática y reproductor de compactos; 12 tenían barra estabilizadora y transmisión automática, pero no tenían reproductor de compactos; 7 tenían transmisión automática y reproductor de compactos, pero no tenían barra estabilizadora; 4 tenían barra estabilizadora y reproductor de compactos, pero no tenían transmisión automática. ¿Cuántos automóviles se vendieron con solamente uno de estos accesorios?

78. En una escuela secundaria se tienen los siguientes datos de 2500 estudiantes: a 750 les gusta Español; a 1200 les gusta Biología; a 1350 les gusta Ciencias Sociales; a 250 les gustan Español y Biología; a 550 les gustan Biología y Ciencias Sociales; a 300 les gustan Ciencias Sociales y Español; a 100 les gustan Español, Biología y Ciencias Sociales. Indique a cuántos de estos 2500 estudiantes les gusta:

a. sólo una de estas materias

b. exactamente dos de estas tres materias

c. ninguna de las tres materias

d. al menos una materia

e. cuando mucho dos de estas tres materias.

79. Se hizo una encuesta a 100 actores de televisión sobre las operaciones estéticas que se han realizado: 41 se operaron la nariz; 47 los párpados; 46 liposucción; 27, nariz y párpados; 19, nariz y liposucción; 20, párpados y liposucción; y 15, nariz, párpados y liposucción. ¿Cuántos no están operados?

80. En una clase de 30 estudiantes de Matemáticas Remediales, 15 obtuvieron 100 en el examen de lógica: 14 obtuvieron 100 en el examen de conjuntos; 20 obtuvieron 100 en el examen de desigualdades; 5 obtuvieron 100 en lógica y conjuntos; 9, en lógica y desigualdades y 7 en conjuntos y desigualdades. No hubo ninguno sin un 100. ¿Cuántos de ellos obtuvieron 100 en los tres exámenes?

81. En una muestra de 75 amas de casa, 35 tenían aspiradora; 48 abrelatas eléctrico, y 35, tostadora. Además, 25 tenían simultáneamente aspiradora y abrelatas; 15, aspiradora y tostadora, y 25, abrelatas y tostadora. 10 amas de casa tenían los tres aparatos. ¿Cuántas de ellas no tenían ninguno de estos tres aparatos?

82. De 200 maestros de una universidad, 115 tienen su doctorado, y 60 son investigadores de tiempo completo. De los doctores 33 son investigadores de tiempo completo. Indique cuántos de estos maestros:

a. tienen su doctorado o se dedican a investigar de tiempo completo
b. no tienen su doctorado ni se dedican a investigar de tiempo completo

83. De 250 maestros de una institución educativa se tienen los siguientes datos: 165 son de asignatura; 160 hablan inglés; 110 tienen por lo menos maestría; 85 son de asignatura y hablan inglés; 85 hablan inglés y tienen por lo menos maestría; 40 son de asignatura y tienen por lo menos maestría; y 5 no tienen ninguna de las características antes mencionadas. Determine cuántos de estos 250 maestros:

a. tienen las tres características
b. tienen exactamente dos características
c. tienen exactamente una de las características

84. Al interrogar a un batallón del ejército formado por 300 soldados sobre su preferencia respecto a la comida, se encontró que 118 prefieren los tacos; 172 prefieren las enchiladas; 165 las tortas; 100 tacos y enchiladas; 78 tacos y tortas; 72 enchiladas y tortas y 35 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 300 soldados tienen:

a. al menos una de estas tres preferencias
b. ninguna de estas tres preferencias
c. sólo una de estas tres preferencias
d. cuando mucho una de estas tres preferencias
e. exactamente dos de estas preferencias
f. cuando menos dos de estas preferencias

85. Una fábrica de alimentos para bebé realiza una encuesta a 350 mamás para saber las preferencias de los bebés sobre los envasados de peras, manzanas y frutas tropicales. Se obtienen los siguientes datos: a 255 bebés les gustan las peras, a 270 las manzanas, a 107 las frutas tropicales, 195 peras y manzanas, 80 manzanas y frutas tropicales, y a 15 bebés no les gusta ninguna de estas tres frutas. Determine a cuántos de estos bebés les gusta:

a. al menos una de estas tres frutas
b. sólo una de estas frutas
c. cuando mucho una de estas tres frutas
d. exactamente dos frutas
e. cuando menos dos de estas frutas
f. las tres frutas

86. De un grupo de 1352 turistas que visitan México se encuentra que: 935 de ellos visitaron las momias de Guanajuato, 955 el Museo Nacional de Antropologia, 925 las pirámides de Teotihuacán, 35 fueron a las pirámides y no estuvieron en el Museo de Antropología ni en Guanajuato, 80 fueron al Museo de Antropología y no estuvieron ni en Teotihuacán ni en Guanajuato, 120 estuvieron en Guanajuato y no estuvieron en Teotihuacán ni en el Museo de Antropología, 590 estuvieron en Guanajuato y Teotihuacán y 350 estuvieron en los tres lugares mencionados. Indique cuántas de estas personas asistieron a:

a. exactamente a uno de estos lugares
b. exactamente a dos lugares
c. al menos a un lugar
d. cuando mucho a dos lugares
e. a lo más a uno de los lugares

87. En el mundo se han reportado 290 casos de un síndrome genético raro. Se tienen los siguientes datos: 263 reportan cardiopatías, 203 reportan estrabismo, 112 reportan micrognatia, 93 estrabismo y micrognatia, 95 cardiopatías y micrognatia, 188 estrabismo y cardiopatías, 83 estrabismo, cardiopatías y micrognatia. Indique cuántos de estos casos:

a. reportan estrabismo y micrognatía, pero no cardiopatías
b. reportan estrabismo sin micrognatía ni cardiopatías
c. reportan cardiopatías sin micrognatía ni estrabismo
d. no reportan ninguno de los tres problemas

88. De 80 deportistas que desean entrar a un equipo se tienen los siguientes datos: 30 son mayores de 18 años, 40 tienen amplia experiencia, 40 aprobaron el examen de selección, 25 son mayores de 18 años y tienen amplia experiencia, 25 tienen amplia experiencia y aprobaron el examen de selección, 20 son mayores de 18 años y aprobaron el examen de selección, 10 son mayores de 18 años, tienen amplia experiencia y aprobaron el examen de selección. Indique cuántos de estos deportistas:
a. son mayores de 18 años, y tienen amplia experiencia pero no aprobaron el examen de selección
b. son mayores de 18 años, no tienen amplia experiencia, y no aprobaron el examen de selección
c. son menores o de 18 años, tienen amplia experiencia y aprobaron el examen de selección
d. son menores o de 18 años, no tienen amplia experiencia y no aprobaron el examen de selección

89. Con respecto a los empleados de una empresa se tiene la siguiente información: 170 son hombres, 125 son casados, 5 son mujeres casadas sin profesión, 50 son hombres casados sin profesión, 70 son hombres profesionistas solteros, 20 son mujeres profesionistas solteras, 20 son hombres profesionistas casados y 20 son mujeres solteras sin profesión. Determine cuántos de los empleados son:
a. hombres solteros sin profesión
b. mujeres profesionistas casadas
c. profesionistas

90. Una agencia de automóviles vendió durante un año 120 unidades con las siguientes características: 40 tenían transmisión automática, 25 tenían clima, 17 tenían transmisión automática y clima, 12 tenían transmisión automática, pero no tenían ni clima ni dirección hidráulica, 18 tenían clima y dirección hidráulica, 4 tenían transmisión automática y clima, pero no tenían dirección hidráulica, y 57 no tenían ninguna de las tres características mencionadas. ¿Cuántas de estas unidades tenían dirección hidráulica?

91. En un concurso de baile hay 55 parejas, de las cuales 38 son latinas, 27 bailan tango y 46 salsa, 13 son latinas y bailan tango, 18 bailan tango y salsa, todas las latinas bailan salsa y todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores. De estas 55 parejas:
a. ¿cuántas tienen las tres características?
b. ¿cuántas tienen exactamente dos características?
c. ¿cuántas tienen exactamente una característica?

92. Un estudio realizado a 1650 suscriptores de un periodico, con respecto a su sexo, estado civil y educación, muestra los siguientes datos: 1050 varones, 930 casados, 700 profesionistas, 350 profesionistas varones, 350 profesionistas casados, 480 hombres casados y 200 profesionistas varones casados. Demuestre que los números presentados en los diversos grupos no son consistentes.

EJERCICIOS II

1. Describa el conjunto de los números *Naturales.*

2. Describa el conjunto de los números *Racionales.*

3. Dé ejemplos de:
a. conjunto vacío
b. conjuntos no comparables
c. conjuntos disjuntos.

4. ¿Cuál es la diferencia entre subconjunto propio y subconjunto?

5. Si A tiene 6 elementos, ¿cuántos tiene $P(A)$?

6. ¿Cuántos elementos tiene $P(\emptyset)$?

7. Construya un diagrama de Venn para cada uno de los siguientes casos:
a. $A \subset B$, $A \neq B$
b. A y B son disjuntos, $A \subset C$ y $B \subset C$
c. $A \subset B$ y $B \subset C$
d. A y B no son comparables

8. Demuestre: si A es un subconjunto del conjunto vacío, entonces $A = \emptyset$.

9. Demuestre las leyes de De Morgan:
a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

10. Construya el conjunto potencia de los siguientes conjuntos:
a. $A = \{a,b,c\}$
b. $B = \{\{a,b\},c\}$

11. Demuestre que $A = \{1,2,3,4\}$ no es subconjunto de $B = \{x : x \text{ es impar}\}$.

12. Use los diagramas de Venn para demostrar lo siguiente:
a. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
d. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 CAPÍTULO

Expresiones algebraicas y polinomios

Una expresión constituida por letras, números y otros símbolos algebraicos se denomina ***expresión algebraica***. Cada una de las partes de la expresión algebraica conectada con los signos + o − se llama ***término***. Los términos están formados por un ***coeficiente*** que es un número y ***variables***, que son letras, cada una de las cuales está elevada a un exponente. Se dice que dos ***términos*** son ***semejantes*** si tienen las mismas variables con sus respectivos exponentes. Las expresiones pueden ser ***monomios*** si tienen un solo término o ***polinomios*** si tienen dos o más términos.

Objetivos

- 3.1 Operaciones con expresiones algebraicas
- 3.2 Productos notables
- 3.3 Fracciones
- 3.4 Valor absoluto
- 3.5 Exponentes y radicales
- 3.6 Fórmulas de potenciación
- 3.7 Fórmulas de radicales
- 3.8 Polinomios

Operaciones con expresiones algebraicas

- Para ***sumar*** dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes.
- Para ***restar*** una expresión algebraica a otra, se le cambian los signos a la expresión restada y se suman.
- Para ***multiplicar*** dos expresiones algebraicas se multiplica cada término de la primera expresión por cada término de la segunda y los resultados obtenidos se suman.
- ***Factorizar*** una expresión algebraica significa escribirla como producto de expresiones más simples.

Productos notables

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Fracciones

El cociente de dos números reales a/b o $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ se llama ***fracción***. "*a*" es el ***numerador*** y "*b*" es el ***denominador*** de la fracción. Si el numerador es menor que el denominador la llamamos ***fracción propia***, en caso contrario se llama ***fracción impropia***. Dos fracciones son ***equivalentes***, si tienen el mismo valor.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

El valor de una fracción no cambia al multiplicar o dividir el numerador y denominador por el mismo número:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}}$$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones, entonces:

- **Suma y resta:** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- **Multiplicación:** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

- **División:** $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$

Si el numerador y el denominador de la fracción son expresiones algebraicas, también se satisfacen las fórmulas anteriores.

Valor absoluto

Para cualquier número real a, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Exponentes y radicales

- El exponente es el número que indica cuántas veces se multiplica un número real a, llamado ***base***, por sí mismo:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$$

  El resultado obtenido se llama **potencia**.

- Sea $a \in R$, $a \geq 0$. La raíz ***enésima*** de a, notada $\sqrt[n]{a}$ o $a^{1/n}$, es un número positivo b, tal que $b^n = a$.

Fórmulas de potenciación

Sean m, n números naturales, y a, b, c números reales.

- $a^0 = 1$
- $(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$

- $a^m \div a^n = \frac{a^n}{b^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

Fórmulas de radicales

Sean m, n números naturales, y a, b, c números reales mayores o iguales a cero.

- $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$ si $0 \leq a \leq b$
- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
- $\sqrt[2n+1]{(-a)^{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}$

Polinomios

Un polinomio en x con coeficientes reales es una expresión algebraica de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ donde $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales y n natural. El ***grado*** del polinomio es la mayor potencia a la que aparece elevada la variable x con coeficiente diferente de cero.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots + b_mx^m$. La suma $p(x) + q(x)$ es el polinomio $r(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_mx^m$.

Si α es un número real

$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha\, a_2x^2 + \ldots + \alpha a_nx^n$.

El polinomio "0" es el polinomio $0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$.

$p(x)q(x)$ es el polinomio que se obtiene al multiplicar las expresiones algebraicas correspondientes.

Los ***ceros*** o ***raíces*** de un polinomio $p(x)$ son las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

■ ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS ■

Si $s(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ únicos, tales que

$$s(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el cociente, y $r(x)$ es el residuo de la división de $s(x)$ entre $p(x)$.

■ TEOREMA DEL RESIDUO ■

Si al polinomio $s(x)$ lo dividimos entre $(x - c)$, el residuo es $s(c)$.

La división de $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ entre $(x - c)$ se puede simplificar usando el método de ***división sintética,*** para el cual usamos el siguiente esquema:

- Se pone la raíz c y los coeficientes del polinomio, incluyendo los coeficientes cero:

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

- Se multiplica a_n por c y se coloca este producto bajo a_{n-1}, llamamos $b_1 = ca_n + a_{n-1}$ y lo colocamos en la parte inferior de la columna de a_{n-1}. A continuación, se multiplica b_1 por c y se coloca el producto bajo a_{n-2}, llamamos $b_2 = cb_1 + a_{n-2}$ y lo colocamos en la parte inferior de la columna de a_{n-2}, y así continuamos sucesivamente este procedimiento hasta encontrar $b_{n-1} = cb_{n-2} + a_1$ y finalizamos multiplicando b_{n-1} por c, colocando este producto bajo a_0 y obteniendo $r = cb_{n-1} + a_0$.

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

- Los números $a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es:

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

y r es el residuo.

■ TEOREMA DEL FACTOR ■

Un polinomio $s(x)$ tiene un factor $(x - c)$ si y sólo si $s(c) = 0$.

Si un factor $(x - c)$ aparece m veces en la factorización de $p(x)$, entonces c es una raíz de ***multiplicidad*** m de la ecuación $p(x) = 0$.

Un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes reales es ***irreductible sobre R*** si no se puede expresar como producto de polinomios con coeficientes reales de grado menor que n y mayor que cero; esto es, $p(x)$ no tiene raíces reales. Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, $p(x)$ es irreductible sobre R si y sólo si $b^2 - 4ac < 0$.

■ TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO SOBRE R ■

Todo polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede expresar como un producto de polinomios lineales (de grado uno) y polinomios cuadráticos (de grado dos) irreductibles sobre $\boldsymbol{R}$.

El número de raíces reales de $f(x)$ es $(n - 2k)$ si en la factorización del polinomio aparecen k polinomios cuadráticos irreducibles sobre R.

■ TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES DE UN POLINOMIO ■

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de $p(x)$ donde p y q no tienen factores primos comunes, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

EJERCICIOS I

Usando calculadora, realice las siguientes operaciones:

1. $-5\frac{13}{20}\left[4\frac{1}{2} - 2.3\left(16.78 - 4\frac{1}{5}\right)\right] + 12\frac{11}{20} \div 2\frac{1}{2}$

2. $14\frac{7}{40}\left[8.94 + 3\frac{4}{5}\left(7.68 - 9\frac{3}{4}\right)\right] + 18\frac{3}{8} \div 1\frac{1}{5}$

3. $17\frac{2}{25}\left[4.2\left(-3.6 - 2\frac{3}{8}\right) + 42\frac{1}{2} \div 0.25\right]$

4. $2.78 + 3.22\left[4\frac{1}{2}\left(16\frac{1}{4} - 4.1\right) - 3.2\left(2\frac{1}{2} + 3.25\right)\right]$

5. $3.24 + 2.46 \div 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\left[11.4\left(16\frac{2}{5} - 3.6\right) - 5\frac{4}{5}\right]$

6. $\left[4.8 \div 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(3.6 + 4\frac{2}{5}\right)\right]\left(8\frac{1}{4} - 3.14\left(\frac{3}{8}\right)\right) + 8\frac{7}{20}$

7. $\dfrac{8\left(4\frac{1}{4}\right) - 11\frac{1}{5} \div 9\frac{1}{3} - \left(-2\frac{1}{3}\right) \div \frac{5}{3}}{14 \div 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5}\left(1\frac{2}{7}\right)}$

8. $0.05 - \dfrac{\left(2\frac{4}{5} - 1.9\right) \div 3\frac{3}{4}}{\left[3\frac{1}{6} - (-1.25)\right]2.4 + (-5.8)}$

9. $\dfrac{\dfrac{30\left(4\frac{1}{4}\right) + 11\frac{1}{5} \div 5\frac{3}{5}}{14 \div 2\frac{2}{9} + 8\frac{5}{2}\left(14\frac{2}{3}\right)} \div}{\dfrac{1 \div 6 + 12 \div 5}{2\frac{1}{2}(15) - 4\frac{13}{15}\left(7\frac{3}{5}\right)}}$

10. $\left[2.1 \div \dfrac{\left(4.5\left(1\frac{2}{3}\right) + 3.75\right)\frac{3}{135}}{1 - \left(\frac{10}{27} \div \frac{5}{6}\right)}\right] \div 2.5$

Realice las siguientes operaciones (sin calculadora):

11. $3\frac{1}{2}\left(7.55-2\frac{3}{20}\right)-4.05\left(8\frac{3}{4}-3.35\right)+2.2\times 3\frac{1}{2}$

12. $15.6\left(7\frac{1}{4}-2.35\right)-20.04\left(13\frac{1}{2}-4.45\right)+$
$7.7\times 4\frac{1}{2}$

13. $\frac{3}{4}\left(8.85-12\frac{3}{4}\right)-9\frac{1}{2}\left(14\frac{1}{2}-6.54\right)-$
$4\frac{1}{2}\times 0.34$

14. $1\frac{7}{8}\left(14.46-13\frac{1}{2}\right)+0.2\left(2\frac{1}{5}-8.7\right)-$
$13\frac{3}{8}\times 0.24$

Calcule las siguientes expresiones y presente el resultado como una fracción:

15. $\left(5\frac{1}{2}\right)\div\left(4\frac{3}{4}-8.5\right)+\left(\frac{1}{2}\times 3.34\right)$

16. $\left(-7\frac{1}{2}\right)\div\left(5\frac{7}{8}-1.375\right)-\left(\frac{1}{4}\times 1.04\right)$

17. $\left(-4\frac{1}{2}\right)\div\left(1\frac{1}{2}-3.5\right)-\frac{3}{4}\div 2.5$

18. $\left(3\frac{1}{2}\right)\div\left(1\frac{11}{20}-2\frac{1}{20}\right)+\frac{1}{5}\div 3.5$

Usando calculadora, realice las siguientes operaciones:

19. 34% de $(17.75\times 82.94-33.047)$

20. 89% de $(44.07\times 39.88-12.136)$

21. 103% de $(99.15\times 82.124-304.45)$

22. 164% de $(2.31\times 1.017-0.438)$

Realice las siguientes operaciones (sin calculadora) y presente el resultado en forma de fracción:

23. $2.2\left(\frac{1}{4}+2.5\right)^2-0.75\div\left(\frac{1}{2}\right)^2$

24. $3.5\left(\frac{1}{4}-1.5\right)^2+1.2\div\left(\frac{1}{2}\right)^2=10.269$

25. $3.6\times\left(1.5-3\frac{1}{4}\right)^2-2.25\div\left(1\frac{1}{2}\right)^2$

26. $7.2\left(4\frac{1}{2}-3.75\right)^2+\left(4\frac{1}{2}\right)\div(1.5)^2$

27. $5.4\left(2\frac{3}{8}-1.075\right)^2-\left(3\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{1}{4}\right)^2$

28. $\left(3\frac{7}{10}-4.5\right)^2-\left(1\frac{1}{25}\right)\div\left(1\frac{3}{5}\right)^2$

Calcule :

29. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2\div\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(2\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$

30. $\left(3\frac{1}{2}\right)^2\div\left(2\frac{1}{4}\right)^2+\left(4\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

31. $\left(-1\frac{1}{10}\right)^2\div\frac{11}{20}+\left(4\frac{3}{4}\right)\div\left(1\frac{1}{2}\right)^3$

32. $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2\div\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(-4\frac{1}{2}\right)^2\div\left(\frac{9}{10}\right)^2$

33. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\left(2\frac{1}{4}\right)+0.373}{0.2}$

34. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\left(2\frac{1}{3}\right)+0.6}{0.2}$

35. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)13.5+0.111}{0.02}$

36. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)9\frac{3}{5}+2.13}{0.4}$

37. $\dfrac{\left(2\frac{5}{8}\right)-\frac{2}{3}\left(2\frac{5}{4}\right)}{\left(3\frac{1}{12}+4.375\right)\div\left(18\frac{8}{9}\right)}$

38. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right)\div 0.8+2\frac{1}{9}(0.225)}{8\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)}$

39. $\dfrac{(2.1-1.965)\div(1.2\times 0.045)}{0.00325\div 0.013}-\dfrac{1\div 0.25}{1.6\times 0.625}$

40. $6\div\frac{1}{3}-0.8\div\dfrac{1.5}{\frac{3}{2}(0.4)\left(\frac{50}{1+\frac{1}{2}}\right)}+\frac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0.25}\right)}{6-\frac{46}{1+(2.2)(40)}}$

41. $\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right)\div\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-$
$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right)$

42. $\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left(\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]\div 0.16\right)$

En los siguientes ejercicios calcule el valor de:

43. $|5|$

44. $|23|$

45. $|-4|$

46. $|\sqrt{3}|$

47. $|-\sqrt{2}|$

48. $|5-3|$

49. $|-6|-|-4|$

50. $\left|9-\sqrt{7}\right|$

51. $\left|\sqrt{5}-7\right|$

52. $\left|1-\sqrt{3}\right|$

53. $\left|10-\sqrt{3}\right|$

54. $\left|-\frac{13}{15}\right|$

55. $\left|\sqrt{-3}\right|$

56. $|2-10|$

57. $\left|-(\sqrt{7}-8)\right|$

58. $|-7|-|2|$

59. $||2|-|-3||$

60. $||-7|-|10||$

61. $||-9|-|-3||$

62. $|0|$

63. $||0|-|-5||$

64. $\sqrt[3]{4}$

65. $\sqrt[3]{(-9)^2}$

66. $((-25)^2)^{\frac{1}{4}}$

En los siguientes ejercicios escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto:

67. $|x|$ si x es negativo

68. $|y|$ si y es positivo

69. $|x-3|$ si $x < 3$

70. $|x-3|$ si $x > 3$

71. $|x-2|$ si $x = 2$

72. $|1-x|$ si $x > 1b$

73. $|x-1|$ si $x < 1$

74. $|a-b|-|b-a|$

75. $\dfrac{|a|}{|a|}$ si $a \neq 0$

76. $\dfrac{|a-b|}{|b-a|}$

77. $\dfrac{|aa|}{|a|}$ si $a \neq 0$

Realice las operaciones indicadas y simplifíquelas:

79. $\frac{3}{2}a + 4\frac{1}{3}a - 0.75a$

80. $\frac{3}{5}b - 3.4b + \frac{7}{2}b$

81. $\frac{5}{3}a - \frac{21}{2}a + 5\frac{1}{3}a$

82. $\frac{7}{11}a - \frac{6}{22}a + 5\frac{3}{11}a$

83. $\frac{4}{7}a \times \frac{10}{3}b$

84. $\frac{\sqrt{2}}{3}a \times \frac{3\sqrt{2}}{5}b$

85. $\dfrac{7a}{4}\left(4\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b\right)$

86. $\dfrac{7a}{5}\left(-\frac{15}{4}b + 0.4b\right)$

87. $5x^3 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4x^3}{9} \div \frac{2}{3}$

88. $3a^4 + \frac{1}{2}a^4 - \frac{5}{8}a^4 \div \frac{3}{4}$

89. $5y^5 - \frac{3}{4}y^5 + 2\frac{1}{2}y^5$

90. $5(a+1) - 7(a+1) + 4\left(a^2 + a\right)$

91. $8(x-2) + 3(2x-4) - 5\left(x^2 - 2x\right)$

92. $9(x+5) - 2(3x+15) + 7\left(x^2 + 5x\right)$

93. $\dfrac{3x^2}{x} + \dfrac{5x^3}{x^2} - \dfrac{8x^4}{x^2}$; $x \neq 0$

94. $\dfrac{3y^2}{y} - \dfrac{12y^4}{y^2} - \dfrac{7y^3}{y^2}$; $y \neq 0$

95. $\dfrac{7y^3}{2y^2} + \dfrac{4y^4}{3y^3} - \dfrac{5y^5}{6y^4}$; $y \neq 0$

96. $6a - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}x$

97. $y - 4x - 2\frac{1}{3}y + 4.2x$

98. $\frac{1}{2}y + 2\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{4}y - 3\frac{2}{5}a$

99. $\frac{2}{3}b + \frac{4}{5}x - 3\frac{1}{4}b + 4\frac{1}{3}x$

100. $15\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + 4.7a - 1\frac{2}{7}b$

101. $12.4y - \frac{4}{5}b + \frac{1}{8}y + 2\frac{2}{5}b$

Verifique que:

102. $(2^{\frac{1}{2}} + 1)^3 = 7 + 5 \times 2^{\frac{1}{2}}$

103. $(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}})^2 = 5 + 2 \times 6^{\frac{1}{2}}$

104. $(2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}})^3 = 6(1 + 2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}})$

105. $(\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \times 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

106. $(5 \times 2^{\frac{1}{2}} - 7)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} - 1$

107. $(8 + 2 \times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (4 + 13^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} +$
$(4 - 13^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

Calcule m si:

108. $(3^2)^m = 3^8$

109. $(3^m)^3 = 25^6$

110. $(4^m)^2 = 4^{10}$

111. $(2^5)^m = 2^{15}$

112. $(7^m)^2 = 49$

113. $(9^3)^m = (9^2)^6$

114. $(5^m)^2 = 5^4$

115. $(3^m)^3 = 3^6$

116. $(2^m)^1 = 2^0$

117. $(7^4)^m = 49^2$

118. $(6^1)^m = 36$

119. $(9^m)^3 = (81)^6$

Realice las operaciones indicadas y presente el resultado como potencia.

120. $\dfrac{3 \times 2^4 \times 2^7 \times 2^{11}}{5 \times 2^8}$

121. $\dfrac{4 \times 3^7 \times 3^{13} - \frac{1}{2}3^{20}}{\frac{1}{2}3^{15}}$

122. $\dfrac{(4 \times 5^3 \times 5^8) - (5^5 \times 5^{-6})}{2 \times 5^7}$

123. $\dfrac{3 \times 7^8 \times 7^4 - 7^{10} \times 7^2}{8 \times 7^5}$

124. $\dfrac{2a^7 \times a^3 - 5a^{10}}{9a^4}$

125. $\dfrac{3a^2 \times a^{12} - \frac{1}{2}a^{14}}{\frac{1}{2}a^7}$

126. $\dfrac{4a^{11} \times a^{14} - 2a^{10} \times 3a^{15}}{16a^7}$

127. $\dfrac{15a^7a^{11} - 2a^4 \times 9a^{14}}{17a^8}$

Realice las siguientes operaciones y simplifíquelas:

128. $\dfrac{8 \times (2.2)^3}{(2\frac{1}{2})^3}$

129. $\dfrac{9\,(4\frac{1}{3})^2}{(1\frac{4}{7})^2}$

130. $\dfrac{16(2.25)^4}{(1\frac{3}{4})^4}$

131. $\dfrac{32 \times (5.25)^5}{(1\frac{3}{4})^5}$

132. $\dfrac{(4\frac{1}{2})^3}{27(1.2)^3}$

133. $\dfrac{(5\frac{1}{3})^3}{64(7.5)^3}$

134. $\dfrac{(2^3)^2}{3^3}$

135. $\dfrac{(5^4)^2}{5^3}$

136. $\dfrac{(6^3)^4}{6^5}$

137. $\dfrac{(3^4)^5}{3^7}$

138. $\dfrac{4^{40}}{(4^6)^5}$

139. $\dfrac{7^{15}}{(7^3)^4}$

140. $\dfrac{10^{10}}{(10^3)^3}$

141. $\dfrac{11^{11}}{(11^4)^2}$

142. $(3^3)^2\,(\frac{1}{6})^6$

143. $(1\frac{1}{3})^8\,((\frac{1}{4})^4)^2$

144. $(1\frac{1}{2})^4\,((\frac{2}{3})^2)^2$

145. $(2.1)^{10}\,((\frac{1}{5})^5)^2$

146. $((2.5)^2)^2\,(\frac{1}{5})^4$

147. $(10\frac{1}{2})^6\,((\frac{2}{7})^3)^2$

Simplifique las siguientes expresiones algebraicas y calcule el valor para $a = -\frac{3}{4}$ y $x = 1\frac{1}{2}$:

149. $1\frac{1}{2}a^2 - 4x + 2a^2 + 3\frac{1}{3}x - 3a^2$

150. $5\,(\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}x) - 2\,(x + 2\frac{1}{2}a)$

151. $2a\,(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}x) - 3x\,(\frac{1}{6}a + \frac{1}{9}x)$

152. $\frac{1}{3}a\,(2a - 1\frac{1}{2}x) + \frac{3}{4}x\,(\frac{2}{3}a + x)$

153. $3a\,(\frac{1}{6}a - \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}) + \frac{2}{3}x\,(1\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{2}x)$

154. $\frac{2}{7}a\,(\frac{1}{4}a + 1\frac{2}{5}x) - \frac{2}{5}x\,(a + 2\frac{1}{2}x)$

155. $\dfrac{(2a)^3b^3 + 7(ab)^3}{4a^3b^3}$

156. $\dfrac{3a^4(2b)^4 - 7(ab)^4}{5a^4b^4}$

157. $\dfrac{(\frac{a}{2})^3\,(4b)^3 + (\frac{a}{4}b)^3}{(-2a^3)\,b^3}$

Simplifique las siguientes expresiones:

158. $(\frac{3}{4}x^7)\,(32x^2)$

159. $(-\frac{7}{5}x^{-2})\,(\frac{5}{14}x^3)$

160. $(\frac{2}{5}x^{-3}y^2)\,(10xy^3)$

161. $(\frac{1}{3}m^2n)\,(\frac{6}{5}m^{-3}n^{-2})$

162. $(\frac{7}{4}m^{-3}n^2)\,(2m^7)$

163. $(\frac{5}{3}a^5b^2)\,(\frac{3}{25}a^{-7}b^3)$

164. $(\frac{1}{6}x^2)\,(\frac{3}{2}x^{-3})\,(\frac{4}{3}x^4)$

165. $(\frac{1}{3}xy^2)\,(\frac{3}{5}x^{-2}y^5)\,(10x^{-3}y)$

166. $(\frac{2}{3}xy^{-1}z^2)\,(3x^{-3})$

167. $\dfrac{2x^3yz}{8x^{-2}y^4z^{-2}}$

168. $\left(\dfrac{\frac{1}{3}x^3y^2z}{\frac{1}{2}x^5y^{-1}z^2}\right)$

169. $(\frac{1}{3}x^4y^{-2}z^3)\,(\frac{1}{2}x^{-2}y)\,(\frac{6}{4}xz^{-4})$

170. $(2x^{-4}y)^{-1}\,(xy^2)$

171. $\dfrac{(xy^3)^{-2}}{(xz^{-2})^{-1}} \times \dfrac{x^4}{y^{-2}}$

172. $(-3x^2y^3)\left(\dfrac{x^{-2}y^{-1}}{x^4y}\right)^{-1}$

173. $\left(\dfrac{4xy^{-1}}{x^2y^3}\right)^{-2}(8x^2y^4)$

174. $\left(\dfrac{5mn^3}{2n^3m}\right)^{-2}\left(\dfrac{3m^2n^{-1}}{2n^{-1}m}\right)^{-1}$

175. $(-2p^2q^{-3})^{-2}\,(4p^3q)^2$

176. $(4t^2s^{-3})^{-1}\,(8t^2s^4)$

177. $\left(\dfrac{2x^3y}{3x^0y^{-1}}\right)\left(\dfrac{2x}{3y}\right)^{-1}$

178. $(36x)^{\frac{1}{2}}\,(2x^{\frac{1}{2}})$

179. $(25x^{-4})^{\frac{1}{2}}$

180. $(-4xy)^{\frac{1}{3}}\ (2x^2y^{-4})^{\frac{1}{3}}$

181. $(3a)^{\frac{1}{3}}\ (81a^9)^{\frac{1}{4}}$

182. $(4x^{\frac{1}{2}})\ (2x^4)^{-\frac{1}{2}}$

183. $(5y)^{-\frac{2}{3}}\ (25y^{-1})^{-\frac{1}{3}}$

184. $\left(\dfrac{-8xy^{-3}}{x^4}\right)^{\frac{2}{3}}$

185. $\left(\dfrac{-y^{\frac{4}{3}}}{xy^{-\frac{1}{3}}}\right)^3$

186. $\left(\dfrac{m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}}{mn^{-1}}\right)^{-3}$

187. $\dfrac{(p^2q^3)^{-\frac{1}{3}}}{p^5q^{\frac{1}{2}}}$

188. $(\frac{3}{4}x^7)\ (32x^2)$

189. $(-\frac{2}{5}x^{-2})\ (\frac{5}{14}x^3)$

190. $(\frac{2}{5}x^{-3}y^2)\ (10xy^3)$

191. $(\frac{1}{3}m^2n)\ (\frac{6}{5}m^{-3}n^{-2})$

192. $(\frac{7}{4}m^{-3}n^2)\ (2m^7)$

193. $(\frac{5}{3}a^5b^2)\ (\frac{3}{25}a^{-7}b^3)$

194. $(\frac{1}{6}x^2)\ (\frac{3}{2}x^{-3})\ (\frac{4}{3}x^4)$

195. $(\frac{1}{3}xy^2)\ (\frac{3}{5}x^{-2}y^5)\ (10x^{-3}y)$

196. $(\frac{2}{3}xy^{-1}z^2)\left(\dfrac{3x^{-3}}{2}\right)y$

197. $\dfrac{2x^3yz}{8x^{-2}y^4z^{-2}}$

198. $\left(\dfrac{\frac{1}{3}x^3y^2z}{\frac{1}{2}x^5y^{-1}z^2}\right)$

199. $(\frac{1}{3}x^4y^{-2}z^3)\ (\frac{1}{2}x^{-2}y)\ (\frac{6}{4}xz^{-4})$

200. $(2x^{-4}y)^{-1}\ (xy^2)$

201. $\dfrac{(xy^3)^{-2}}{(xz^{-2})^{-1}}\left(\dfrac{x^4}{y^{-2}}\right)$

202. $(-3x^2y^3)\left(\dfrac{x^{-2}y^{-3}}{x^4y}\right)^{-1}$

203. $\left(\dfrac{4xy^{-1}}{x^2y^3}\right)^{-2}(8x^2y^4)$

204. $\left(\dfrac{5mn^3}{2n^3m}\right)^{-2}\left(\dfrac{3m^2n^{-1}}{2n^{-1}m}\right)^{-1}$

205. $(-2p^2q^{-3})\ (4p^3q)^2$

206. $(4t^2s^{-3})\ (8t^2s^4)$

207. $\left(\dfrac{2x^3y}{3x^2y^{-1}}\right)^{-2}\left(\dfrac{2x}{3y}\right)$

208. $(81x)^{\frac{1}{2}}\ (\frac{2}{9}x^{\frac{1}{2}})$

209. $(25x^{-4})^{\frac{-1}{2}}$

210. $(-4xy)^{-3}\ (2x^2y^{-4})$

211. $(3a)^{-2}\ (81a^9)$

212. $(4x^{\frac{1}{2}})^{-3}(2x^4)$

213. $(5y^3)^{-\frac{2}{3}}\ (25y^{-1})^{-2}$

214. $\left(\dfrac{-8y^{-3}}{x^6}\right)^{\frac{2}{3}}$

215. $\left(\dfrac{-y}{xy^{-\frac{1}{3}}}\right)^3$

216. $\left(\dfrac{m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}}{mn^{-1}}\right)^{-6}$

217. $\dfrac{(p^3q^2)^{-\frac{1}{6}}}{p^5q^{\frac{1}{3}}}$

Escriba las siguientes expresiones usando radicales:

218. $x^{\frac{2}{3}}$

219. $(8y^{\frac{1}{3}})^2$

220. $8y^{\frac{2}{3}}$

221. $2+x^{\frac{1}{2}}$

222. $(2+x)^{\frac{1}{2}}$

Escriba las siguientes expresiones usando exponentes racionales:

223. $\sqrt[3]{2x^2}$

224. $\sqrt[4]{4xy^2}$

225. $\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

226. $\sqrt[5]{\sqrt{x}}$

227. $\sqrt{x^2+y^2}$

Simplifique las siguientes expresiones:

228. $\sqrt[3]{27}$

229. $\sqrt{9x^2}$

230. $\sqrt[3]{-27x^{-3}}$

231. $\sqrt[4]{16x^{-8}y^5}$

232. $\sqrt[3]{8x^{-5}y^6}$

233. $\sqrt{12x^4y^{-5}}$

234. $\sqrt{\dfrac{4x^3}{9xy^4}}$

235. $\sqrt[5]{\dfrac{25x^8y^7z^{-1}}{x^{-2}yz^4}}$

236. $\sqrt[3]{\dfrac{64m^{12}n^7}{m^3n}}$

237. $\sqrt[4]{\dfrac{32x^7y^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}y^2}}$

238. $\sqrt[3]{\dfrac{-125x^{-6}y}{8y^{-7}}}$

239. $\sqrt[5]{\dfrac{7p^{10}q}{q^{-12}}}$

240. $x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{5}}\sqrt[5]{x^4y^3}$

241. $\sqrt[3]{(a-b)^3}$

242. $\dfrac{\sqrt[3]{a^3-b^3}}{(a-b)^{\frac{1}{3}}}$

243. $\sqrt{2x^2y}\,\sqrt{8yz^3}$

244. $\dfrac{\sqrt[3]{x^3y}}{(x^3y^5)^{-\frac{1}{3}}}$

245. $\dfrac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{3x^{-1}y^{-1}}}$

246. $\sqrt[5]{\left(\frac{10x^7}{x^4}\right)^5}$

247. $\sqrt{5x^{-2}y}\,\sqrt{\frac{1}{5}x^2y^{-1}}$

248. $\sqrt[3]{16a^5y^2z^5}$

249. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4y^3}}$

250. $\dfrac{\sqrt{4xy^3}}{\sqrt{3xz^5}}$

Multiplique:

251. $(3^{1/2}-2^{1/2})(3^{1/2}+2^{1/2})$

252. $(x^{1/2}+2x^{1/4}+2)(x^{1/2}-2x^{1/4}+2)$

253. $(2\times 5^{1/2}-3^{1/2}+15^{1/2}-4)(-7+8\times 3^{1/2}+5^{1/2}+2\times 15^{1/2})$

254. $(3\times 2^{1/2}+3^{1/2}+2\times 6^{1/2}+1)(-14+9\times 2^{1/2}+8\times 3^{1/2}-5\times 6^{1/2})$

Calcule:

255. $\dfrac{(2\frac{5}{8}a)-(\frac{2}{3}\times(2\frac{5}{14}a))}{(3\frac{1}{22}a+4375a)\times 19\frac{8}{9}a}$

256. $w=\dfrac{ab-a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\times\left[a^{-1}+b^{-1}+2\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}\times(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})\right]$

para $a=4$ y $b=9$.

257. $\sqrt[3]{54-30\sqrt[2]{3}}+\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}$

Resuelva las siguientes operaciones y simplifíquelas:

258. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2-x-2}$

259. $\dfrac{x}{2a}-\dfrac{4}{3a^2x}$

260. $\dfrac{3x}{ab^2}+\dfrac{x}{a^2b}-\dfrac{3}{a^3}$

261. $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a^2-b^2}$

262. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{5x+15}-\dfrac{x-1}{10x+30}$

263. $\dfrac{2}{5x^2}+\dfrac{1}{3xy}$

264. $\dfrac{x-2y}{15x}+\dfrac{x-y}{20y}$

265. $\dfrac{x-y}{12}+\dfrac{2x+y}{15}+\dfrac{y-4x}{30}$

266. $\dfrac{x+2}{3x}+\dfrac{x^2-2}{5x^2}+\dfrac{2-x^3}{9x^3}$

267. $\dfrac{2}{a^2-ab}+\dfrac{2}{ab+b^2}$

268. $\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{9+3x}+\dfrac{1}{3+x}$

269. $\dfrac{x+y}{xy}-\dfrac{x+2y}{xy+y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}$

270. $\dfrac{a-1}{a-2}-\dfrac{a-2}{a+3}+\dfrac{1}{a-1}$

271. $\dfrac{1}{5+5x}+\dfrac{1}{5-5x}-\dfrac{1}{10-10x^2}$

272. $\dfrac{3}{2x+2}-\dfrac{1}{4x-4}-\dfrac{4}{8-8x^2}$

273. $\dfrac{1+\frac{x}{x+y}}{1+\frac{2x}{y}}$

274. $\dfrac{x-\frac{2}{x+1}}{x-\frac{x}{x+1}}$

275. $\dfrac{x+y+\frac{x^2}{x-y}}{1-\frac{x}{x+y}}$

276. $\dfrac{1-\frac{1}{x^3+2}}{x+\frac{1}{x-1}}$

277. $\dfrac{2-x+\frac{x^2}{2+x}}{4-\frac{4}{2+x}}$

278. $\dfrac{1+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x^2-1}}$

279. $\dfrac{x-1-\frac{5}{x+3}}{x+5-\frac{35}{x+3}}$

280. $\dfrac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{2x+\frac{2x^5+2}{1-x^4}}$

281. $\dfrac{\frac{a+x}{a-x}-\frac{b+x}{b-x}}{\frac{2}{a-x}-\frac{2}{b-x}}$

282. $\dfrac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}$

Simplifique:

283. $\dfrac{ab}{3a^2b-3ab^2}$

284. $\dfrac{5xy}{4x^2y+4x^3}$

285. $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

286. $\dfrac{x^2-4}{5xy+104}$

287. $\dfrac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$

288. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

289. $\dfrac{x^3+4x^2-21x}{x^3-9x}$

290. $\dfrac{a^2-ab-6b^2}{a^3x-6a^2bx+9ab^2x}$

291. $\dfrac{(a-x)^3}{a^3-x^3}$

292. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

293. $\dfrac{16a^2x-25x}{12a^3-7a^2-10a}$

294. $\dfrac{4y^2-(x-3)^2}{(2y+x)^2-9}$

En los ejercicios, simplifique y exprese su respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador.

295. $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

296. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

297. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

298. $\dfrac{5}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$

299. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

300. $\dfrac{1}{x+\sqrt{7}}$

301. $\dfrac{2x^2}{5(\sqrt{3}+3)}$

Factorice:

302. $3(x^2)^3 - x^5$

303. $5(x^4)^3 - (5x^3)^2$

304. $4(x^3)^5 + 2(x^2)^3$

305. $4(x^2)^3x^4 - (2x)^2x^3$

306. $(3x^3)^2x^5 - 6(x^2)^4$

307. $14x^5(x^3)^4 + (2x)^3x^5$

308. $a^2x + a^3x^2 - 4a^2x^3$

309. $2a^3b^2 - 3a^2b^2 - a^4b^2$

310. $3ax^2 - 9a^2x^2 + 6a^3x^3$

311. $2ax^3 - 4a^2x^2 - 4a^3x^2$

312. $4ab^2c - 8a^2b^3c$

313. $7a^2xy^3 - 14a^2x^2y^2$

314. $x^2 - 3xy + 2y^2$

315. $y^2 + 2xy - 3x^2$

316. $x^2 - xy - 2y^2$

317. $x^2 + 8xy + 15y^2$

318. $3x^2 - 6x$

319. $5a + 10a^2$

320. $x^6 + x^4 - 2x^2$

321. $3a^2 + 6ab - 9a$

322. $a(x+y) - (bx + by)$

323. $(a+b)(a^2+ab+b^2) - (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

324. $(a+2b)(c+3d) - (2a-b)(c+3d)$

325. $(4a-3b)a - (4a-3b)a^2 + (4a-3b)a^3$

326. $a^2 + ab + ac + bc$

327. $x^2 + xy + ax + ay$

328. $a^2 + 3b - ab - 3a$

329. $a^2b^2 - 4$

330. $m - 4n^2$

331. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

332. $9 - x^2 + 2xy - y^2$

333. $p^3 + 8 + 6p^2 + 12p$

334. $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

335. $16m^2 - 8mn + n^2 - 49$

336. $x^6 - x^5y + x^4y^2 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$

337. $x^3 + x^2 - x - 1$

338. $x^3 - x^2 - x + 1$

339. $x^3 - 5x^2 - x + 5$

340. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

341. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$

342. $x^5 - x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 6x - 6$

343. $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

344. $x^3 - 3x - 2$

345. $x^3 - 7x + 6$

346. $x^3 - 13x + 12$

347. $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$

348. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

349. $12x^4 + 7x^3 + 7x - 12$

350. $(3x-6)(x^2-1) - (5x-10)(x-1)^2$

351. $(a^2-9)^2 - (a+3)^2$

352. $5(4-x^2) - (x-2)^2$

353. $(4x^2-25)^2 - (2x+5)^2$

354. $4t^2 - 4t + 1 - 2t(2t-1) + 18t^3 - 9t^2$

355. $(5-3m)(m+4) + (3m-5)(2m-3) + 9m^2 - 25$

356. $x^3 + x^2y$

357. $x + x^2$

358. $2a^2 - a^3$

359. $x^2y + x^2z$

360. $x^2 + xy + 2x + 2b$

361. $am - bm + an - bn$

362. $4x^3 - 1 - x^2 + 4x$

363. $1 + x + 3xy + 3y$

364. $16 + 40y^2 + 25y^4$

365. $9 - 6a + a^2$

366. $1 - 2x^3 + x^6$

367. $a^{10} - 2a^5 + 1$

368. $4 - 4(1-x) + (1-x)^2$

369. $(m-n)^2 + 6(m-n) + 9$

370. $a^{2\text{-}1}$

371. $1 - 36x^2y^2$

372. $4x^2 - 81y^4$

373. $x^2y^4z^6 - 144$

374. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^6}{36}$

375. $\frac{1}{100} - x^{2n}$

376. $x^2 - 2x + 1 - y^2$

377. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$

378. $x^2 - 5x + 6$

379. $x^2 + x - 2$

380. $a^2 - 9a + 8$

381. $m^2 - 20m + 36$

382. $x^4 + 5x^2 + 4$

383. $x^{10} + x^5 - 20$

384. $x^2 - 21xy + 98y^2$

385. $(x-1)^2 + 3(x-1) - 108$

386. $2x^2 + 3x - 2$

387. $5x^2 + 13x - 6$

388. $3 + 11x + 10x^2$

389. $30x^2 + 13x - 10$

390. $21x^2 - 29xy - 72y^2$

391. $6m^2 - 13am - 15a^2$

392. $4x^2 + 7mnx - 15m^2n^2$

393. $11ab - 6b^2 - 4a^2$

394. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

395. $8 + 36a + 54a^2 + 27a^3$

396. $125a^6 + 1$

397. $4 + 4(x-y) + (x-y)^2$

398. $(x+m)^2 - (y+n)^2$

399. $1 - \frac{4}{9}a^8$

400. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

401. $6ax - 3x - 2a + 1$

402. $2x(a-1) - a + 1$

403. $81x^2 - (a+x)^2$

404. $1 + 6x^3 + 9x^6$

405. $x^4y^4 + 4x^2y^2 - 96$

Reduzca la fracción:

406. $x + \dfrac{4x}{x+2}$

407. $x - y - \dfrac{x^2}{y}$

408. $\dfrac{3xy}{x-y} + x - 2y$

409. $x^2 - 5x - \dfrac{3x(x+2)}{x-2}$

410. $\dfrac{2x+y}{x+y} - 1$

Simplifique las siguientes expresiones:

411. $\dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$

412. $\dfrac{x\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1} + b\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1}}{\left(\frac{x+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1} + \left(\frac{b+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}}$

413. $\left(\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^{-2} - \left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \dfrac{\sqrt{a+y}}{\sqrt{a} - \sqrt{y}}\right)^{-2}$

414. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y}}\right) + \frac{9}{2}\left(\dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}}{x + \sqrt{x^2+y}}\right)$

415. $\sqrt{x^2+1}\left(1 + \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) + 2x - \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}$

416. $\dfrac{a + \sqrt{a^2-4a}}{a - \sqrt{a^2-4a}} - \dfrac{a - \sqrt{a^2-4a}}{a + \sqrt{a^2-4a}}$

417. $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}} + \dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$

418. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \div \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

419. $\left(2^{\frac{2}{3}} + 27y^{\frac{1}{3}}\right) \div \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{3}}\right]$

420. $\sqrt{a} - \dfrac{a - a^{-2}}{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{1 - a^{-2}}{\sqrt{a} + a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}$

421. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)\right] \div \left(2a + 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)$

422. $\dfrac{x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)} - \left(x - \dfrac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{x^2\sqrt{(1+x^2)-1} - \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$

423. $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\left(m^{-1}+n^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\left(m^{-\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}\right)$

424. $\left[\dfrac{\left(m+\sqrt[3]{m^{2}n}\div\left(n+\sqrt[3]{mn^{2}}\right)-1\right)}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right]^{6}$

425. $\left[(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+x-y\right]\left[(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}-1\right]$

426. $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt[2]{xy}}\right)\div\dfrac{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{x}}{x-y}$

427. $\left(m+n^{\frac{1}{2}}\div\sqrt[2]{m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

428. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^{2}+8x+16}$

429. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^{3}y}-\sqrt[4]{xy^{3}}}{\sqrt[2]{y}-\sqrt[2]{x}}+\dfrac{1+\sqrt[2]{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\sqrt[2]{1+2\sqrt[2]{\dfrac{y}{x}}+\frac{y}{x}}$

430. $\dfrac{(x-y^{2})\sqrt{3}-y\sqrt{3}\sqrt[3]{-8y^{3}}}{\sqrt{2(x-y^{2})^{2}+\left(2y\sqrt{2x}\right)^{2}}}+\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{2z}}{\sqrt{\frac{3}{x}}-\sqrt{\frac{3}{z}}}$

431. $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

432. $\left[\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^{3}+2x+y}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^{3}-x-2y}\right]^{3}\dfrac{\sqrt{\left(y^{3}+3y^{2}x+3yx^{2}+x^{3}\right)^{\frac{2}{3}}}}{y}$

433. $\dfrac{\dfrac{\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}-2\sqrt{b}\right)^{2}}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\dfrac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}}$

434. $\left(\dfrac{x-4y}{x+(xy)^{\frac{1}{2}}-6y}-\dfrac{x-9y}{x+6(xy)^{\frac{1}{2}}+9y}\right)\dfrac{y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}$

435. $\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{3}+2x\sqrt{y}+y\sqrt{y}}{3x^{2}+3y\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{xy}-x}{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}$

436. $\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$

437. $\left[\dfrac{x^3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{y}\right]\left[\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2\right]$

438. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2x^{\frac{1}{4}}-2}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+2}$

439. $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right)\div\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2$

440. $a^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^2}-b\right]^{-1}+\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}$

441. $\left(\dfrac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\dfrac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right)-\left(1-\dfrac{b-1}{a}-\dfrac{b}{a^2}\right)$

442. $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right)\div\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$

443. $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

444. $\left[\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}\right]\div\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

445. $\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{x+1}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}\right)\div\left[-2\left(\dfrac{1}{x^3+x^2}-\dfrac{1-x}{x^2}-1\right)\right]$

446. $\left(\dfrac{x}{xy+y^2}+\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{y}{x^2-xy}\right)\div\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}$

447. $\left(\dfrac{5}{a^2-2a-ax+2x}-\dfrac{1}{8-8a+2a^2}\left(\dfrac{20-10a}{x-2}\right)\right)\div\dfrac{25}{x^3-8}$

448. $\left(\dfrac{3a}{9-3x-3a+ax}-\dfrac{1}{a^2-9}\div\dfrac{x-a}{3a^2+9a}\right)\dfrac{x^3-27}{3a}$

Sea $u=x+y$; $v=xy$. Escriba las siguientes expresiones algebraicas como expresiones dependientes de u y v:

449. x^2xy+y^2

450. x^2-xy+y^2

451. $x^3+y^3-4x^2-4y^2+5x^2y^2$

452. $2x^3+2y^3-4x^2y-4xy^2$

453. $3x+3y-12xy+x^2+y^2$

454. Demuestre que la ecuación:

$x^y=y^x$ se cumple para $x=(1+\frac{1}{k})^k$; y $y=(1+\frac{1}{k})^{k+1}$ donde $k\in N$.

Para cada una de las siguientes igualdades calcule el valor que aparece al lado:

455. $v=\frac{s}{t}$; t

456. $PV=nRT$; R

457. $i=\dfrac{nE}{nr_1+r_2}$; n

458. $F=\dfrac{mv^2}{2g}$; v

459. $A=p(1+rt)$; t

460. $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}$; T_1

461. $V_1=V_0+at$; t

462. $\frac{F}{a} = \frac{M}{g}$; a

463. $Q = (0.24)i^2Rt$; i

464. $F = k\frac{m_1m_2}{r^2}$; m_2 y r

Calcule:

465. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}\right) \div \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

para $a = 12$ y $b = 4$

466. $a^3 + a^{-3}$ usando $a + a^{-1} = 2$

Simplifique:

467. $\sqrt{x^2} + x$

468. $\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{x^2}$

469. $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ para $b \neq 0$

470. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$

471. $\sqrt{9x^2}$

472. $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 4ab}$

473. $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$

474. $\sqrt{1.44a^8b^{12}c^4}$

475. $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{25x^4y^2}}$

Se sabe que $\sqrt{a^2} = |a|$. Simplifique las siguientes expresiones:

476. $\sqrt{(x-3)^2}$ para $x > 3$

477. $\sqrt{(a+2)^2}$ para $a < -2$

478. $\sqrt{a^2 - 10a + 25}$ para $a \geq 5$

479. $\sqrt{x^2 - 8x + 16}$ para $x \leq 4$

480. $\sqrt{2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1}$ para $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$

481. $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$ para $a > \frac{3}{2}b$

Simplifique las siguientes expresiones:

482. $x + |1 - x| + 2|x - 2|$ para $1 < x < 2$

483. $|x| + |x + 1| + |x - 2|$ para $x < -1$

484. $|x - 1| + \frac{x}{|x|} - |x + 1|$ para $x < -2$

Demuestre las siguientes igualdades:

485. $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 6$

486. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = -2$

487. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 4$

488. $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 4$

489. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 1$

490. $\frac{1}{\sqrt{11-6\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}} = \frac{6}{7}$

491. $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = -2$

492. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$

493. $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = 1$

494. $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2 + 8\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}}} = 2$

495. Encuentre los coeficientes b, c del polinomio $W(x) = 3x^2 - bx + c$ de tal manera que $W(1) = 3$ y $W(-1) = 0$

496. Encuentre los coeficientes de los siguientes polinomios:

a) $W(x) = x^3 + mx^2 + x + n$;
$W(1) = -5$, $W(-1) = -9$

b) $F(x) = ax^4 + bx^3 + c$;
$F(0) = 2$, $F(1) = 3$,
$F(-1) = 5$

c) $G(x) = ax^4 + bx^2 + c$;
$G(0) = 2$, $G\left(\sqrt{2}\right) = 5$,
$G\left(\sqrt{3}\right) = 8$

d) $H(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$;
$H(-1) = 1$, $H(2) = 13$,
$H\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{43}{8}$

497. ¿Cuál de los coeficientes a, b, c y d del polinomio $W(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ está determinado por la condición $W(1) + W(-1) = 6$?

498. ¿Cuál de los coeficientes a, b, c y d del polinomio $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ está determinado por la condición $F(1) - F(-1) = 4$?

499. Para los siguientes polinomios $W(x) = x^2 + x + 1$; $G(x) = ax + b$ y $H(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$, encuentre los coeficientes a y b, de tal manera que $W(x) \cdot G(x) = H(x)$

500. Para los siguientes polinomios $F(x) = 2x - 3$; $G(x) = x^2 + bx + c$ y $H(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$, encuentre los coeficientes b y c, de tal manera que el polinomio $F(x) \cdot G(x) - H(x)$ tenga grado cero.

501. Encuentre los coeficientes a, b y c de tal manera que los polinomios $W(x)$ y $G(x)$ sean iguales a $W(x) = a(x - 2)(x - 3) + b(x - 1)(x - 3) + c(x - 1)(x - 2)$ y $G(x) = 5x^2 - 19x + 18$

502. Encuentre los coeficientes m, n, p y q, de tal manera que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales

a) $P(x) = px^4 + mx^3 + nx^2 + x + 4$ y $Q(x) = (x^2 + p + q)^2$

b) $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 1$ y $Q(x) = (x^2 + px + q)^2$

c) $P(x) = x^4 + mx^3 + 13x^2 + nx + 4$ y $Q(x) = (x^2 + px + q)^2$

503. Haga la división de los siguientes polinomios:

$$\frac{12x^3 + 8x^2 + 8}{2x^2 + 3x + 2}$$

Encuentre el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ si se divide $s(x)$ entre $P(x)$:

504. $s(x) = 12x^3 + 8x^2 + 4x + 8$; $P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

505. $s(x) = 3x^2 + 2x + 1$; $P(x) = x^2 + 1$

506. $s(x) = 5x^5 - 2x^4 + 3 - 1$; $P(x) = 2x^2 - 1$

507. $s(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$; $P(x) = x^2 - 1$

508. $s(x) = x^6 - x^3 + 1$; $P(x) = x^3 - 1$

509. $s(x) = -8x^5 - 16x^2 + 8x$; $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

510. $s(x) = -6x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 1$; $P(x) = 2x^2 - 3x$

511. $s(x) = -x^4 - x^3 + 1$; $P(x) = x^3 - 1$

512. $s(x) = 3x^3 - 8$; $P(x) = x^2 - 2x + 2$

513. $s(x) = 2x^4 - 3x^2 - 1$; $P(x) = 3x^3 + 5$

514. $s(x) = x^5 - 1$; $P(x) = x + 2$

515. $s(x) = x^3 - x^2 + 1$; $P(x) = x^3 + 2$

516. $s(x) = 5x^{3+x}$; $P(x) = x^2 + 3x + 1$

517. $s(x) = 2x^4 + 3x - 1$; $P(x) = x^4$

518. $s(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $P(x) = x + 2$

Utilice la división sintética para determinar el cociente y el residuo.

519. $3x^3 + 2x^2 + 4x + 2 \div (x + 2)$

520. $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \div (x - 1)$

521. $x^3 + x + 3 \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

522. $2x^4 + x^3 - x^2 + x - 3 \div \left(x + \frac{3}{2}\right)$

523. $x^3 + x^2 \div (x + 1)$

524. $2x^4 + 5x^3x - 3 \div (x - 2)$

525. $3x^5 - 1 \div x + 1$

526. $4x^4 + 3x^3 - 1 \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

527. $5x^3 - 2x + 4 \div \left(x - \frac{3}{4}\right)$

528. $2x^2 + 3x - 1 \div (x - 4)$

529. $5x^4 + 2x^3 - 3x + 1 \div (x + 3)$

530. $5x^3 + 5x + 1 \div (x - 5)$

531. $2x^2 + x + 1 \div \left(x - \frac{1}{4}\right)$

532. $8x^4 + 3 \div (x - 1)$

¿Para cuáles valores de a el polinomio $F(x)$ se divide entre $P(x)$?

533. $F(x) = x^3 - (2a + 1)x^2 + 3.5x + a^2 - 4$ y $P(x) = x - 2$

534. $F(x) = x^4 - (a - 1)(a + 1)x^3 + (a + 1)^2x^2 - 3(a + 1)x - 7$ y $P(x) = x - 1$

535. $F(x) = x^3 + (a^2 - 1)x - 3$ y $P(x) = x - 1$

¿Para cuáles valores a y b el polinomio $F(x)$ se divide entre $P(x)$, si:

536. $F(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ y $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

537. $F(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ y $P(x) = (x + 1)(x - 2)$

538. $F(x) = ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ y $P(x) = x^2 - 5x + 6$

539. El polinomio $W(x) = x^3 + px + q$ tiene tres raíces x_1, x_2, x_3 tales que $x_1 = x_2$, $x_3 = x_1 - 6$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcule p y q.

540. ¿Para cuáles valores de el polinomio $W(x) = x^3 + k^2x^2 - 4kx - 5$ éste es divisible entre $x - 2$?

Use la división sintética para encontrar $s(c)$:

541. $s(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ $\quad c = 2$

542. $s(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2$ $\quad c = 3$

543. $s(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ $\quad c = -2$

544. $s(x) = 5x^5 - 25x^3 - 20x + 1$ $\quad c = -3$

545. $s(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1$ $\quad c = 4$

Encuentre un polinomio $Q(x)$ con las siguientes condiciones dadas:

546. Grado 3, raíces en $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$ y $Q(0) = 10$

547. Grado 2, raíces en $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ y $Q(2) = -6$

548. Grado 4, raíces en $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ y $Q(-2) = 24$

549. Grado 3, raíces en $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = 2$ y $Q(0) = \frac{8}{9}$

550. Grado 4, raíces en $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ y $Q(-1) = 40$

551. Grado 3, sólo tiene una raíz real en $x_1 = -1$; los coeficientes son ceros y unos.

552. Grado 2, sin raíces reales.

553. Grado 3, raíces en $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, el coeficiente de la mayor potencia de x es 2 y $Q(0) = 2$.

554. Grado 4, raíces en $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $Q(-1) = 0$, $Q(2) = 24$ y el coeficiente de x^4 es igual a 2.

555. Grado 3, todas la raíces son iguales y $Q(-x) = -Q(x)$

Determine un polinomio $P(x)$ con las siguientes condiciones dadas:

556. Raíces $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{1}{5}$ $f(-2) = -352$

557. Raíces $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 0$ $f(1) = -16$

558. Raíces $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$ $f(1) = 18$

559. Raíces $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = -1$
$f(2) = 144$

560. Raíces $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$
$f(-1) = 3$

561. Grado $3, -1$ es una raíz de multiplicidad 1 y 3 es una raíz de multiplicidad 2

562. Grado $4, 0$ y -1 son raíces de multiplicidad 2

563. Grado $6, 3$ es una raíz de multiplicidad $3, 2$ es una raíz de multiplicidad 1 y -1 es una raíz de multiplicidad 2

564. Grado 5, $\frac{1}{2}$ es una raíz de multiplicidad 2, 3 es una raíz de multiplicidad 3 y $f(2) = -18$

565. Grado 3, una sola raíz real

Encuentre las raíces de los siguientes polinomios y diga qué multiplicidad tiene cada una de ellas:

566. $P(x) = x^3(x-3)^2(x+1)(x-2)^3$

567. $P(x) = (3x-2)^4(2x+1)^2$

568. $P(x) = x(x+3)^2(2x-1)^3$

569. $P(x) = (5x-3)^3(2x+3)^2$

570. $P(x) = (2x+1)(3x-2)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$

571. $P(x) = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)^2$

572. $P(x) = (5x-3)^4(x-1)^3$

573. $P(x) = (x-2)^3(3x-4)^2$

¿Cuáles de los siguientes polinomios cuadráticos son irreductibles sobre R?

574. $Q(x) = x^2 - 2x + 2$

575. $Q(x) = x^2 + x + 1$

576. $Q(x) = -x^2 - 5x - 1$

577. $Q(x) = x^2 + 4x - 3$

578. $Q(x) = -2x^2 + 4x + 3$

579. $Q(x) = 2x^2 - 3x + 2$

580. $Q(x) = 5x^2 - 3x + 2$

581. $Q(x) = 6x^2 - 4x + 1$

582. $Q(x) = 7x^2 - x + 1$

583. $Q(x) = 5x^2 - 4x + 2$

584. $Q(x) = 2x^2 - 1$

585. $Q(x) = 2x^2 - x + 2$

586. $Q(x) = 5x^2 - 3x - 2$

587. $Q(x) = 3x^2 - x - 1$

588. $Q(x) = x^2 + x + 4$

Demuestre que el número es un cero de la multiplicidad dada y exprese $P(x)$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreductibles sobre R.

589. $P(x) = 5x^3 - 21x^2 + 24x - 4;$
$x_1 = 2$ *multiplicidad* 2

590. $P(x) = 27x^5 - 54x^4 - 72x^3 - 26x^2 - 3x;$
$x_1 = -\frac{1}{3}$ *multiplicidad* 3

591. $P(x) = 2x^5 + 17x^4 + 56x^3 + 88x^2 + 64x + 16;$
$x_1 = -2$ *multiplicidad* 4

592. $P(x) = 9x^5 + 6x^4 - 11x^3 - 4x^2 + 4x;$
$x_1 = -1$ *multiplicidad* 2

593. $P(x) = x^4 - 16x^3 + 90x^2 - 200x + 125;$
$x_1 = 5$ *multiplicidad* 3

594. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8;$
$x_1 = 2$ *multiplicidad* 3

595. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 12x + 16;$
$x_1 = 2$ *multiplicidad* 2

596. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 48x - 45;$
$x_1 = -3$ *multiplicidad* 2

597. $P(x) = 24x^5 - 116x^4 + 190x^3 - 99x^2 - 27x + 27$
$x_1 = \frac{3}{2}$ *multiplicidad* 3

598. $P(x) = 2x^4 - 15x^3 + 38x^2 - 39x + 18:$
$x_1 = 3$ *multiplicidad* 2

599. $P(x) = 15x^3 - 19x^2 + 12x - 4;$
$x_1 = \frac{2}{3}$ *multiplicidad* 1

600. $P(x) = 8x^4 - 21x^3 + 20x^2 - 9x + 2;$
$x_1 = 1$ *multiplicidad* 2

601. $P(x) = 2x^5 - 24x^4 + 95x^3 - 116x^2 - 48x + 64;$
$x_1 = 4$ *multiplicidad* 3

602. $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 12;$
$x_1 = 2$ *multiplicidad* 2

603. $P(x) = x^3 - 2;$
$x_1 = \sqrt[3]{2}$ *multiplicidad* 1

Demuestre que los siguientes polinomios no tienen raíces racionales:

604. $P(x) = 4x^4 - 14x^2 + 6$

605. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x - 5$

606. $P(x) = 9x^3 - 4x - 1$

607. $P(x) = 3x^4 + 12x^3 - 3x^2 + 24x - 18$

608. $P(x) = 4x^4 + 20x^3 + 7x^2 + 15x + 3$

609. $P(x) = 30x^4 - 38x^3 + 29x^2 - 11x + 2$

610. $P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x - 1$

611. $P(x) = 6x^4 - 7x^2 + 2$

612. $P(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 1$

613. $P(x) = x^3 - 2$

Exprese $P(x)$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreductibles sobre $\boldsymbol{R}$:

614. $P(x) = 6x^4 - 13x^3 + 13x - 6$

615. $P(x) = 12x^3 - 34x^2 + 30x - 8$

616. $P(x) = 4x^4 - 9x^2 - 13x^3 + 39x - 9$

617. $P(x) = 10x^3 - 69x^2 + 131x - 42$

618. $P(x) = 4x^3 + 3x + 2$

619. $P(x) = 12x^4 - 30x^2 + x^3 - 2x + 12$

620. $P(x) = 12x^5 - 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + x + 1$

621. $P(x) = 30x^4 - 119x^3 + 138x^2 - 78x + 20$

622. $P(x) = -2x^3 + 8x^2 - 5x - 6$

623. $P(x) = 30x^3 + 13x^2 - 13x - 6$

EJERCICIOS II

1. ¿Para qué valores de x es verdad que $x \leq |x|$?

2. ¿Para qué valores de x es verdad que $x = |x|$?

3. Utilice la definición del valor absoluto para demostrar que:

   a) $|xy| = |x||y|$

   b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

4. Simplifique la expresión:

$$\frac{\frac{a}{a+2} - \frac{4}{a+2}}{a - 3 - \frac{6}{a+2}}$$

5. Simplifique la expresión y racionalice el denominador:

$$\left(\frac{-125x^4}{z^6 y}\right)^{2/3}$$

6. Racionalice el denominador:

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

7. Simplifique y después evalúe para $x = \frac{3}{4}$:

$$\frac{12x^2 - x - 6}{4x - 3}$$

8. ¿Qué condiciones deben cumplir x y y para que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y?$$

9. Pruebe que:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

10. Complete la tabla:

a	$\sqrt[3]{3}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$\sqrt[3]{27}$	$2\sqrt[3]{3}$
b	7	20	12	5
$a^2 + b^2$				
$\frac{a}{\sqrt[3]{3}} - b^2$				
$(\sqrt[3]{3}\, a + 5b)0.2$				

11. Exprese $Q(x)$ como producto de factores lineales o cuadráticos irreductibles sobre R:

a) $Q(x) = 6x^5 + 15x^3 - 13x^4 - 15x^2 + 9x - 2$

b) $Q(x) = 2x^4 - 7x^2 - 7x^3 + 35x - 15$

CAPÍTULO 4

Ecuaciones

Una ***ecuación algebraica*** en la variable x es un enunciado en el que se dice que dos expresiones de x son iguales. Por lo regular, a la variable de una ecuación se le llama ***incógnita***. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto t, x, y, x, w. Una ***raíz*** o ***solución de una ecuación*** es cualquier número que, al sustituirlo por la incógnita, convierte la ecuación en una proposición verdadera. ***Resolver una ecuación*** quiere decir encontrar todas sus raíces o demostrar que las raíces no existen. Para resolver una ecuación se cambia la ecuación original por una más sencilla, que tiene las mismas raíces. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son ***equivalentes***. Las siguientes operaciones garantizan la equivalencia:

a. Sumar o restar la misma expresión algebraica en ambos lados de la ecuación.

b. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el cero.

c. La ecuación tipo $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ podemos remplazarla por el sistema equivalente $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$, o resolver la ecuación $f(x) = 0$, y después rechazar las raíces que convierten en cero al denominador $g(x)$.

Objetivos

- 4.1 Ecuación lineal
- 4.2 Ecuación cuadrática
- 4.3 Ecuaciones fraccionarias y radicales
- 4.4 Sistemas de ecuaciones

Algunas veces tenemos que aplicar otras operaciones que no necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes: multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la incógnita; elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente, etc. Al aplicar tales operaciones, pueden salir raíces llamadas ***raíces extrañas***, que no son soluciones de la ecuación dada. Para confirmar si las raíces obtenidas son soluciones, es necesario sustituir cada una de ellas en la ecuación inicial y rechazar las que no son válidas.

■ Ecuación lineal

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$. Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz. Para resolver una ecuación lineal le aplicamos ciertas operaciones matemáticas hasta que obtenemos una ecuación equivalente en la que la incógnita queda aislada de un lado de la ecuación.

■ Ecuación cuadrática

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. Una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, una solución (en este caso se dice que las dos soluciones coinciden) o no tener soluciones (por lo que se dice que las soluciones son imaginarias):

Tipo de ecuación	Fórmulas de soluciones
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o $x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2}) - ac}}{a}$ si b es par.
$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x^2 = -\dfrac{b}{a}$

■ PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE ECUACIONES CUADRÁTICAS (TEOREMA DE VIETE) ■

Si x_1 y x_2 son dos raíces de un trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ y } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Estas fórmulas son cómodas para la comprobación de soluciones cuadráticas y para formar ecuaciones cuadráticas.

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

Si x_1 y x_2 son dos raíces de un trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ (o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$), entonces $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ecuaciones fraccionarias y radicales

Una ***ecuación fraccionaria*** es la ecuación en la que una incógnita está en el denominador. Una ecuación ***radical*** es aquella en la que una incógnita aparece dentro de un radical. Cuando se resuelve una ecuación fraccionaria o una radical, con frecuencia se aplican operaciones que no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Estas operaciones incluyen la multiplicación de ambos miembros por una expresión que contenga la variable y elevar ambos miembros a la misma potencia. Las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación dada, para rechazar aquellas que realmente no lo son.

Sistemas de ecuaciones

Al conjunto de ecuaciones con dos o más variables se le conoce como ***sistema de ecuaciones***. El ***conjunto solución de un sistema de ecuaciones*** está formado por todas las soluciones comunes a las ecuaciones del sistema.

EJERCICIOS I

Compruebe si los números dados son soluciones de las ecuaciones correspondientes:

1. $2x + 1 = 7, \quad x = 1$
2. $3x - 6 = 1 - 4x, \quad x = 1$
3. $2y + 4 = 6y - 8, \quad y = 2$
4. $\frac{2}{z} - 7 = -\frac{19}{3}, \quad z = 3$
5. $\frac{x + 10}{2x - 6} = \frac{11 - x}{5 - x}, \quad x = 4$
6. $(x - 3)(x - 2) = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2$
7. $x^2 - 9x + 20 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 6$
8. $\frac{7}{y + 1} + \frac{15}{3y - 1} = 8, \quad y_1 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{4}{3}$

10. $2w - 2 = 10 - 2(w - 1), \quad w = 4$

11. $2x + \frac{3}{x} = 4, \quad x = 0$

Resuelva las ecuaciones siguientes:

12. $2x + 3 = 7$

13. $3x + 1 = 5 - x$

14. $3 + 2(x - 4) = 6$

15. $7x + 4(2 - x) = 3 + 5x$

16. $4x - 6 = -2x - 18$

17. $\dfrac{3x + 1}{2} = 5$

18. $\dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{x + 1}{2}$

19. $1 - 2(6x - 5) = 4(6 - x) + 3$

20. $3[7y - 2 + 4(y + 1)] = -3(3y - 3)$

21. $5 + \dfrac{20 - 5y}{5} = 1 + \dfrac{3y + 6}{3}$

22. $\frac{1}{2}(-2x + 20) + \dfrac{3x}{4} = 16 - \dfrac{19 + x}{3}$

23. $12 - \dfrac{3z + 4}{2} + \dfrac{z - 2}{3} = 2 - \dfrac{5 - z}{3}$

24. $\frac{1}{8}\left[1 + \frac{1}{2}(3x + 5)\right] = \frac{1}{16}$

25. $\dfrac{2}{x - 3} = \dfrac{1}{12 + x}$

26. $3 + \dfrac{5x}{2} = \dfrac{x}{7}$

27. $\dfrac{3(x - 5)}{10} + 2 = \dfrac{2x}{3}$

28. $7 + \dfrac{5x - 6}{3} = \dfrac{11 + 9x}{3}$

29. $-(5 - x) = \frac{2}{3}(x + 4)$

30. $7 + 3(x - 4) = 2 + \dfrac{x + 7}{2}$

31. $x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} = -\dfrac{x}{12}$

32. $x^2 + (x + 1)^2 = 2x^2$

33. $(x - 2)^2 - 4x^2 = 3(1 - x^2)$

34. $(x + 1)(x - 4) + 2x = x(x + 3)$

35. $x^2(x - 5) + 7(x + 1) = x(x^2 - 5x + 1) + 1$

36. $\dfrac{x - 1}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3x - 2}{3}$

37. $\dfrac{x - 3}{2} = 2 - \dfrac{x - 2}{3}$

38. $2(3 - x) - 4 = 2(2x - 5)$

39. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{3 - 9x}{9} - \dfrac{2x}{3} = 0$

40. $\dfrac{x}{2} + 2 - \dfrac{x}{12} = \dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{4}$

41. $4 - \dfrac{10x + 1}{6} = 4x - \dfrac{16x + 3}{4}$

42. $\frac{1}{2}(x - 1) - (x - 3) = \frac{1}{3}(x + 3) + \frac{1}{6}$

43. $\dfrac{5(x + 2)}{12} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{22 - x}{36} = 3x - 20 - \dfrac{8 - x}{12} - \dfrac{20 - 3x}{18}$

44. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2} = 1$

45. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{12}{x}$

46. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{1 - x}{9} = \dfrac{1}{6}$

47. $\dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{x} + 1$

48. $\dfrac{10}{x - 2} - \dfrac{4}{x^2 - 4} = -\dfrac{4}{x + 2}$

49. $x^2 - 4x + 4 = 0$

50. $x^2 + 5x + 6 = 0$

51. $x^2 - 4 = 0$

52. $x^2 - 1 = 0$

53. $x^2 + 8x = -16$

54. $2x + 1 = -x^2$

55. $x^2 - 2x - 8 = 4x$

56. $x(x - 2) - 12 = 3$

57. $x(2x + 1) = 1$

58. $(2x - 1)^2 = \dfrac{25}{9}$

59. $x^2 - \dfrac{36}{25} = 0$

60. $9x^2 - 16 = 0$

61. $(y-5)^2 = -4$

62. $x^2 = 1 - x$

63. $2x^2 + 1 = 4x$

64. $2y^2 + 3 = 6y$

65. $x(6x-1) = 2$

66. $4x^2 - 3 = -11x$

67. $2x^2 = 1 - x$

68. $\frac{1}{2}(x^2 + x) = 1$

69. $\frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{7}{6}x$

70. $(11x+13)^2 - 4(11x+13) - 21 = 0$

71. $9\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}\right) + 1 = 0$

72. $\left(3 + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(3 + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

73. $(3.7t + 1.5)^2 + (3.7t + 1.5) + 5 = 0$

74. $(15x-2)^2 - 45x + 2 = 0$

75. $6(13-2x)^2 - 10x + 66 = 0$

76. $-2x^2 + 3x + 3 = 0$

77. $(2x+1)^2 + 6x - 2 = 0$

78. $13x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0$

79. $0.3x^2 - x - 0.8 = 0$

80. $x^2 - 2\pi x - 3\pi^2 = 0$

81. $\sqrt{5}x^2 - 2x - 3\sqrt{5} = 0$

82. $x^2 + \left(4\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x - 4\sqrt{6} = 0$

83. $(x-2)^2 = x + 4 + 2(x-5)(x+5)$

84. $x^2 - 15x - 26 = (7-x)(7+x) - (x+5)^2$

85. $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{2x+4} = \frac{x+2}{3x+6}$

86. $\frac{6}{x-2} + \frac{3x}{2} = 3$

87. $\frac{5x-22}{x^2-6x+9} - \frac{5}{x} = \frac{11}{x^2-3x}$

88. $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x-3}{x^2-7}$

89. $x - \frac{4}{x} - 7\left(x - \frac{4}{x} + 12\right) = 0$

90. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1$

91. $\dfrac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = x + 2$

92. $1 - \frac{1}{x} = x + 1 - \frac{2}{x}$

93. $x = \frac{15}{x-2}$

94. $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

95. $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$

96. $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}$

97. $\frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}$

98. $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$

99. $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$

100. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1$

101. $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$

102. $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$

103. $\frac{12}{3x-2} - \frac{8}{3x+2} + \frac{33x-2}{4-9x^2} = 0$

104. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{2-x} = \frac{x^2}{x^2-4}$

105. $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6}$

106. $\frac{8}{2x+1} - \frac{10x-4}{(2x+1)^2} = \frac{12x^2+20x+27}{(2x+1)^3}$

107. $\frac{10x+1}{2(x+1)} - \frac{8x^2+6x-8}{4(x+1)^2} = 3$

108. $\frac{3}{2} - \frac{8x^2+13x+21}{4x^2+20x+25} = \frac{4-x}{2x+5}$

109. $\frac{7}{x-2} + \frac{3}{x-10} = \frac{2x+10}{x^2-12x+20}$

110. $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$

111. $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$

112. $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} - \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$

113. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

114. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

115. $(x^2-9)(x^2-16) = 15x^2$

116. $x^4 - 3(x^2-1) = 7(x^2-3)$

117. $x^4 - 8(x^2-1) + 4 = 0$

118. $(x^2-16x)^2 - 2(x^2-16x) - 63 = 0$

119. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) - 12 = 0$

120. $(x-3) - 2\sqrt{x-3} - 3 = 0$

Utilice las raíces para factorizar los siguientes polinomios:

121. $6x^2 + 5x + 1$

122. $4x^2 + 19x - 5$

123. $2x^2 - 7x + 3$

124. $3x^2 - 5x + 2$

125. $4x^2 - 11x - 3$

126. $5x^2 + 13x + 6$

127. $3x^2 - 5x - 12$

128. $5x^2 + 18x - 8$

129. $4 - 3x^2 - 4x$

130. $15x - 4x^2 - 9$

131. $5x + 2 - 3x^2$

132. $-19x + 14 - 3x^2$

133. $5x + 12 - 2x^2$

134. $17x - 5x^2 - 6$

135. $2x^2 - 7x - 15$

Construya una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

136. $3, -1$

137. $\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$

138. $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

139. $-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}$

140. $\sqrt{2}; -2$

Utilice el teorema de Viete para hallar:

141. $4x_1^2 + 4x_2^2$ si $2x^2 - 7x + 2 = 0$

142. $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ si $3x^2 - 6x - 2 = 0$

143. $x_1^2 + x_2^2 + 7x_1x_2$ si $5x^2 + 15x + 9 = 0$

144. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ si $x^2 + 7x + 2 = 0$

145. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1x_2}{9}$ si $x^2 - 4x - 3 = 0$

146. $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}$ si $x^2 - 4x - 3 = 0$

147. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_1x_2$ si $2x^2 + 9x - 1 = 0$

148. $x_1^2 + x_2^2 - \frac{x_1x_2}{2}$ si $8x^2 - 2x - 3 = 0$

149. $x_1^2 + x_2^2$ si $2x^2 + \sqrt{6}x - 1 = 0$

150. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2$ si $x^2 + 3x - 1 = 0$

Encuentre el valor de p teniendo en cuenta las siguientes condiciones para x_1 y x_2:

151. $x^2 - 2x + p = 0;\ 7x_2 - 4x_1 = 47$

152. $x^2 + px - 16 = 0;\ x_1 = -4x_2$

153. $x^2 - px + 18 = 0;\ x_1 = 2x_2$

154. $x^2 - 15x + p = 0;\ x_1 = 2x_2$

155. $x^2 + 6x + p = 0;\ x_1 - x_2 = 2$

156. $x^2 - 12x + p = 0;\ x_1 = 3x_2$

157. $x^2 + px + 4 = 0;\ x_1 - x_2 = 3$

158. $x^2 - px + 3 = 0;\ x_1 - x_2 = 2$

159. $x^2 - 5x + p = 0;\ 7x_1 - 5x_2 = 13$

160. $x^2 - 8x + p = 0;\ 3x_1 - 4x_2 = 10$

Deduzca la ecuación cuadrática y la segunda raíz a partir de las condiciones dadas:

161. $x^2 - (2p + 3)x + 5p + 6 = 0;\ x_1 = 12$

162. $x^2 - (3p + 1)x + 10p + 5 = 0;\ x_1 = 11$

163. $x^2 + (4 - 2p)x - 6p + 3 = 0;\ x_1 = 7$

164. $x^2 - (2p + 1)x + 4p + 4 = 0;\ x_1 = 8$

165. $x^2 - (4p + 1)x + 7p + 2 = 0;\ x_1 = 15$

166. $x^2 - (3p - 3)x + 11p + 3 = 0;\ x_1 = 10$

167. $x^2 - (5p - 4)x + 10p - 1 = 0;\ x_1 = 13$

168. $x^2 - (3p - 2)x + 5p - 2 = 0;\ x_1 = 14$

169. $x^2 - (3p - 4)x + 11p - 5 = 0;\ x_1 = 8$

170. ¿Para qué valor m la ecuación $x^2 - 2(m + 2)x + 4m + 5 = 0$ tiene dos raíces que cumplen con la condición $x_2 - x_1 = 2$?

La ecuación $x^2 + px + q = 0$ tiene soluciones x_2 y x_1. Escriba la ecuación que tiene como solución los números:

171. nx_2 y nx_1

172. $x_2 + m$ y $x_1 + m$

173. x_2^2 y x_1^2

174. Demuestre que si la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ tiene raíces, entonces la suma de éstas es igual a cero.

175. ¿Para qué valor de m la ecuación $(m + 1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$ tiene dos raíces diferentes?

176. ¿Para qué valor de m la ecuación $x^2 - (2m - 3)x + 2m + 5 = 0$ tiene dos raíces reales con signos diferentes?

177. ¿Para qué valor de m la ecuación $x^2 - (m - 5)x + (m^2 + m + \frac{1}{4}) = 0$ tiene dos raíces con signos iguales?

178. ¿Para qué valor de m en la ecuación $x^2 - (m - 5)x + (m^2 - 6m + 5) = 0$ se cumple que $x_2^2 + x_1^2 > 7$?

Resuelva las siguientes ecuaciones con incógnita x. Verifique el número de soluciones que dependen de m y n.

179. $x^2 - m^2 = 2mx + 1$

180. $x^2 - mx + m = 1$

181. $x^2 + mn = (m + n)x$

182. $x^2 + 2mx = n$

183. $x^2 - mx + mn = n^2$

184. $n\left(\frac{x}{m} - n\right) = x\left(\frac{x}{n} - m\right)$

¿Para cuáles valores de a, b y c las expresiones $F(x)$ y $G(x)$ son iguales?

185. $F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1};\quad G(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-1}$

186. $F(x) = 1 + \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2};$

$$G(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$$

187. $F(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1};$

$$G(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^3+2x^2+2x+1}$$

188. $F(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1};$

$$G(x) = \frac{3x^2-x}{x^3+1}$$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

189. $\dfrac{a}{ac+bc} + \dfrac{a-b}{2bx} = \dfrac{a+b}{2bc} - \dfrac{b}{ax+bx}$

190. $|2x - 1| = 5$

191. $|3 - 2x| = 3$

192. $|5 - x| = 2$

193. $|3 - 6x| = 9$

194. $|5 - 3x| = 7$

195. $\left|4 - \frac{1}{2}x\right| = 8$

196. $\left|\frac{1}{3}x - 1\right| = 7$

197. $\left|\frac{1}{4}x + 1\right| = 3$

198. $\left|4 + \frac{1}{2}x\right| = 1$

199. $|7 + 2x| = 3$

200. $|2x - 1| = 3x + 6$

201. $|4x - 3| = 8 - 6x$

202. $|5 + x| = 1 - 2x$

203. $|7 - 2x| = 3x + 1$

204. $|4 - 3x| = 5x - 1$

205. $|6x - 7| = 7x + 1$

206. $|4x - 1| = 6x - 3$

207. $|7x + 1| = 9x + 1$

208. $|5x - 3| = 6x + 1$

209. $|8x - 4| = 9x - 5$

210. $|x + 1| = 2|x - 1| + x$

211. $|3x - 1| + |5x - 2| = 5$

212. $|x + 1| + |x - 3| = 6$

213. $|x - 1| + |x - 2| = 3$

214. $|2x - 1| + |x + 1| = 9$

215. $|x - 5| + |3x + 1| = 20$

216. $|2x + 1| + |x - 1| = 6$

217. $|x - 2| + |3x + 1| = 11$

218. $|4x + 3| + |x - 1| = 12$

219. $|x - 3| + |2x + 1| = 10$

220. $|2x + 1| + |2x - 1| = 2$

221. $|3x + 2| + |3x - 2| = 4$

222. $|2x - 1| + |4 - 2x| = 3$

223. $|4x - 5| + |9 - 4x| = 4$

224. $|5x + 1| + |5x + 9| = 8$

225. $|2x - 7| + |6 - 2x| = 13$

226. $|6x - 3| + |9 + 6x| = 12$

227. $|7x - 1| + |8 - 7x| = 7$

228. $|5x - 4| + |5x - 14| = 10$

229. $|3x + 4| + |3x - 8| = 12$

230. $|2x^2| - 5|x| - 3 = 0$

231. $2x^2 + 4x - 5|x + 1| = 1$

232. $3x^2 - 6x + 1 = |5x - 1|$

233. $12x^2 + 12x = 7|2x + 1| + 3$

234. $x^2 - 2x = 3|x - 1| + 3$

235. $8x^2 - 8x - 2 = 7|2x - 1|$

236. $x^2 - 4|x + 1| = 4$

237. $2x^2 - 12x + 13 = 3|x - 3|$

238. $4x^2 + 12x = 5|2x + 3| - 3$

239. $2x^2 - 8x - 3|x - 2| = 6$

240. $|6x - 8 - x^2| = 1$

241. $|6x - x^2| = 9$

242. $|4x - x^2 - 3| = 1$

243. $|2x - x^2| = 1$

244. $|8x - x^2 - 12| = 4$

245. $|8 - 2x - x^2| = 9$

246. $|3 - 2x - x^2| = 4$

247. $|16 + 6x - x^2| = 25$

248. $|10x - x^2 - 16| = 9$

249. $|6x - x^2 - 5| = 4$

250. $|x^2 + 2x - 81| + 4x + 8 = 0$

251. $|2x^2 - 9x - 5| = 3x - 5$

252. $|2x^2 - 3x - 2| = 3x - 2$

253. $|2x^2 - 9x - 5| = 3x$

254. $|x^2 - 6x + 5| = 5 - 2x$

255. $|2x^2 + 9x - 5| = 6x$

256. $|x^2 - x - 12| = 2x - 2$

257. $|x^2 - 4x - 5| = 5 - 3x$

258. $|x^2 + 3x - 10| + 4 + 2x = 0$

259. $2x + |x - 1| = 2$

260. $2x^2 + |x| = 1$

261. $|x^2 - x| = x - 1$

262. $x + |x - 1| = 1$

263. $(2x - 1)|x - 1| = x$

264. $|x - 1| + |x - 2| + |x + 1| + |x + 2| = 6$

265. $|x - 1| + |x - 2| = |x|$

266. $\dfrac{x}{|x - 1|} = 2x - 1$

267. $\dfrac{|5 - x|}{|x - 4|} = x$

268. $\dfrac{4x^2 - 20}{2x - 5} + 1 = \dfrac{|2x|}{2x - 5}$

269. $|x^2 - 4| = 5$

270. $|x^2 - 4| = 4$

271. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 9$

272. $|x^2 - 2x - 3| = -4x$

273. $2x + |x - 3| = 2$

274. $2|x| + |x - 3| = 2$

275. $|x - 1| + |2x + 3| = 0$

276. $x^2 - |5x + 6| = 0$

277. $x^3 - 4x^2 - |5x - 20| = 0$

278. $2x^4 + 5 = |5x^3 + 2x|$

279. $3x^2 = |x^3 - 4x|$

280. $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$

¿Para cuáles valores son verdaderas x, y en las siguientes ecuaciones?

281. $|x| + 5 = |x + 5|$

282. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

283. $|x| - |y| = 0$

284. $|2x + 1| = 1$

285. $|3 - x| = 4$

286. $|x| + |x + 1| = 3$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

287. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3 - x}} = 0$

288. $\dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{3x - 1}} = 0$

289. $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{\sqrt{x - 1}} = 0$

290. $\dfrac{5x^2 - 4x - 1}{\sqrt{1 - 2x}} = 0$

291. $\dfrac{5x^2 - 14x - 3}{\sqrt{x + 1}} = 0$

292. $\dfrac{3x^2 + 7x + 2}{\sqrt{x + 1}} = 0$

293. $\dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{2 - x}} = 0$

294. $2x - \sqrt{3.5 + x} = -1$

295. $2x + \sqrt{x^2 + x - 1} = 3$

296. $\sqrt{x^2 + 8} - 1 = 2x$

297. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x - 1}$

298. $\sqrt{10x - 7 - 2x^2} + 3 = x$

299. $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5$

300. $x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1$

301. $\sqrt{2x^2 + 8x + 1} - x = 3$

302. $\sqrt{3 - x} - \sqrt{2 + x} = 1$

303. $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x - 2}} = 0$

304. $\dfrac{3x^2 - 14x - 5}{\sqrt{x - 4}} = 0$

305. $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = 0$

306. $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 + 5x - 3} = 0$

307. $\dfrac{5x^2 - 7x + 2}{5x^2 - 12x + 4} = 0$

308. $\dfrac{3x^2+10x+3}{3x^2-4x+1}=0$

309. $\dfrac{2x^2-13x-7}{6x^2+5x+1}=0$

310. $\dfrac{3x^2-16x+5}{3x^2-7x+2}=0$

311. $\dfrac{2x^2-11x-6}{2x^2-x-1}=0$

312. $\sqrt{2x-1}+\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}}=5$

313. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-3}}+6\sqrt{\dfrac{x-3}{2x-5}}=\frac{11}{2}$

314. $\sqrt{4x+5}-\dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}=\frac{7}{3}$

315. $2\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}=3$

316. $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}}=\frac{5}{2}$

317. $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$

318. $\dfrac{x-2}{4}+9\sqrt{\dfrac{x-2}{4}}=10$

319. $\sqrt{x^2-7}-\dfrac{6}{\sqrt{x^2-7}}=1$

320. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}+2\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=3$

321. $\sqrt{13x-30}-2\sqrt{x-3}=3\sqrt{x-2}$

322. $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{x+1}=\sqrt{x-5}$

323. $\sqrt{10x-21}-3\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}$

324. $\sqrt{9x-11}-\sqrt{5x+1}=2\sqrt{x-3}$

325. $\sqrt{6x-2}-2\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-6}$

326. $\sqrt{5x-3}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-1}$

327. $\sqrt{7x+7}-2\sqrt{x+2}=\sqrt{3x-1}$

328. $\sqrt{8x+4}-2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+2}$

329. $\sqrt{15x-2}-3\sqrt{x+2}=\sqrt{6x-20}$

330. $(3x^2-16x+16)\sqrt{x^2-2x-3}=0$

331. $(x^2+2x-8)\sqrt{6+x-x^2}=0$

332. $(x^2+x-2)\sqrt{x^2-x-2}=0$

333. $(2x^2+x-1)\sqrt{x-x^2}=0$

334. $(x^2-2x-3)\sqrt{x^2+6x+8}=0$

335. $(11x-2x^2-5)\sqrt{x^2-x-2}=0$

336. $(4x-x^2)\sqrt{x^2+x-2}=0$

337. $(x^2-2x-3)\sqrt{6-x^2-x}=0$

338. $(2x^2-x-1)\sqrt{x^2-2x}=0$

339. $(x^2-4x+3)\sqrt{6-x-x^2}=0$

340. $3(4x+3)\sqrt{16x+17}=(4x+3)(8x+5)$

341. $x\sqrt{2x+1}=x^2+x$

342. $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$

343. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

344. $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$

345. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$

346. $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$

347. $(x-4)\sqrt{x-5}=(x-4)(x-7)$

348. $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$

349. $(x+2)\sqrt{2x+3}=(x+2)(x-6)$

350. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$

351. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

352. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2$

353. $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4$

354. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=4$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

355. $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x-y=2 \end{cases}$

356. $\begin{cases} x^2+y^2=90 \\ x+y=12 \end{cases}$

357. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

358. $\begin{cases} x^2+y^2=4\frac{4}{9} \\ 3xy=4 \end{cases}$

359. $\begin{cases} x^2+y^2=2a^2 \\ xy=a^2 \end{cases}$

360. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases}$

361. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=57 \\ x^2-xy+y^2=43 \end{cases}$

362. $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=7(x-y) \\ 2x-y=5 \end{cases}$

363. $\begin{cases} x^2+y^2-5(x+y)=8 \\ x^2+y^2-3(x+y)=28 \end{cases}$

364. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2} \end{cases}$

365. $\begin{cases} 4x^2+10xy=6x-7 \\ 4x-3=2x^2+6(xy+1) \end{cases}$

366. $\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4} \\ \frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{10}{3} \end{cases}$

367. $\begin{cases} y^2-xy=-12 \\ x^2-xy=28 \end{cases}$

368. $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5 \\ x^{-2}+y^{-2}=13 \end{cases}$

369. $\begin{cases} 3x^2+5y^2=5 \\ 2x^2+3y^2=3 \end{cases}$

370. $\begin{cases} 4x^2+7y^2=16 \\ 2x^2-9y^2+4.5=0 \end{cases}$

371. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$

372. $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9 \\ \frac{x^2+xy}{y}=20 \end{cases}$

373. $\begin{cases} x^2+3y^2+35=0 \\ y^2+4x=0 \end{cases}$

374. $\begin{cases} (2y^2+x)^2-25y^2=0 \\ y^2+x-4=0 \end{cases}$

375. $\begin{cases} x^2-\sqrt{xy}=-1 \\ 3x^2-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

376. $\begin{cases} 2x^2+3\sqrt[4]{y}=24 \\ x^2-\sqrt[4]{y}=7 \end{cases}$

377. $\begin{cases} 2x^2-7\sqrt{y}=15 \\ x^2+4\sqrt{y}=45 \end{cases}$

378. $\begin{cases} 7\sqrt{x}-2y^2=6 \\ 3\sqrt{x}-y^2=-1 \end{cases}$

379. $\begin{cases} 3\sqrt{x}-y^2=5 \\ 2\sqrt{x}+3y^2=62 \end{cases}$

380. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91 \\ x+\sqrt{xy}+y=13 \end{cases}$

381. $\begin{cases} 7\sqrt{x}-3y^2=1 \\ 2\sqrt{x}+y^2=17 \end{cases}$

382. $\begin{cases} x^2+y^2 = xy+13 \\ x+y = \sqrt{xy}+3 \end{cases}$

383. $\begin{cases} y^2+xy = 15 \\ x^2+xy = 10 \end{cases}$

384. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

385. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y} = 9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases}$

386. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2 = 5 \end{cases}$

387. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6} \\ xy = 5 \end{cases}$

388. $\begin{cases} x(x+y) = 9 \\ y(x+y) = 16 \end{cases}$

389. $\begin{cases} x^2+xy = 15 \\ y^2+xy = 10 \end{cases}$

390. $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y} = 15 \\ xy+\dfrac{x}{y} = 15 \end{cases}$

391. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2 = 160 \end{cases}$

392. $\begin{cases} x+y+xy = 5 \\ x^2+y^2+xy = 7 \end{cases}$

393. $\begin{cases} 5(x+y)+2xy = -19 \\ 15xy+5(x+y) = -175 \end{cases}$

394. $\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y) = 15 \\ x+xy+y = 11 \end{cases}$

395. $\begin{cases} x^2-2xy+y^2 = 0 \\ y^2-2xy+16 = 0 \end{cases}$

396. $\begin{cases} 4x^2-9y^2 = 0 \\ x^2-xy-y^2 = -1 \end{cases}$

397. $\begin{cases} x^2+y^2 = 65 \\ x+y = 5 \end{cases}$

398. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x} = 18 \\ x+y = 12 \end{cases}$

399. $\begin{cases} x+y = 8 \\ x^2-y^2 = 16 \end{cases}$

400. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ 2x-y = 5 \end{cases}$

401. $\begin{cases} x^2+y^2 = 40 \\ xy = -12 \end{cases}$

402. $\begin{cases} y-x = 1 \\ x^2+y^2 = 41 \end{cases}$

403. $\begin{cases} x+y = 14 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \end{cases}$

404. $\begin{cases} x^2+y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$

405. $\begin{cases} 3x-2y = 6 \\ xy = 120 \end{cases}$

406. $\begin{cases} x-y = 2 \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

407. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} mx + (2m - 1)y = 3m \\ x + my = m \end{cases}$$

¿Para qué valor del parámetro m, el sistema tiene solución con signos opuestos (diferentes)?

408. ¿Para qué valor del parámetro m el punto de intersección de las rectas $3x + 4y = 4m - 7$ y $x - 4y = m + 3$ está en el primer cuadrante?

409. ¿Para qué valores del parámetro a la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + 4y = 6 \end{cases}$$

cumple con las siguientes condiciones: $x > 1$ y $y > 0$?

410. ¿Para qué valores del parámetro m las raíces (x_1, x_2) de la ecuación $x^2 - 3mx + m^2 = 0$ cumplen con la condición: $x_1^2 + x_2^2 < 7$?

411. ¿Para qué valores del parámetro m, las raíces (x_1, x_2) de la ecuación $x^2 - mx - m = 0$ cumplen la condición: $x_1^3 + x_2^3 - x_1^3 \cdot x_2^3 > 0$?

412. Calcule el valor mínimo de la expresión $x^3 + y^3$ si se sabe que $x + y = 2$.

413. ¿Para qué valores del parámetro m, las raíces (x_1, x_2) de la ecuación $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - m + 4 = 0$ cumplen con la condición $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m - 1$?

414. ¿Para qué valores del parámetro a la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{ax} + 2$ tiene dos raíces (x_1, x_2) que cumplen con la condición $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 4$: $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$?

415. ¿Para qué valores del parámetro m, las raíces (x_1, x_2) de la ecuación $\frac{mx}{m - 1} + \frac{m + 1}{x} = x + 1$ cumplen con la desigualdad $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1$?

416. ¿Para qué valores del parámetro m, la expresión $(2m - 3)x^2 + (6 - m)x + \frac{m - 9}{7}$ toma sólo los valores positivos?

417. Halle el número que, disminuido en sus $\frac{2}{3}$ equivale a su duplo disminuido en 25.

418. ¿Qué número hay que restar de 25 para que la diferencia equivalga a la quinta parte de 25 aumentada en los $\frac{2}{3}$ del número que se resta?

419. La edad de Enrique es $\frac{3}{5}$ de la edad de Juan, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de Juan. Halle ambas edades.

420. Halle un número cuyos $\frac{2}{3}$ excedan a sus $\frac{3}{5}$ en 1.

421. Halle tres números enteros consecutivos tales que la diferencia de los $\frac{3}{2}$ del mayor con los $\frac{2}{5}$ del número intermedio equivale al menor aumentado en 5.

422. Una fábrica produjo hoy 1000 unidades más que ayer, y lo que produjo entre ayer y hoy es 2500 unidades más que los $\frac{2}{5}$ de lo que se produjo ayer. ¿Cuánto produjo hoy y cuánto ayer?

423. En tres días un hombre ganó 1477 pesos. Si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó cada día?

424. Una herencia de 198,300 pesos se va a repartir entre cinco personas de la siguiente forma: la segunda recibe la mitad de lo que recibe la primera; la tercera $\frac{1}{4}$ de lo que recibe la segunda; la cuarta $\frac{1}{5}$ de lo que recibe la tercera y la quinta $\frac{1}{10}$ de lo que recibe la cuarta. ¿Cuánto recibió cada persona?

425. Ricardo tiene 18 años más que su hijo; hace 18 años la edad de Ricardo era $\frac{5}{2}$ de la de su hijo. Halle las edades actuales.

426. El numerador de una fracción excede al denominador en 8. Si el denominador se aumenta en 17 el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Halle la fracción.

427. Una sucursal de una compañía de alimentos fabrica un pedido en 3 días. Mientras que otra lo hace en 5 días. ¿En cuánto tiempo pueden fabricar el pedido trabajando las dos sucursales?

428. Dos automóviles parten de dos ciudades A y B distantes entre sí 240 km y van uno hacia el otro. El que parte de A va a 50 Km/h y el que parte de B va a 60 km/h ¿A qué distancia de A coincidirán?

429. Un tren de carga sale a las 13:00 horas a 52 km/h. A las 16:00 horas sale un tren de pasajeros en la misma dirección a una velocidad de 78 km/h. El tren de carga cambia de carril en un pueblo a 450 km de la partida. ¿Puede el tren de pasajeros conservar su carril sin chocar?

430. A un fabricante le cuesta 4500 pesos comprar las herramientas para producir cierto artículo. Si cada artículo producido tiene un costo de 80¢ por el material y la mano de obra y se puede vender todo lo que se produce a 1.10 pesos, ¿cuántos artículos pueden producirse para obtener 2500 pesos?

431. Un comerciante de automóviles usados compra dos en $52,000. Vende uno con una ganancia de 18% y al otro le pierde el 3%, con lo que aún obtuvo una ganancia de $6000 por la transacción completa. ¿Cuánto le costó cada automóvil?

432. Un comerciante quiere ofrecer 35 % de descuento en un artículo y aún así obtener 15% de utilidad. Si le cuesta $80 al comerciante, ¿cuál debe ser el precio etiquetado del artículo?

433. Un inversionista tiene $80,000 en inversiones al 10% y 12%. ¿Cuánto invierte en cada una si obtiene ingresos anuales de $9000?

434. El precio de venta de una televisión, después de un descuento del 25% es de $3800. ¿Cuál era el precio antes del descuento?

435. Una persona recibe un aumento salarial del 15% en un mes. Al siguiente mes decide trabajar menos tiempo, lo que le ocasiona una reducción del 10% de su salario. Si después del aumento y la reducción recibe $6540 al mes, ¿cuál era el salario original mensual?

436. Un editor fija el precio de un libro en $180 y desea vender 500 ejemplares. Por cada $5 de incremento, las ventas disminuirán en 70 ejemplares. ¿Cuál debe ser el precio del libro, con el fin de generar ingresos totales por ventas de $84,863?

437. La renta de un automóvil es de $1200 al día por cuota fija, y $2 adicionales por kilómetro. ¿Cuánto paga un cliente que conduce 143 kilómetros en un día?

438. Una compañía tiene costos fijos de $150,000 pesos al año y costos variables de $50 por unidad producida:

a. Halle la expresión del costo total por unidad que tiene la compañía si produce x unidades al año

b. ¿Cuál es en total el costo de producir 12,000 unidades al año?

439. La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (o centígrados) (C) y Fahrenheit (F) está dada por la ecuación: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a. ¿A cuántos grados Celsius equivalen 80 grados Fahrenheit?

b. ¿A cuántos Fahrenheit equivalen 0° Celsius?

440. Una persona tiene un salario anual de C pesos y recibe un aumento de q% pesos, seguido de un aumento de p% pesos. ¿Cuál es el nuevo salario de esta persona?

441. Un artículo se deprecia anualmente una cantidad equivalente al costo del artículo, dividida entre su vida útil. Supongamos que C es el costo del artículo y la vida útil es K años.

a. Encuentre una fórmula para el valor del artículo después de n años.

b. Un artículo costó $8500, con una vida útil de 10 años. ¿Después de cuántos años su valor será de $5100?

442. Un edificio de 12.8 metros está separado 6.4 metros de una barra de altura h. Se quiere poner una escalera del edificio al piso pasando por la barda, como se indica en la figura 4.1.

a. Exprese x, la distancia del borde de la escalera a la barda, en términos de h.

b. Si la barda tiene una altura de 4.8 metros, ¿a qué distancia está el borde de la escalera del edificio?

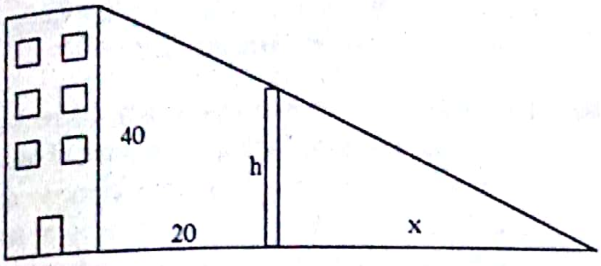


Fig. 4.1

443. Un recipiente de agua tiene forma de cono circular recto, como se muestra en la figura 4.2; mide 9 cm de radio y 36 cm de altura. El tanque tiene agua hasta una profundidad de h pies. Sea x el radio del círculo de la superficie de agua.

a. Exprese x en términos de h.

b. Exprese el volumen del agua en términos de x.

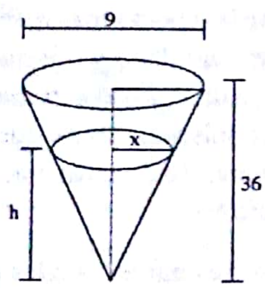


Fig. 4.2

444. Una llave puede llenar un depósito en 15 minutos y otra en 30 minutos. ¿En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos juntas?

445. Una llave puede llenar un depósito en 8 minutos, otra en 16 minutos y un desagüe puede vaciarlo, si está lleno, en 40 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, si estando vacío y abierto el desagüe se abren las dos llaves?

446. Se quiere utilizar cierto tipo de concreto que se obtiene de mezclar 2 partes de cemento, 3 partes de arena y 4 de piedra. Para hacer 1152 m^3 de concreto, ¿cuántos m^3 se necesitan de cada ingrediente?

447. Dos estaciones de ferrocarril están separadas 96 km. Un tren recorre la distancia en 40 minutos menos que otro. La velocidad del primero es 12 km/h mayor que la del segundo. Determine las velocidades de ambos trenes.

448. La distancia entre dos ciudades es de 66 km por ferrocarril y por barco 80.5 km. Un tren sale de la primera ciudad 4 horas después de la salida de un barco y llega a la otra ciudad 15 minutos antes que el barco. Determine las velocidades medias del tren y del barco si el primero tiene una velocidad de 30 km/h más rápido que el segundo.

449. Dos móviles se encuentran, uno va al norte y el otro al este. Dos horas después del encuentro están separados 60 km. Halle la velocidad de cada móvil, si la de uno de ellos es 6 km/h mayor que la del otro.

450. Un ciclista tiene que hacer un viaje de 30 km. Sale 3 minutos tarde, pero viaja a 1 km/h más de prisa y llega a tiempo. Determine la velocidad del ciclista.

451. Un tren tiene que recorrer 840 km en un tiempo determinado. En el punto medio tuvo que detenerse durante media hora y el resto del recorrido aumentó su velocidad en 2 km/h. ¿Cuánto tiempo empleó el tren en el viaje?

452. Se llena un tanque con alcohol puro. Se extrae una cierta cantidad de alcohol y se sustituye por agua; a continuación se extrae la misma cantidad de mezcla alcohol-agua, con lo que quedan 49 litros de alcohol puro en el tanque. Éste tiene una capacidad de 64 litros. ¿Qué cantidad de alcohol se extrajo la primera y la segunda vez?

453. Dos soluciones, la primera conteniendo 800 gramos y la segunda 600 gramos de ácido, se mezclan para producir 10 kg de una nueva solución. Determine los pesos de las soluciones primera y segunda en la mezcla, si el contenido de ácido en la primera solución es 10% mayor que en la segunda.

454. Un auditorio tiene las sillas dispuestas en filas, con el mismo número de sillas en cada fila. Si cada año se añaden b sillas a cada fila, y se reduce c el número de filas, el número total de localidades aumentará un décimo del número original. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

455. Dos móviles separados por 500 metros se mueven uno hacia el otro y se encuentran a 10 segundos. Si se mueven a las mismas velocidades que antes, pero en el mismo sentido, se encontrarán después de 15 segundos. Determine la velocidad de cada móvil.

456. ¿Cuántos litros de una solución de ácido al 14% deben de mezclarse para obtener 8 litros de una solución ácida al 10%?

457. Una aleación contiene 60% de plata y otra 55%. ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben combinar para obtener 60 g de una aleación con 80% de plata?

458. ¿Cuántos litros de una mecla que contiene 70% de alcohol se tendrán que agregar a 10 litros de una solución al 30%, para obtener una solución al 40%?

459. Se desea mezclar café colombiano, que vale \$2.50 por kg con uno cubano de \$1.80 por kg. ¿Cuántos kg de cada uno se deben usar para obtener 30 kg de una mezcla que valga \$2 por kg?

460. ¿Cuántos litros de agua destilada se deben mezclar con 50 litros de una solución con ácido al 20% para obtener una solución al 15%?

461. Un alumno necesita encontrar el producto de 136 con un número de dos cifras. En este número de dos cifras el número de unidades es el doble que el número de decenas. Si cambias las unidades con las decenas, entonces la diferencia del producto final con el producto inicial es de 1224. ¿Cuál es el producto inicial?

462. Una fracción es el doble de otra fracción. Si a cada una de estas fracciones las elevas al cuadrado y las sumas, el resultado es el mismo que si las elevas al cubo y las sumas. ¿Cuáles son las dos fracciones?

463. Tres tubos de ensayo contienen diferentes niveles de líquido. Para que tuvieran el mismo nivel, se hicieron tres transferencias de líquidos, así, $\frac{1}{3}$ del primero se vació al segundo, de lo que quedó en el segundo se vació $\frac{1}{4}$ al tercero, y lo que quedó en el tercero se vació $\frac{1}{10}$ al primero. Después de lo anterior, cada tubo quedó con 9 ml. ¿Cuántos ml tenía cada tubo inicialmente?

464. Un tanque se llena con dos llaves A y B. Si se abre solamente A, entonces tarda 22 minutos más que si sólo se abre B. Si se abre A y B juntas, el tanque se llena en una hora. ¿En qué tiempo lo llena cada llave por separado?

465. Juan se tarda a horas más que Bertha en realizar un trabajo dado y b horas más que Miguel. Si Juan y Bertha trabajan juntos, se tardan las mismas horas que Miguel. ¿En cuántas horas hace cada uno por separado este trabajo?

466. Encuentre tres números tales que el primero sea mayor que el segundo tantas veces como el segundo es mayor que el tercero. Si del primer número se restan las sumas de los otros dos, entonces el resultado es 2. Si al primer número se le suma la mitad de la diferencia del segundo y el tercer número, la respuesta es 9.

467. Un artículo costó en el otoño \$810. Un kg del mismo artículo, en el otoño costó \$10 menos que en verano. Así, por los mismos \$810 en el verano se compran 90 kg menos.

a. ¿Cuánto cuesta un kg del artículo en el verano?

b. ¿Cuántos kg se compran en el otoño?

468. Un bote recorre en 20 minutos una distancia de 8 millas a favor de la corriente, pero necesita 30 minutos para el viaje de regreso. Calcule la velocidad del bote en aguas inmóviles y la velocidad de la corriente.

469. Un hombre rema a 30 km/h en aguas tranquilas. El hombre rema corriente arriba y después regresa a su punto de partida en 20 minutos. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, ¿qué distancia remó el hombre corriente arriba?

470. Un avión recorre una distancia de 2200 km en 8 h cuando vuela a favor del viento, pero necesita 10 h 45 min, para realizar el vuelo de regreso. Calcule la velocidad del avión y la velocidad del viento.

471. Claudia invirtió cierta suma de dinero. Si hubiera invertido \$8000 más a una tasa 2% más baja, hubiera obtenido el mismo ingreso anual que con su inversión. Además, si hubiera invertido \$6500 menos a una tasa 2% mayor, su ingreso anual también hubiera sido el mismo. ¿Cuánto invirtió y a qué tasa?

472. Una fábrica elabora dos productos 1 y 2. Cada uno tiene que ser procesado por dos máquinas A y B. Cada unidad del producto 1 requiere 2 horas de procesamiento en la máquina A y 1 h 30 min en la B y cada unidad del producto 2 requiere 3 horas de procesamiento en la máquina A y 3 horas en la máquina B. Si la máquina A está disponible 350 horas al mes y la máquina B 300 horas, ¿cuántas unidades de cada tipo se podrán fabricar al mes si se utiliza el tiempo total disponible de ambas máquinas?

EJERCICIOS II

1. ¿Qué es una ecuación? ¿Cuáles operaciones pueden provocar que se pierdan las raíces de la ecuación dada?

2. Sin resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, encuentre $x_1^{-2} + x_2^{-2}$, donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación dada.

3. Construya una ecuación cuadrática con las raíces $\frac{1}{x_1}$ y $\frac{1}{x_2}$, si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax_2 + bx + c = 0$.

4. Para la ecuación $x^2 + px - 16 = 0$ encuentre el valor de p tal que se cumpla $\frac{x_1}{x_2} = -4$.

Resuelva para x:

5. $\dfrac{b}{x-a} + \dfrac{a}{x-b} = 2$

6. $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2.9$

(Sugerencia: $\dfrac{x^2+1}{x} = u$)

7. $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = 3$

8. $\sqrt[4]{18+5x} + \sqrt[4]{64-5x} = 4$

9. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4 \end{cases}$

(Sugerencia: $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = z$)

10. *a*) $|x| + |x-1| = 1$

b) $|x|^3 + |x-1|^3 = 9$

11. Una tienda vende café colombiano a \$2.50 la libra y café brasileño a \$1.80 la libra. Se produce una mezcla de 80 libras de café utilizando los dos tipos y se vende a \$2.00 la libra. ¿Cuántas libras de café de cada tipo deberán mezclarse para no alterar los ingresos?

CAPÍTULO 5

Desigualdades

Una ***desigualdad*** es un enunciado que compara dos expresiones algebraicas utilizando los símbolos mayor que, menor que, mayor o igual y menor o igual ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$).

- el símbolo $>$ (es mayor que) se define: $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo
- el símbolo $<$ (es menor que) se define: $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo
- el símbolo $\geq$ (es mayor que o igual a) se define: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$
- el símbolo $\leq$ (es menor que o igual a) se define: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$

En particular, $a > b$ y $a < b$ se llaman ***desigualdades estrictas***, mientras que $a \geq b$ y $a \leq b$ se llaman ***desigualdades no estrictas***. ***Resolver una desigualdad*** significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Se dice que dos ***desigualdades*** son ***equivalentes*** si tienen exactamente las mismas soluciones. Para resolver una desigualdad, se escribe una lista de desigualdades equivalentes que termine en una para la cual la solución es obvia.

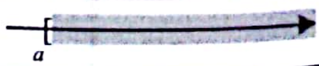
Objetivos

- 5.1 Operaciones que producen desigualdades equivalentes
- 5.2 Propiedades de los valores absolutos

Operaciones que producen desigualdades equivalentes

- A ambos lados de la desigualdad podemos sumar o restar la misma expresión y se obtiene una desigualdad eguivalente.
- Ambos lados de la desigualdad pueden multiplicarse o dividirse por una expresión positiva y se obtiene una desigualdad equivalente (si se multiplican o dividen ambos lados de una desigualdad por una expresión que siempre es negativa, se debe invertir el signo de la desigualdad).
- Si para algunas x tienen sentido las siguientes desigualdades $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y $f(x) > g(x)$, entonces para las mismas x tiene lugar la siguiente desigualdad $(f(x))^n > (g(x))^n$, $n \in N$.

Al resolver una desigualdad, podemos expresar la solución de acuerdo con la siguiente tabla:

Notación	Desigualdad	Gráfica
(a, b)	$a < x < b$	
$[a, b]$	$a \le x \le b$	
$[a, b)$	$a \le x < b$	
$(a, b]$	$a < x \le b$	
(a, ∞)	$x > a$	
$[a, \infty)$	$x \ge a$	
$(-\infty, b)$	$x < b$	
$(-\infty, b]$	$x \le b$	
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Propiedades de los valores absolutos

Sea b un número real positivo. Entonces:

- $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$
- $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a < -b$
- $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$

EJERCICIOS I

Exprese la desigualdad como un intervalo y dibuje su gráfica.

1. $5 > x$

2. $x \geq -1$

3. $-2 \leq x < 5$

4. $-10 \geq x \geq -100$

5. $0 < x \leq 3$

6. $-3x \geq -\frac{3}{2}$

Utilice desigualdades para describir los siguientes conjuntos:

7. $(0,5)$

8. $(-5,8]$

9. $[-3,1]$

10. $[7,10)$

11. $(-\infty,7)$

12. $[3,+\infty)$

13. $(2,+\infty)$

14. $(-\infty,-2)$

15. $(-3,2) \cup (3,5)$

16. $[0,\frac{1}{2}) \cup [1,+\infty)$

17. $(-\infty,1] \cup [2,3)$

18. $(-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$

19. $(\frac{3}{4},1) \cup [2,3)$

Resuelva las siguientes desigualdades:

20. $4x - 12 > 6$

21. $4x - 2 > 3x + 1$

22. $-5 - 3x \leq -3$

23. $-4 \leq -2x + 1$

24. $2 < 3x - 2$

25. $3x - 1 \geq -1$

26. $-3 \leq 2x + 1 \leq -2$

27. $-1 < \frac{3x+1}{2} \leq 5$

28. $3 \leq \frac{-2x+3}{2} < 4$

29. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \geq 3$

30. $\frac{1}{5}x - 2 \leq \frac{2}{15}x$

31. $5x \geq \frac{3x-1}{2}$

32. $12 - \frac{5x}{2} \geq \frac{x}{4} + 1$

33. $2x - 1 < 3x + 2 < 14$

34. $5x \leq \frac{4x+2}{2} < x$

35. $-2 \leq -2x \leq 3x - 1$

36. $2x - 1 < \frac{3x}{2} \leq x + 1$

37. $(6x + 2)(x - 1) \leq (2x - 3)(3x - 2)$

38. $x^2 + 1 \geq x(x - 3)$

39. $x^3 - 2x^2 < x^2(x + 2) - 3(x - 1)$

40. $x(x - 2) \leq 0$

41. $(2x - 1)(3x + 1) > 0$

42. $5x^2 - 18x - 8 \leq 0$

43. $x^2 - x - 6 > 0$

44. $\frac{4}{x+1} < 0$

45. $\frac{8}{3-x} > 0$

46. $\frac{5}{(7-x)^2} > 0$

47. $\frac{-3}{2x+4} \geq 0$

48. $\frac{x-1}{2x^2-x-1} \geq 0$

49. $\frac{3x^2-x-2}{3x+2} \leq 0$

50. $\frac{-8}{x^2+1} \geq 0$

51. $\frac{4-5x}{x+2} < 0$

52. $\frac{21x-7}{4x-1} > 0$

53. $\dfrac{7x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-4} > 0$

54. $\dfrac{2x\sqrt{5}-3}{x\sqrt{5}-2} \leq 0$

55. $\dfrac{4x-3}{x-0.5} \geq 0$

56. $\dfrac{x}{2-x} > 0$

57. $\dfrac{8x-2}{x} \leq 0$

58. $\dfrac{2x-1}{2x-3} + 1 < 0$

59. $\dfrac{1-3x}{3-8x} + \dfrac{1}{2} > 0$

60. $\dfrac{4-x}{3x-1} < \dfrac{1}{2}$

61. $\dfrac{2}{2x-1} > \dfrac{3}{3x-4}$

62. $\dfrac{9}{12x-1} < \dfrac{3}{4x+3}$

63. $\dfrac{x-1}{4x+5} < \dfrac{x-3}{4x-3}$

64. $\dfrac{2x+3}{x+5} \geq 1$

65. $\dfrac{4x-3}{5-x} \geq -5$

66. $\dfrac{3x-5}{x+1} \geq 2$

67. $\dfrac{7x+3}{x+3} \leq 6$

68. $\dfrac{2x+1}{x+6} \geq 3$

69. $\dfrac{2x+5}{x-1} \leq 3$

70. $\dfrac{10x-1}{x+1} \leq 9$

71. $\dfrac{5x+1}{2x-4} \leq 2$

72. $\dfrac{3-x}{2x+12} \leq 4$

73. $\dfrac{56-3x}{x-16} \geq -4$

74. $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{3}{x-5}$

75. $\dfrac{3}{x-5} \geq \dfrac{1}{x+1}$

76. $\dfrac{4}{3-x} \leq \dfrac{2}{2+x}$

77. $\dfrac{5}{x-6} \leq \dfrac{2}{x+1}$

78. $\dfrac{4}{7-x} \leq \dfrac{5}{x-2}$

79. $\dfrac{3}{2-x} \geq \dfrac{1}{x+2}$

80. $\dfrac{2}{5-x} \geq \dfrac{3}{x+5}$

81. $\dfrac{4}{x+3} \leq \dfrac{1}{4-x}$

82. $\dfrac{1}{4-x} \leq \dfrac{1}{x+4}$

83. $\dfrac{1}{3-x} \geq \dfrac{2}{6+x}$

84. $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 > 0$

85. $\dfrac{(2x+1)^2(2x-1)^3}{(x-1)^4} > 0$

86. $2 + \dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{x-1}$

87. $4 + \dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{1}{x+2}$

88. $2 + \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{x+2}$

89. $1 + \dfrac{25}{x-7} \leq \dfrac{16}{x-6}$

90. $7 + \dfrac{25}{x-4} \geq \dfrac{4}{x+3}$

91. $5 + \dfrac{4}{x-3} \geq \dfrac{9}{x+2}$

92. $3 + \dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{4}{x+1}$

93. $4 + \dfrac{9}{x-1} \geq \dfrac{1}{x+3}$

94. $3 + \dfrac{4}{x-1} \leq \dfrac{25}{x+2}$

95. $1 + \dfrac{4}{x-2} \leq \dfrac{1}{x-1}$

96. $x + \dfrac{1}{x-2} > 4$

97. $\frac{1}{x+3} > -(x+1)$

98. $\frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{(x+1)(2-x)} > 0$

99. $x \geq \frac{4}{4-x}$

100. $\frac{1}{x-3} + \frac{3}{x(3-x)} \geq 0$

101. $\frac{1}{x}\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) \leq 0$

102. $\frac{25}{x+1} \leq 9 - x$

103. $x + 1 \geq \frac{1}{1-x}$

104. $\frac{1}{x-1} < \frac{4}{(1-x)(x-5)}$

105. $\frac{x+6}{16} < \frac{1}{2-x}$

106. $\frac{3x^2-3x+8}{x^2+x+1} \geq 2$

107. $\frac{2x^2-7x+9}{x^2-x+1} \leq 1$

108. $\frac{x^2-x-4}{x^2-3x+4} \leq \frac{1}{2}$

109. $\frac{3x^2-x+30}{x^2+4x+5} \leq 2$

110. $\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+5} \geq 1$

111. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$

112. $\frac{3x^2+x+10}{x^2-4x+5} \geq 2$

113. $\frac{2x^2-x+7}{x^2+3x+4} \geq 1$

114. $\frac{5x^2+9x+34}{x^2+4x+6} \geq 4$

115. $\frac{3x^2-3x+32}{x^2+4x+7} \leq 2$

116. $3 + \frac{12}{x-4} \leq \frac{5}{2x-7}$

117. $5 + \frac{6}{x-1} \leq \frac{119}{2(8-3x)}$

118. $10 + \frac{64}{1-2x} \geq \frac{13}{x+2}$

119. $\frac{14}{x+5} \geq 15 + \frac{3}{2x+5}$

120. $2 + \frac{21}{2-x} \leq \frac{95}{4-3x}$

121. $\frac{21}{x+2} + \frac{2}{2x-7} \leq \frac{11}{2}$

122. $\frac{2}{2x+7} \leq \frac{21}{x+1} + 15$

123. $1 < \frac{3x^2-7x-8}{x^2+1} < 2$

124. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$

125. $\frac{19}{3x-4} \leq 5 + \frac{66}{2x-1}$

126. $\frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2} \geq 0$

127. $\frac{2x^2-7x+6}{2x^2+3x-14} \geq 0$

128. $\frac{3x^2-19x+30}{6x^2-41x+70} \leq 0$

129. $\frac{6x^2-25x+25}{2x^2-9x+10} \leq 0$

130. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} > 0$

131. $\frac{3x^2-10x+7}{2x^2-7x+5} \geq 0$

132. $\frac{x^2-6x+8}{x^2-x-12} > 0$

133. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3} \leq 0$

134. $\frac{x^2-7x+12}{3x^2-17x+24} < 0$

135. $\frac{6x^2+7x+2}{3x^2+8x+4} > 0$

136. $\frac{x-1}{x^2+3} > 0$

137. $\frac{2x^2+5}{x} > 0$

138. $\frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0$

139. $\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)^2 > 0$

140. $\sqrt{x^2-x-12} < x$

141. $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} < 0$

142. $\dfrac{|x-1|}{x} < 0$

143. $\dfrac{|x-1|}{x} < 1$

144. $\dfrac{|x|}{x+2} < 2$

145. $\dfrac{3-2x}{(3x+1)(4-x)} \leq 0$

146. $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1} \geq 1$

147. $\sqrt{9x-20} < x$

148. $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right| \geq 2$

149. $\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{2}{x-3} < \dfrac{5x-1}{x^2-9}$

150. $\sqrt{x-1}\,(x-2) > 0$

151. $\sqrt{x-1}\,(x-2) < 0$

152. $\sqrt{x-2}\,(x-1) \geq 0$

153. $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2} \leq 0$

154. $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2} \geq 0$

155. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}} \geq 0$

156. $\sqrt{x-1}\,(x-2) \geq 0$

157. $\sqrt{x-1}\,(x-2) \leq 0$

158. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1} \leq 0$

159. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}} \leq 0$

160. $\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{4-x}} \geq 0$

161. $\dfrac{x^2+9x+14}{\sqrt{x+5}} \leq 0$

162. $\dfrac{3x^2-16x-12}{\sqrt{x+4}} \geq 0$

163. $\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{2x+9}} \geq 0$

164. $\dfrac{2x^2-9x-11}{\sqrt{x+2}} \geq 0$

165. $\dfrac{5x^2+23x-10}{\sqrt{x+1}} \leq 0$

166. $\dfrac{2x^2+x-15}{\sqrt{x+3}} \leq 0$

167. $\dfrac{2x^2-5x-3}{\sqrt{x-1}} \leq 0$

168. $\dfrac{3x^2-14x-5}{\sqrt{x+7}} \geq 0$

169. $\dfrac{5x^2-4x-1}{\sqrt{6-x}} \geq 0$

170. $\sqrt{2-7x} - 4 > 0$

171. $\sqrt{2x-1} < 3$

172. $\sqrt{5x-2} < 1$

173. $\sqrt{5-3x} \geq 1$

174. $\sqrt{6-2x} \geq -1$

175. $\sqrt{5-3x} - 2 \leq 0$

176. $\sqrt{5x+1} > 4$

177. $\sqrt{5+3x} + 2 > 0$

178. $|3x+1| > 1.7$

179. $|x-1| \leq 3$

180. $|2x-7| \geq 5.8$

181. $|x+2| \leq 3$

182. $|x| \leq 5$

183. $|x-5| \leq 3$

184. $|4-x| < 2$

185. $|x+2| \geq 3$

186. $\dfrac{1}{|x-3|} > 0$

187. $|-7x-3| > 5.1$

188. $|4x-2| \geq 3x+1$

189. $|3-5x| \leq 5-2x$

190. $|4x+3|+3x \geq 1$

191. $2+|x+7|+\frac{x}{2} < 0$

192. $2x+1 \geq |x|$

193. $\left|\frac{2-x}{3}\right|+3 \leq x$

194. $|10x-1|-1 < 7x$

195. $3x+|3-5x| > 4$

196. $\frac{1}{|6x-1|} < x$

197. $\left|\frac{3x-1}{x+1}\right| < 2$

198. $\left|\frac{2x+1}{1-x}\right| \leq 3$

199. $\left|\frac{2-x}{x-3}\right| > 4$

200. $\left|\frac{x+1}{3x+4}\right| \geq 5$

201. $\left|\frac{1-3x}{2-x}\right| \leq \frac{1}{2}$

202. $\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$

203. $\left|\frac{7-x}{5x+1}\right| > \frac{2}{3}$

204. $\left|\frac{4x+9}{1-2x}\right| \geq 3$

205. $\left|\frac{x+7}{10x-1}\right| > \frac{5}{17}$

206. $\left|\frac{x}{3x-1}\right| \leq 6$

207. $|2x-1| \geq 3x+2$

208. $|3x-5| < |1-4x|$

209. $|7x+2| \leq |3-x|$

210. $|x-7| > |4x+7|$

211. $|6x-5| \leq |3x-5|$

212. $|8-x| \geq |2x+1|$

213. $|20-x| < |5+3x|$

214. $|13+7x| \leq |4x-1|$

215. $|4-2x| > |6x+7|$

216. $|9x-1| \geq |3-x|$

217. $\frac{|2x-1|}{x+2} < 1$

218. $\frac{|1-3x|}{x+2} \geq 2$

219. $\frac{|5x+3|}{x-3} < 2$

220. $\frac{x-4}{|2x-5|} > 1$

221. $\frac{3-2x}{|x+2|} \geq 4$

222. $\frac{1-x}{|x|} \leq 3$

223. $\frac{3|x+4|}{3x-1} \leq 2$

224. $\frac{x}{|3-2x|} > 1$

225. $\frac{|x+7|}{x+2} \leq 2$

226. $\frac{|4x+5|}{x+7} \leq 3$

227. $|x-2|+|3x-1| \leq 8$

228. $|2x-3| \leq 7-|x+1|$

229. $|4x+2| < 5-|3x-1|$

230. $2|x-1| \geq 9-|3x+4|$

231. $|4x+7|+|-x-2| > \frac{1}{2}$

232. $|2x+1| \leq 3+|x-3|$

233. $|7x+1|-|-2-x| \geq 10$

234. $|3x-1|-3 \leq \left|\frac{x}{2}+1\right|$

235. $|x+2|-|2x+1| > 1$

236. $|5x-3|-|3-x| < 4$

237. $3x^2-11|x|-4 \geq 0$

238. $4x^2-19|x|-5 < 0$

239. $7x^2-12|x|-4 \leq 0$

240. $3x^2 - 17|x| - 6 > 0$

241. $2x^2 - 11|x| - 21 > 0$

242. $5x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$

243. $3x^2 - 22|x| - 16 \geq 0$

244. $6x^2 - 13|x| - 15 < 0$

245. $2x^2 - 9|x| - 18 < 0$

246. $2x^2 - 5|x| - 25 > 0$

247. $(x - 2)|x + 1| > -2$

248. $(x + 2)|x - 3| \geq 4$

249. $(3 - x)|x + 5| < 7$

250. $(2x + 1)|x + 7| < -15$

251. $(1 - x)|2x - 9| > -5$

252. $(x - 2)|x + 1| > -2$

253. $(x + 2)|x - 1| \leq 4$

254. $(x - 9)|x + 1| + 24 > 0$

255. $(2 - x)|x + 2| \leq 5$

256. $(2x - 1)|x - 5| \leq -5$

257. $(x - 1)|4 - x| < 4$

258. $|2x^2 - 20x + 37| < 5$

259. $|8x^2 + 14x - 13| > 9$

260. $|2x^2 - 3x - 2| \leq 3$

261. $|3x^2 - 7x - 37| > 39$

262. $|24x^2 - 34x + 1| < 11$

263. $|7x - 10| < -2$

264. $|7x - 2x^2 - 4| \leq 1$

265. $|1 + 10x - 4x^2| > 5$

266. $|39 + 8x - 8x^2| < 9$

267. $|9 + 8x - 2x^2| \geq 15$

268. $|2x^2 - 13x + 17| \leq 7 - x$

269. $|2x^2 - 11x - 1| < 0$

270. $|4x^2 - 16x + 3| \leq 11 - 2x$

271. $|x^2 - 6x + 10| < 2$

272. $|12x^2 - 17x - 89| \leq 7x + 91$

273. $|4x^2 - 2x - 37| > 19 - 4x$

274. $|22 - 3x - 4x^2| \geq 26 + 7x$

275. $|23 - 5x - 2x^2| > 19 - 3x$

276. $|2x^2 + 5x - 21| \geq x + 17.5$

277. $|9x^2 - 27x + 10| > 6x$

278. $|10x^2 + 8x - 21| < 10x^2 - 10x - 1$

279. $|7x^2 - 16x - 19| \leq 7x^2 - 5$

280. $|15x^2 + 2x - 15| < 41 - 30x - 15x^2$

281. $|14 + 6x - 4x^2| \geq 4x^2 - 6$

282. $|19 + 12x - 10x^2| \leq 5(7 + 6x - 2x^2)$

283. $|4x^2 + 14x - 13| > 4x^2 + 4x - 5$

284. $|8x^2 - 15x + 5| > 5 + 7x - 8x^2$

285. $|4x^2 + 4x - 11| \geq 9 - 2x - 4x^2$

286. $|7 + 3x - 3x^2| > 3x^2 - 5x - 7$

287. $|3x^2 + 6x - 37| \leq 3x^2 - 4x - 11$

288. $\sqrt{3x + 2} \leq 7$

289. $\sqrt{-4x - 2} < 5$

290. $\sqrt{x + 6} < x$

291. $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$

292. $\sqrt{9x + 4} - 2 < 3x$

293. $\sqrt{9 - 10x} < 3 - 2x$

294. $\sqrt{2x + 9} < x + 3$

295. $\sqrt{28x - 11} + 4 < 7x$

296. $\sqrt{25 - 12x} + 3x \leq 5$

297. $\sqrt{7 - 2x} + x \leq 2$

298. $\sqrt{5x + 4} - 2 \leq x$

299. $\sqrt{7-3x} \leq 3-x$

300. $\sqrt{2x+7} > x+2$

301. $\sqrt{1-6x} + 1 \geq -3x$

302. $\sqrt{10-3x} + 2 \geq x$

303. $\sqrt{6x+7} + 1 < -2x$

304. $\sqrt{4x-3} \geq 2x-3$

305. $\sqrt{2x-5} + 4 > x$

306. $\sqrt{13-9x} \geq 3x-3$

307. $\sqrt{11-2x} + x > 4$

308. $\sqrt{1-6x} - 2x > 1$

309. $\sqrt{3x-8} + x \geq 4$

310. $\sqrt{4x^2-28x+49} > 1$

311. $\sqrt{3x^2+2x-5} \leq 4$

312. $\dfrac{15}{4+3x-x^2} > 1$

313. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$

314. $\sqrt{x+61} < x+5$

315. $5x-20 \leq x^2-7x$

316. $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$

317. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$

318. $\sqrt{-4x^2+8x-3} < 1$

319. $\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-1} > 0$

320. $\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-1} < 0$

321. $\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt{x-1} \leq 0$

322. $\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-1} \geq 0$

323. $\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-1} \leq 0$

324. $\sqrt[5]{x+1}\,\sqrt{x-1} \geq 0$

325. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} \geq 0$

326. $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x+1}} \geq 0$

327. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} \leq 0$

328. $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x+1}} \leq 0$

329. $(2x^2-5x-12)\sqrt{11x-5-2x^2} \geq 0$

330. $(x^2-3x-4)\sqrt{13x-2x^2-6} \leq 0$

331. $(2x^2-7x-4)\sqrt{5-4x-x^2} \leq 0$

332. $(2x^2-3x-9)\sqrt{6-x^2-5x} \geq 0$

333. $(2x^2+11x-21)\sqrt{3+2x-x^2} \geq 0$

334. $(x^2+3x-10)\sqrt{9x-4-2x^2} \geq 0$

335. $(2x^2-11x+15)\sqrt{7-6x-x^2} \leq 0$

336. $(2x^2+11x-40)\sqrt{4+3x-x^2} \leq 0$

337. $(2x^2+3x-20)\sqrt{5+4x-x^2} \geq 0$

338. $(x^2-x-20)\sqrt{30-7x-x^2} \geq 0$

339. $\sqrt{2x^2-6x-20} + 2 < x$

340. $\sqrt{3x^2+27x-30} < x+4$

341. $2(1-\sqrt{x^2-3x-54}) > x$

342. $\sqrt{10x^2-25x-35} + 3 < 2x$

343. $2x - \sqrt{6x^2-9x-6} > 1$

344. $2(x-\sqrt{2x^2-3x-5}) \geq 1$

345. $2x - \sqrt{12x^2+42x-54} + 3 \geq 0$

346. $2\sqrt{x^2+11x-26} \leq x+5$

347. $\sqrt{5(2x^2+13x+11)} + 7 < -2x$

348. $4x + \sqrt{24x^2+6x-9} < -1$

349. $1 + \sqrt{2x^2+3x+1} > 2x$

350. $2\sqrt{7x^2-12x+5} + 7x > 4$

351. $\sqrt{5(x^2-x-2)} + 9 > -3x$

352. $\sqrt{8x^2+22x+15} > 4x+3$

353. $\sqrt{8x^2-2x}+3 > 4x$

354. $\sqrt{15x^2+33x+18}-2 \geq 5x$

355. $4x-\sqrt{6x^2-18x+12} \leq 10$

356. $\sqrt{6x^2+10x+4}-3x \geq -2$

357. $\sqrt{2(5x^2+9x+4)}+5x \geq -8$

358. $\sqrt{18x^2+21x+6} > 6x+1$

359. $\sqrt{2x^2+5x-12} > 5x-x^2-7$

360. $\sqrt{5+9x-x^2} > 9x-2x^2-11$

361. $\sqrt{2x^2+x-6} > 2x-2x^2-3$

362. $\sqrt{6+x-x^2} > x-2x^2-1$

363. $\sqrt{35-4x-4x^2} \geq 4x-2x^2-3$

364. $\sqrt{15-x-2x^2} \geq -x^2-x-2$

365. $\sqrt{4x^2-8x+3} \geq 8x-3x^2-6$

366. $\sqrt{7+5x-2x^2} \geq 5x-x^2-8$

367. $\sqrt{2x^2+7x+3} \geq 7x-5-3x^2$

368. $\sqrt{4x+3} > \sqrt{5-2x}$

369. $\sqrt{10-x-3x^2} > \sqrt{2-3x}$

370. $\sqrt{3x^2+x-9} > \sqrt{-3x-5}$

371. $\sqrt{20x^2-41x+20} < \sqrt{13-2x}$

372. $\sqrt{2-x} > \sqrt{7x^2+15x+2}$

373. $\sqrt{3x^2-7x+2} \leq \sqrt{9-3x}$

374. $\sqrt{12x^2+13x+3} \leq \sqrt{8-4x}$

375. $\sqrt{8x^2+10x-15} > \sqrt{9x-8}$

376. $\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x} \leq 3$

377. $\sqrt{x+7}+\sqrt{6-x} < 5$

378. $\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1} < 4$

379. $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x} < 7$

380. $6-\sqrt{2x+9} > \sqrt{17-2x}$

381. $\sqrt{12-x} < 4-\sqrt{x-2}$

382. $\sqrt{27+x} \leq 8-\sqrt{7-x}$

383. $\sqrt{10+x} < 6-\sqrt{8-x}$

384. $7-\sqrt{26-x} \geq \sqrt{x+3}$

385. $\sqrt{3x+10}+\sqrt{31-3x} < 9$

386. $\sqrt{2x-8}+\sqrt{x-5} > \sqrt{3x-9}$

Resuelva los siguientes sistemas de desigualdades:

387. $\begin{cases} x+4 > 2-3x \\ 4(x-1) > 2+7x \end{cases}$

388. $\begin{cases} 3+5x < 7x+4 \\ 3(x-2) < 4x-9 \end{cases}$

389. $\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{3}{5} < 4x-3 \\ \frac{1}{5}x-3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4}-\frac{5}{2}x \end{cases}$

390. $\begin{cases} \frac{37-27x}{3}+9 < \frac{3x-8}{4}-x \\ 3-\frac{3}{2}x > \frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6} \end{cases}$

391. $\begin{cases} (x+1)^2+7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2+3x^2 < (2x-1)^2+7 \end{cases}$

392. $\begin{cases} \frac{7-6x}{2}-12 < \frac{8x+1}{3}-10x \\ 8+\frac{3x-4}{5} > \frac{x-1}{6}-\frac{5x-3}{8} \end{cases}$

Demuestre que para cualquier $x, y \in R$ se cumple:

393. $|xy| = |x||y|$

394. $|x+y| \leq |x|+|y|$

395. $|x-y| \leq |x|+|y|$

396. $y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

397. ¿Para cuál valor de m la desigualdad $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 3m - 1 > 0$ es verdadera para cualquier $x \in R$?

¿Para qué valores de x tienen sentido las siguientes expresiones?

398. $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

399. $y = \sqrt{x-2}\,\sqrt{x-5}$

400. $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$

401. $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}}$

Resuelva las siguientes desigualdades:

402. $x^2 - x > \dfrac{x}{2} + 1$

403. $9x^2 - 4 > 0$

404. $-x^2 + 3x - 2 > 0$

405. $(3x-1)^2 - 4(2-x)^2 > 0$

406. $4x > 5x^2$

407. $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} < 0$

408. El triple de un entero más cuatro, menos el doble de este entero está entre 10 y 15. Determine todos los enteros que satisfagan la expresión anterior.

409. La relación entre Celsius y Farenheit es $F = \frac{9}{5}c + 32$. Si la temperatura estuvo entre 25° y 35° Celsius, ¿cuál fue la temperatura en grados Farenheit?

410. Un fabricante puede vender todas las unidades que produce a \$80 cada una. Tiene costos fijos de \$ 15000 al mes; y además, le cuesta \$30 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades puede producir y vender la compañía para obtener utilidades?

411. Una fábrica de maletas desea saber si le conviene fabricar ciertos forros para los bolsillos, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$8 la unidad. La fabricación de estos forros incrementará sus costos fijos en \$4800 al mes, pero sólo le costará \$5.50 fabricar cada forro. ¿Cuántos forros debe hacer la empresa cada mes para justificar la elaboración de sus propios forros?

412. Una empacadora produce tapas rectangulares que tienen el largo de dos unidades mayores que el triple del ancho.

a. Si el largo de las tapas está entre 35 y 50 cm, ¿en qué intervalo está el ancho?

b. ¿En qué intervalo está el área de las tapas?

413. En una hacienda, 10 recolectores recogen entre 150 y 180 kg de un producto al día; si la mitad de ellos recogen el doble de los demás, ¿entre qué valores están los kg que recogen los trabajadores rápidos?

414. Una empresa tiene 15 empleados que ganan un total de 23,500 a 31,750 pesos mensuales. Tres de ellos ganan el doble de los demás, más \$250. Determine los sueldos posibles de cada empleado.

415. En Estados Unidos, para obtener un promedio de B (en calificación con letra, siendo A la máxima) en un curso de matemáticas, un estudiante debe obtener un promedio mínimo de 82, pero menor de 90. Si las calificaciones del estudiante en los tres primeros semestres fueron 84, 87 y 92, ¿qué calificación en el cuarto examen le garantizará un promedio de B?

416. Un servicio de mensajería sólo acepta un paquete cuando la suma de la longitud l y el perímetro de las bases $P = 2w + 2h$ no exceda a 1.2 metros. Además, exige que cada una de las tres dimensiones (longitud l, ancho w y altura h) mida por lo menos 0.15 metros.

a. Si $l = 30$ cm, ¿cuáles son los valores permitidos para el perímetro p?

b. Si $l = 30$ cm y $w = 15$ cm, ¿cuáles son los valores permitidos para h?

417. Se requiere fabricar una puerta, tal como se muestra en la figura 5.1. La puerta tiene un área de 10 m² si el ancho x toma valores entre 2 y 3 metros. Encuentre los valores que pueda tomar y.

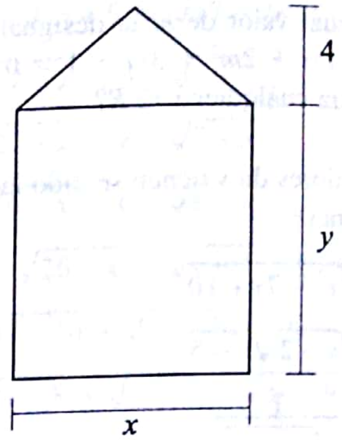


Fig. 5.1

EJERCICIOS II

1. Resuelva:

$$\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-69)^4} \leq 0$$

2. Resuelva:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$$

3. Resuelva:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \leq \frac{1}{2}$$

4. Demuestre que si $p > 0$ y $q > 0$, entonces $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$.

5. Demuestre que para cualquier $x \in R$ y $y \in R$ tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0.$$

6. Demuestre que si $a \neq 2$, entonces tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{a^2-4a+4} > \frac{2}{a^3-8}$$

7. Resuelva:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4 \end{cases}$$

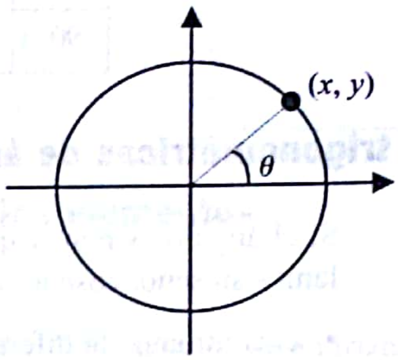
8. Resuelva:

$$\begin{cases} |x^2-4x| < 5 \\ |x+1| < 3 \end{cases}$$

CAPÍTULO 6

Trigonometría

Si θ es un ángulo medido en radianes y (x, y) son las coordenadas de un punto sobre un círculo unitario, como en la siguiente figura, entonces las ***funciones trigonométricas*** del ángulo θ se definen así:



$$\operatorname{sen}\theta = y \qquad \cos\theta = x \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{y} \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Objetivos

- 6.1 Valor de funciones trigonométricas de ángulos especiales
- 6.2 Funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°
- 6.3 Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo rectángulo
- 6.4 Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo cualquiera
- 6.5 Identidades trigonométricas básicas
- 6.6 Ecuaciones trigonométricas

Un ***radián*** es la medida del ángulo central de un círculo que subtiene un arco de longitud igual al radio del círculo. Un **grado** (1°) es el ángulo formado por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. $360° = 2\pi$ radianes. Para cambiar de grados a radianes se multiplica por $\frac{\pi}{180}$; para cambiar de radianes a grados se multiplica por $\frac{180}{\pi}$.

■ Valor de funciones trigonométricas de ángulos especiales

Grad θ	*Rad* θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
0	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

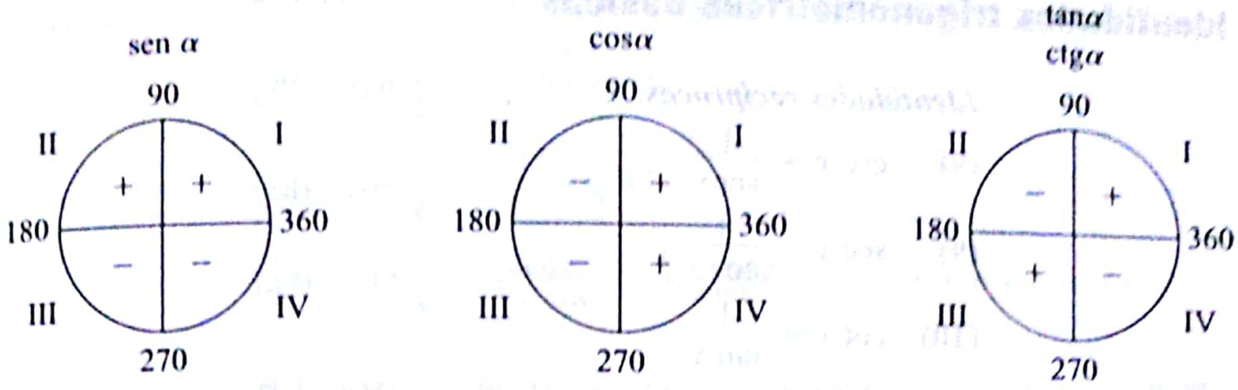
■ Funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°

Si el ángulo es mayor que 90°, pero menor que 360°, entonces calculamos su seno, coseno, tangente y cotangente de la siquiente manera:

- encontramos la diferencia entre el ángulo dado y el ángulo cercano (180° o 360°) y calculamos la función correspondiente de ésta diferencia.
- el resultado lo tomamos como positivo o negativo según la tabla:

Función	**1er. cuarto (del 0° al 90°)**	**2do. cuarto (del 90° al 180°)**	**3er. cuarto (del 180° al 270°)**	**4to. cuarto (del 270° al 360°)**
seno	+	+	−	−
coseno	+	−	−	+
tangente	+	−	+	−
cotangente	+	−	+	−

Si el ángulo θ considerado es mayor que 360°, entonces lo dividimos entre 360° y consideramos el residuo α menor que 360°, tomando $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\theta = \cos\alpha$.



Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo rectángulo

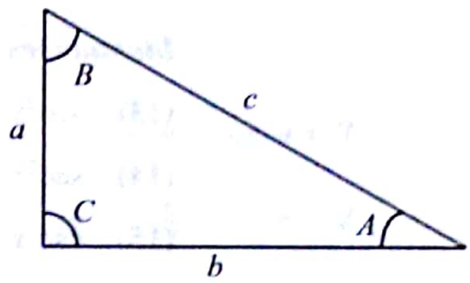
a y b son dos catetos, c la hipotenusa; A y B los ángulos y C el ángulo recto.

(1) $a = c\,\text{sen}\,A = c\cos B$

(2) $a = b\tan A = b\cot B$

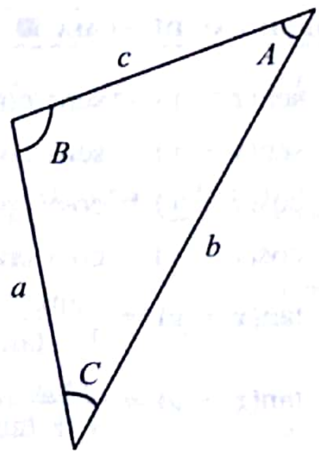
(3) $b = c\,\text{sen}\,B = c\cos A$

(4) $b = a\tan B = a\cot A$



Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo cualquiera

a, b y c son los lados, A, B y C los ángulos de un triángulo cualquiera.



(5) $$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$ **(Teorema de los senos)**

(6) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$ **(Teorema del coseno)**

(7) $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}}$$ **(Teorema de las tangentes)**

■ Identidades trigonométricas básicas

Identidades recíprocas:

(8) $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

(9) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(10) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades del cociente:

(11) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z;$

(12) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$

Identidades pitagóricas:

(13) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;$

(14) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x,\ x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z;$

(15) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x,\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$

Identidades para negativos:

(16) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

(17) $\cos(-x) = \cos x$

■ FÓRMULAS DE SUMA ■

(18) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

(19) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$

(20) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(21) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(22) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad x, y, x+y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

(23) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \qquad x, y, x-y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

■ FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE ■

(24) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

(25) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

(26) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

■ FÓRMULAS DEL ÁNGULO MITAD ■

(27) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

(28) $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

(29) $\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}$ $\quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$

■ FÓRMULAS DE TRANSFORMACIÓN DE SUMAS A PRODUCTOS ■

(30) $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(31) $\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

(32) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(33) $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

(34) $\tan x + \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y}$ $\quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

(35) $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y}$ $\quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

■ FÓRMULAS DE TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS A SUMAS ■

(36) $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

(37) $\cos x\cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$

(38) $\operatorname{sen}x\cos y = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2}$

■ RELACIONES IMPORTANTES ENTRE SEN x, COS x Y TAN $\frac{x}{2}$ ■

(39) $\operatorname{sen}x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ $\quad x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$

(40) $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ $\quad x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$

■ Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas sencillas son ecuaciones del tipo $\operatorname{sen}x = a$ (donde $|a| \leq 1$), $\cos x = a$ (donde $|a| \leq 1$), $\tan x = a$ (donde $-\infty < a < -\infty$), $\cot x = a$ (donde $-\infty < a < +\infty$).

Las soluciones de estas ecuaciones tienen la siguiente forma:

Llamemos arc senα a un ángulo x cuyo seno es α. Asimismo arc cosα será un ángulo x cuyo coseno es α, arc tanα un ángulo x cuya tangente es α y arc cotα un ángulo x cuya cotangente es α.

(41) $\text{sen}x = \alpha;\ x = (-1)^n \text{ arc sen}\alpha + \pi n,\ n \in Z$

(42) $\cos x = \alpha;\ x = \pm\text{arc cos}\alpha + 2\pi n,\ n \in Z$

(43) $\tan x = \alpha;\ x = \text{arc tan}\alpha + \pi n,\ n \in Z$

(44) $\cot x = \alpha;\ x = \text{arc cot}\alpha + \pi n,\ n \in Z$

En los casos particulares cuando $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$ tenemos:

(45) $\text{sen}x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z$

(46) $\text{sen}x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

(47) $\text{sen}x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

(48) $\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

(49) $\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in Z$

(50) $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

(51) $\tan x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z$

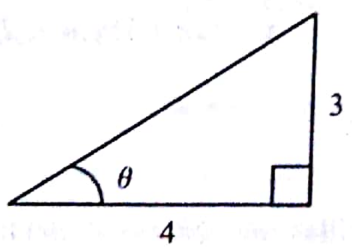
(52) $\cot x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

Las ecuaciones del tipo $\text{sen}(wx + \varphi) = a$, $\cos(wx + \varphi) = a$, $\tan(wx + \varphi) = b$. $\cot(wx + \varphi) = b$ ($|a| < 1$, $w \neq 0$, φ, b son números arbitrarios) se resuelven sustituyendo $wx + \varphi$ por x.

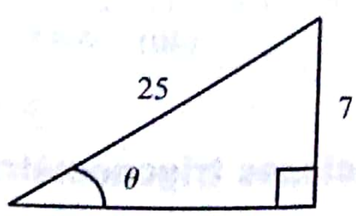
EJERCICIOS I

Halle los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ.

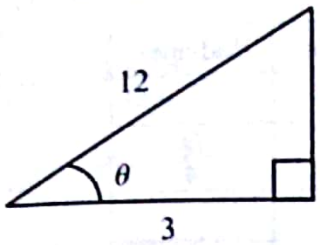
1.



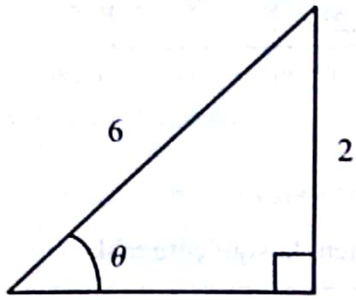
2.



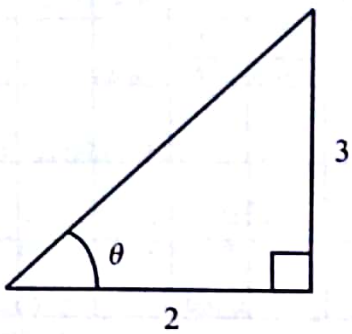
3.



4.

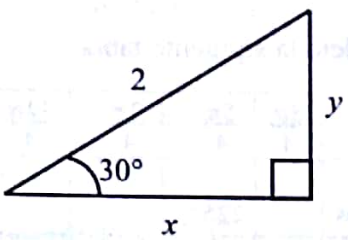


5.

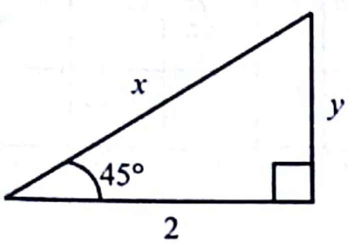


Encuentre los valores exactos de x y y

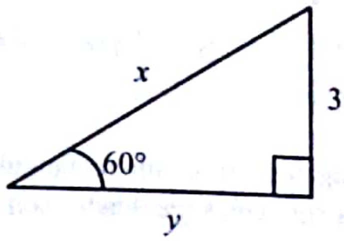
6.



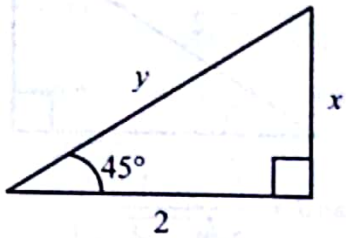
7.



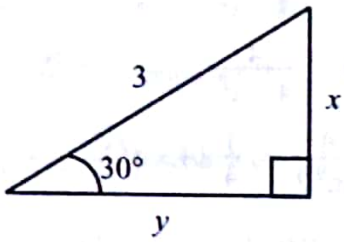
8.



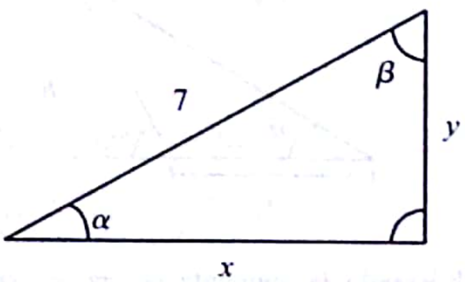
9.



10.



Utilice el siguiente triángulo para determinar el valor de cada expresión:



11. $\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
12. $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta$
13. $\tan\alpha \cot\beta$
14. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$
15. $\sec\beta \, \frac{1}{\cos\beta}$

Halle los valores de las funciones trigonométricas restantes para el ángulo agudo α si

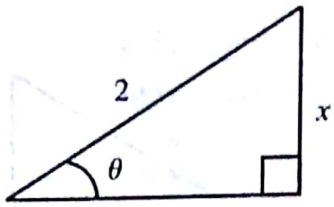
16. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{8}$
17. $\cos\alpha = \frac{7}{9}$

18. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

19. $\sec\alpha = 3$

20. $\csc\alpha = \frac{5}{2}$

Utilice el siguiente triángulo rectángulo para mostrar que las siguientes igualdades son válidas.



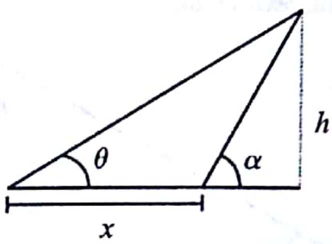
21. $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \dfrac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$

22. $\tan^2\theta = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

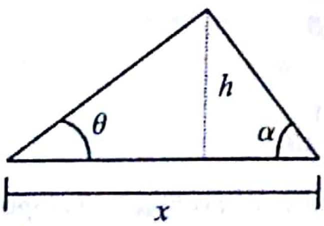
23. $\sec^2\theta = \dfrac{4}{4-x^2}$

24. $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{4}(4-x^2)^2$

25. Demuestre que $h = \dfrac{x}{\cot\theta - \cot\alpha}$, utilizando la siguiente figura.



26. Utilizando la siguiente figura muestre que $h = \dfrac{x}{\cot\theta - \cot\alpha}$.



27. Complete la siguiente tabla

Grados	Radianes
75°	
	$\frac{7\pi}{4}$
38°	
	$\frac{3\pi}{4}$
112°	

28. Complete la siguiente tabla

x	120°	150°	210°	240°	300°	330°
radianes	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{sen}x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
$\cos x$						
$\tan x$						
$\cot x$						

29. Complete la siguiente tabla

θ	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
Grados		225°		
$\operatorname{sen}\theta$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos\theta$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$\tan\theta$				

Verifique que las siguientes expresiones son identidades:

30. $\dfrac{\text{sen}\,t}{1-\cos t} = \dfrac{1+\cos t}{\text{sen}\,t}$

31. $\dfrac{1}{\tan t + \cot t} = \text{sen}\,t\cos t$

32. $\dfrac{1}{\cos t} - \cos t = \text{sen}\,t\tan t$

33. $\cos^4\alpha - sen^4\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

34. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha$
$= 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$

35. $\text{sen}9\beta + \text{sen}10\beta + \text{sen}11\beta + \text{sen}12\beta$
$= 4\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\beta\,\text{sen}\dfrac{21\beta}{2}$

36. $\text{sen}4\alpha - \text{sen}5\alpha - \text{sen}6\alpha + \text{sen}7\alpha$
$= -4\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\text{sen}\alpha\,\text{sen}\dfrac{11\alpha}{2}$

37. $(\text{sen}\alpha)^{-1} + (\tan\alpha)^{-1} = \cot\dfrac{\alpha}{2}$

38. $\cos 4\alpha - \text{sen}4\alpha\cot 2\alpha = -1$

39. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\text{sen}^{-2}3\alpha - 1} = 2$

40. $\dfrac{1-2\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}2\alpha} = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

41. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\cot\alpha - \tan\alpha} = \dfrac{1}{2}\text{sen}4\alpha$

42. $\dfrac{\text{sen}7\alpha}{\text{sen}\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$
$= 1$

43. $1 - \dfrac{1}{4}\text{sen}^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2\alpha$
$+ \cos^4\alpha$

44. $\dfrac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}5\alpha - \text{sen}3\alpha}{\cos 2\alpha - 1 - 2\text{sen}^2 2\alpha} = 2\text{sen}\alpha$

45. $\dfrac{\cot^2 2\alpha - 1}{2\cot 2\alpha} - \cos 8\alpha\cot 4\alpha = \text{sen}8\alpha$

46. $\dfrac{\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha + \text{sen}5\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$

47. $2(\text{sen}^6x + \cos^6x) - 3(\text{sen}^6x\cos^4x)$
$+ 1 = 0$

48. Verifique:

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

Verifique:

49. $1 + \cot\alpha = \dfrac{\sec\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

50. $\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

51. $(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$

52. $\tan\alpha - \cot\alpha = (\tan\alpha - 1)(\cot\alpha + 1)$

53. $\cot\alpha + \dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

54. $(1+\text{sen}\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right) = \cos\alpha$

55. $\dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{2}{\text{sen}\alpha}$

56. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

57. $\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)(\text{sen}\alpha + \cos\alpha) = 2 + \dfrac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$

58. $\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$
$= \cot\alpha - \tan\alpha$

59. $1 - 2\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Calcule sin usar las tablas:

60. $\dfrac{\text{sen}^2 120^\circ\cos(-180^\circ)}{\tan(-135^\circ)\cot 405^\circ}$

61. $\dfrac{9\text{sen}150^\circ - 4\cos 240^\circ + 12\text{sen}600^\circ}{3\text{sen}(-45^\circ) - 2\cos(-420^\circ)}$

62. $\tan 10^\circ\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 40^\circ\tan 50^\circ$
$\tan 60^\circ\tan 70^\circ\tan 80^\circ$

63. $\text{sen}1200^\circ + \cos(-1080^\circ)$

64. $4\text{sen}120^\circ\tan 300^\circ$

65. $2\text{sen}120^\circ - \tan 240^\circ$

66. $3\cos(-300°)\operatorname{sen}45° \tan 135°$

67. $2\operatorname{sen}^2 225° - \cot 330° \tan 405°$

68. $10\cot 315° \operatorname{sen}(-150°)\cos 225°$

Sin usar tablas, simplifique:

69. $\operatorname{sen}53° + \operatorname{sen}(-53°) + \cos 62° - \cos(-62°)$

70. $\cos 21° + \operatorname{sen}(-57°) + \cos(-21°) + \cos(-33°)$

71. $\operatorname{sen}(\pi - 1) - \cos(\frac{\pi}{2} - 1)$

72. $\tan 28° \tan 288° + \operatorname{sen}32° \operatorname{sen}148° - \operatorname{sen}302° \operatorname{sen}122°$

73. $\dfrac{\tan(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\cot(\pi + t)\operatorname{sen}(\pi - t)}$

74. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \operatorname{sen}(\pi + x)$

75. $\cot(2\pi - x) + \cot(2\pi + x) - \tan x$

Simplifique:

76. $\operatorname{sen}^2 62° + \operatorname{sen}^2 28°$

77. $\tan 44° \tan 45° \tan 46°$

78. $(\operatorname{sen}35° + \cos 35°)(\operatorname{sen}35° - \cos 35°) + 2\operatorname{sen}^2 55°$

Calcule sin el uso de las tablas:

79. $\cos^2 15° - \operatorname{sen}^2 75°$

80. $\cot 75°$

81. $\operatorname{sen}7°30$

Resuelva:

82. $\begin{cases} \operatorname{sen}2x = 1 \\ x^2 + 48 < 14x \end{cases}$

83. $\begin{cases} \tan \frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 10x + 24 < 0 \end{cases}$

84. $\begin{cases} \tan 2x = \sqrt{3} \\ x^2 + 15 < 8x \end{cases}$

85. $\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 1 \\ x^2 + 14x + 13 < 0 \end{cases}$

86. $\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 77 < 18x \end{cases}$

87. $\begin{cases} \operatorname{sen} \frac{x}{3} = 0 \\ x^2 + 17x + 70 < 0 \end{cases}$

Verifique si existen los ángulos α y β tal que se cumplen:

88. $2 - \operatorname{sen}\alpha = 1.5$

89. $1 + \cos\beta = 3$

90. $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = 1\frac{1}{3}$

91. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = -2$

92. $\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta = 0$

93. $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$

94. $\tan\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}$

95. $\cot\alpha \operatorname{sen}\alpha = -1.2$

Simplifique las siguientes expresiones:

96. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$

97. $\cot\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$

98. $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$

99. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha$

100. Simplifique la siguiente expresión:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x)\tan(\frac{\pi}{4} + x)$$

Si se sabe que: $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\frac{1}{2}$, calcule lo siguiente:

101. $\operatorname{sen}(270° + \alpha)$

102. $\cos(90° + \alpha)$

103. $\tan(\alpha - 270°)$

104. $\cot(180° - \alpha)$

Si se sabe que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ $(90° < \alpha < 180°)$ calcular:

105. $\tan(180° - \alpha)$

106. $\text{sen}(90° + \alpha)$

107. $\cos(270° - \alpha)$

108. $\cot(360° - \alpha)$

109. Si se sabe que $\alpha + \beta = 180°$ y $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ calcule $\text{sen}\beta$; $\tan\beta$; y $\tan\alpha$.

Calcule:

110. $\text{sen}\alpha - \cos\alpha$, si se sabe que $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{8}$

111. $\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha$, si se sabe que $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = p$

112. $\tan 2\alpha + \cot^2\alpha$, si se sabe que $\tan\alpha + \cot\alpha = 3$

113. Se sabe que $\cos x = 0.9$ y $x \in (2\pi, \frac{5}{2}\pi)$, calcule:

114. Se sabe que $\text{sen}x = -0.3$ y $x \in (9\pi, 10\pi)$, calcule:

a. $\cos x$

b. $\tan x$

c. $\cot x$

d. $\cos(3\pi - x)$

e. $\cos(\frac{9}{2}\pi + x)$

f. $\text{sen}(\frac{7}{2}\pi + x)$

g. $\tan(\frac{21}{2}\pi - x)$

h. $\cot(\frac{13}{2}\pi + x)$

Se sabe que $\text{sen}x + \cos x = \frac{1}{2}$, calcule:

115. $\text{sen}x \cos x$

116. $\text{sen}x - \cos x$

117. $\text{sen}^3 x + \cos^3 x$

118. $\text{sen}^4 x + \cos^4 x$

119. Calcule $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$ si se sabe que $\cot\alpha = m$ y $90° < \alpha < 180°$.

120. Calcule $x = \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta$ si se sabe que $\tan\alpha = -1$ y $\tan\beta = -\sqrt{3}$

121. Presente $\tan 3x$ en términos de $\tan x$.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

122. $\text{sen}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

123. $\text{sen}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

124. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

125. $\cos^2 x = 1$

126. $4\text{sen}^2 x = 3$

127. $\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x - 3 = 0$

128. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

129. $\tan^2 x = 3$

130. $\cot^2 x = 1$

131. $\tan x + \cot x = 2$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

132. $4\text{sen}x\cos 2x\,\text{sen}3x = \text{sen}4x$ para $x \in (o, \pi)$

133. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

134. $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

135. $\cot(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

136. $\cot\frac{x}{4} = -\sqrt{3}$

137. $\text{sen}(\frac{5}{4}\pi + x) - \text{sen}(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

138. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) + \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

139. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) + \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = -1$

140. $\cos(\frac{5}{4}\pi + x) - \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = 0$

Resuelva los siguientes ejercicios

141. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

142. $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

143. $2\cos x - \operatorname{sen} 2x = 0$

144. $\tan^2 x - \tan x = 0$

145. $\cos 2x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 5\cos 2x + 5$

146. $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

147. $5\cos x = \operatorname{sen} 2x$

148. $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = -1$

149. $\cos 3x = \frac{1}{3}\cos^2 3x$

150. $2\operatorname{sen} x\cos x + 4\cos x = \operatorname{sen} x + 2$

151. $\cos x + \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

152. $\operatorname{sen} 2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

153. $\operatorname{sen} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

154. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \operatorname{sen} 4x = 0$

155. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) + \cos 3x = 0$

156. $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi - x\right) - \cos 4x = 0$

157. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$

158. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) + \cos 3x = 0$

159. $\cos 2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \cos 2x = 0$

160. $\cos 4x + \operatorname{sen} 3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$

161. $\operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(3x + \pi) = 0$

162. $\operatorname{sen} 3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \cos 2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

163. $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

164. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 0$

165. $\operatorname{sen}(7\pi + x) + \cos(4x - \pi) = 0$

166. $\operatorname{sen} 7\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

167. $\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

168. $\cos(4x + \pi) + \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

169. $\cos 4\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) - \operatorname{sen}(x - \pi) = 0$

170. $\cos 5\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + \operatorname{sen} 3(x + \frac{\pi}{2}) = 0$

171. $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

172. $\cos 4x = \operatorname{sen} 4x + 1$

173. $-\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

174. $-\cos x = \operatorname{sen} x + 1$

175. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

176. $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x = -1$

177. $\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

178. $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = \sqrt{2}$

179. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{2} + \cos\frac{x}{2}$

180. $\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\sqrt{2}$

181. $2\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \operatorname{sen} x = 2$

182. $\sqrt{3}\cos x - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x = 2$

183. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}(\pi + x) = \sqrt{2}$

184. $\sqrt{3}\cos(\pi - x) + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

185. $\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = -\sqrt{2}$

186. $\cos(-2x) + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

187. $\cos(\pi - 2x) + \operatorname{sen} 2x = -\sqrt{2}$

188. $\cos(3x - \pi) + \operatorname{sen} 3x = -1$

189. $\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) = -1$

190. $\cos(\frac{13}{2}\pi + 4x) + \operatorname{sen} 4x = -1$

191. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x = \cos 4x$

192. $2\operatorname{sen}x\cos x - \sqrt{3}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\operatorname{sen}5x$

193. $2\operatorname{sen}x\cos x - \cos 2x = \sqrt{2}\operatorname{sen}4x$

194. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x$

195. $\cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen}2x = 2\cos 4x$

196. $\sqrt{3}(\cos x - \operatorname{sen}x) = \sqrt{3}\cos 2x - \operatorname{sen}2x$

197. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = 2\cos 3x$

198. $\cos 7x - \operatorname{sen}5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \operatorname{sen}7x)$

199. $\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}\operatorname{sen}3x$

200. $\cos 4x + \operatorname{sen}2x = \sqrt{3}(\operatorname{sen}4x - \cos 2x)$

201. $1 - \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

202. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

203. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

204. $1 + \cos x - \cos 2x = \cos 3x$

205. $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}4x = 0$

206. $\cos\frac{x}{2} + \cos x + \cos\frac{3}{2}x + \cos 2x = 0$

207. $\operatorname{sen}8x - \operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}2x$

208. $\cos 4x + \cos 2x = \operatorname{sen}9x + \operatorname{sen}3x$

209. $\cos 6x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}6x = \cos 2x$

210. $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}5x$

211. $\cos 7x\cos 13x = \cos x\cos 19x$

212. $\operatorname{sen}11x\cos 6x = \operatorname{sen}9x\cos 4x$

213. $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}6x = \operatorname{sen}8x\operatorname{sen}3x$

214. $\cos 3x\cos 5x = \cos 4x\cos 6x$

215. $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}5x\operatorname{sen}7x$

216. $\operatorname{sen}2x\cos 4x = \operatorname{sen}6x\cos 8x$

217. $\operatorname{sen}5x\cos 3x = \operatorname{sen}9x\cos 7x$

218. $\cos 3x\cos 5x = \cos x\cos 7x$

219. $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}5x$

220. $\operatorname{sen}x\cos 5x = \operatorname{sen}2x\cos 4x$

221. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

222. $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}5x = \operatorname{sen}4x$

223. $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 4x) + \cos 2x = 3\cos 3x$

224. $\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}4x - \cos x = 0$

225. $\operatorname{sen}x\cos 5x = \operatorname{sen}6x$

226. $\operatorname{sen}3x = \cos x - \operatorname{sen}x$

227. $\cos(\frac{\pi}{2} + 5x) + \operatorname{sen}x = 2\cos 3x$

228. $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x + \cos 5x = 0$

229. $\cos x\cos 5x = \cos 6x$

230. $\operatorname{sen}2x\cos 8x + \operatorname{sen}6x = 0$

231. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 4x = 2$

232. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

233. $\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 4x = \operatorname{sen}^2 6x + \operatorname{sen}^2 8x$

234. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2 x = \cos^2\frac{3}{2}x + \cos^2 2x$

235. $\cos^2 2x + \cos^2 4x = \operatorname{sen}^2 6x + \operatorname{sen}^2 8x$

236. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x = \frac{3}{2}$

237. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2 x + \cos^2\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$

238. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x = \frac{1}{2}$

239. $\dfrac{\tan(2x + \frac{\pi}{2})}{\tan(x + \frac{\pi}{4})} = 0$

240. $(1 - \cos 2x)\cot x = 0$

241. $\dfrac{x}{1 - \cos x} = 0$

242. $\dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen}2x} = 0$

243. $\dfrac{\tan 3(x + \pi)}{\tan x} = 0$

244. $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} + 3x)}{\operatorname{sen}x} = 0$

245. $\dfrac{\operatorname{sen}2x}{1 + \cos 2x} = 0$

246. $\dfrac{\operatorname{sen}2(x + \pi)}{\cos x} = 0$

247. $(1 - \cos 4x)\cot 2x = 0$

248. $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}=0$

249. $\tan x+\tan 3x=0$

250. $\cot 3x+\cot x=0$

251. $\tan x=\tan 9x$

252. $\cot x=\cot 4x$

253. $\tan 3x=\tan x$

254. $\cot 5x+\cot x=0$

255. $\cot 6x+\cot 2x=0$

256. $\tan 5x=\tan x$

257. $\tan 7x+\tan x=0$

258. $\cot 2x=\cot 8x$

259. $2\tan^3 x-2\tan^2 x+3\tan x-3=0$

260. $\tan(\frac{\pi}{4}+x)+\tan x-2=0$

261. $8\tan^2\frac{x}{2}=1+\sec x$

262. $\cot x+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=2$

263. $\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}7x=\sqrt{3}\operatorname{sen}2x$

264. $\operatorname{sen}x+\tan x=4\cos x+4$

265. $\cos 3x\tan 5x=\operatorname{sen}7x$

266. $1-\cos^2 2x=\operatorname{sen}3x-\cos(\frac{\pi}{2}+x)$

267. $1-\cos(\pi-x)+\operatorname{sen}\dfrac{\pi+x}{2}=0$

268. $\cos 3x+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x=0$

269. $(1+\cos 4x)\operatorname{sen}x=\cos^2 2x$

270. $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=4\operatorname{sen}^2 x$

271. $\tan 3x+\cos 6x=1$

272. $5\cos 2x=4\operatorname{sen}x$

273. $\cos 3x=2\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi+x)$

274. $\operatorname{sen}4x=2\cos^2 x-1$

275. $\operatorname{sen}6x+\operatorname{sen}2x=\frac{1}{2}\tan 2x$

276. $\cot x-\cos 2x=1$

277. $\operatorname{sen}3x=2\operatorname{sen}x$

278. $\operatorname{sen}3x\cos 3x=\operatorname{sen}2x$

279. $2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=1$

280. $2\operatorname{sen}^2(x-\frac{\pi}{4})=1$

281. $4\operatorname{sen}^2 x=3$

282. $3\tan^2 x=1$

283. $2\cos^2\frac{2}{5}x=1$

284. $\tan^2 2x=3$

285. $\tan^2(x+\frac{\pi}{4})=1$

286. $\cot^2 3x=1$

287. $4\cos^2 x=1$

288. $4\operatorname{sen}^2 x=1$

289. $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$

290. $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

291. $\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen}x+5=0$

292. $\tan^2 x-6\tan x+5=0$

293. $2\cos^2 x+\cos x-3=0$

294. $2\operatorname{sen}^2 x+5\operatorname{sen}x+2=0$

295. $2\operatorname{sen}^2 x-9\operatorname{sen}x-5=0$

296. $\tan^2 x-3\tan x-4=0$

297. $3\operatorname{sen}^2 x-7\operatorname{sen}x+4=0$

298. $2\cot^2 x+\cot x-1=0$

299. $\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{8}=0$

300. $\operatorname{sen}\frac{x}{6}+\cos\frac{x}{3}=0$

301. $3(1-\operatorname{sen}x)=1+\cos 2x$

302. $\cos 2x+3\operatorname{sen}x=2$

303. $52\operatorname{sen}^2 x+100\cos x=89$

304. $\cos 4x+2\cos^2 x=1$

305. $\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x=0.25$

306. $2\cos^2 x+5\operatorname{sen}x-4=0$

307. $6\cot^2 x - 2\cos^2 x = 5$

308. $\cos 2x - 5\operatorname{sen} x - 3 = 0$

309. $12\cos^4 2x - 5\operatorname{sen}^4 2x + 5 = 0$

310. Demuestre que si $x = \alpha\cos\alpha$ y $y = b\operatorname{sen}\alpha$, entonces $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Suponga, que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m$, calcule:

311. $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

312. $\operatorname{sen}^3 + \cos^3\alpha$

313. $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

314. $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha$

Calcule α y β si

315. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ y $\beta \in \langle 0, 90°\rangle$

316. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ y $\beta \in \langle 0, 90°\rangle$

Si α, β y θ son ángulos de un triángulo, demuestre que:

317. $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$

318. $\cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}$

319. $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

320. ¿Para cuál valor de "a" la ecuación $\cos^2 + \cos x + a = 0$ tiene solución?

Resuelva las siguientes desigualdades.

321. $\operatorname{sen} x \leq -0.5$

322. $\operatorname{sen} x < 1$

323. $\operatorname{sen} x > -1$

324. $\operatorname{sen}^2 x < 1$

325. $\cos x > -0.5$

326. $\cos^2 x \leq 0.25$

327. $\tan x > -1$

328. $\cot^2 x < 1$

329. $\cot^2 x > 1$

330. $\cos^2 x + \cos x \geq 2$

331. $\operatorname{sen} x \tan x \geq 0$

332. $|\operatorname{sen} x| > |\cos x|$

333. $|\operatorname{sen} x| \leq |\cos x|$

Demuestre que para cualquier $x \in R$ se cumplen las siguientes desigualdades:

334. $\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x + 3 \geq 0$

335. $4 + 4\operatorname{sen} x - \cos^2 x \geq 0$

336. $\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x - 4 \leq 0$

Calcule

337. $\operatorname{sen} 2x$

338. $\cos 2x$ si se sabe que $\tan x = t$

Demuestre que

339. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$

340. $\tan 2x = \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}$

341. $\tan 3x = \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}$

Demuestre que si $\cos\alpha + \cos\beta \neq 0$ entonces

342. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

343. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Demuestre que para cualquier α

344. $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$

345. $\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha - 45°)$

Sin el uso de tablas, demuestre que:

346. $\cos 20° - \cos 80° + \cos 140° = 6$

347. $\operatorname{sen} 20° - \operatorname{sen} 80° + \operatorname{sen} 140° = 0$

Demuestre que para cualquier α

348. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

349. $1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Demuestre que para cualquier α

350. $\operatorname{sen}(\alpha + 60°) + \operatorname{sen}(\alpha - 60°) = \operatorname{sen}\alpha$

351. $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha$

¿En qué condiciones se cumplen las siguientes identidades?

352. $\cot 2x = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$

353. $\operatorname{sen}2x = \frac{2}{\tan x + \cot x}$

354. $\frac{1}{1 + \tan x \tan 2x} = \cos 2x$

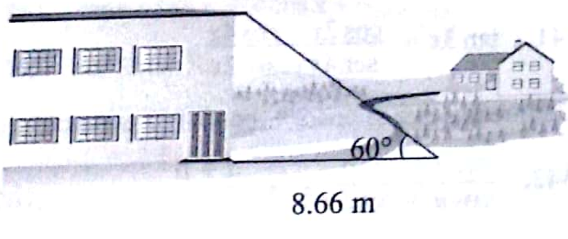
355. $\frac{\tan^2(45° + x) - 1}{\tan^2(45° + x) + 1} = \operatorname{sen}2x$

Demuestre las siguientes fórmulas.

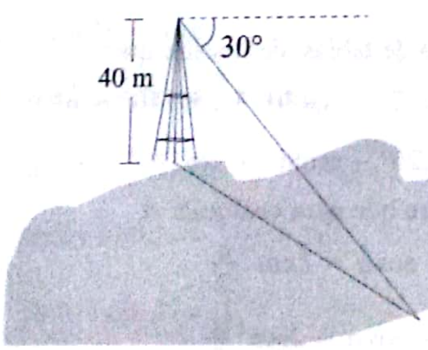
356. $\operatorname{sen}3x = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$

357. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
$= 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 7x$

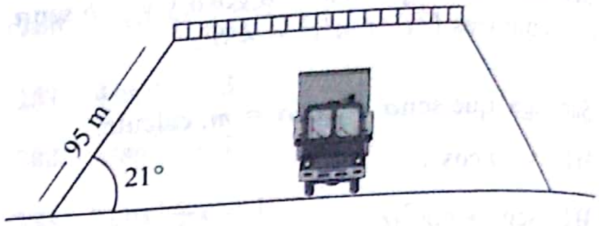
358. Encuentre la altura de un edificio si a 8.66 metros de su base, el ángulo entre el suelo y la azotea del edificio es de 60°.



359. Una torre de 40 metros de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30°. ¿Cuál es el ancho del lago?



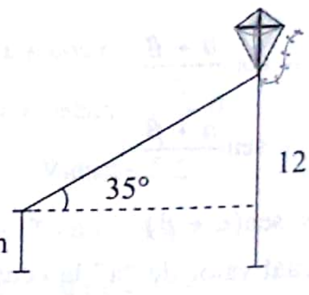
360. El ángulo de elevación de una rampa de 9.5 metros que lleva a un puente sobre una avenida es de 21°. Determine la altura que puede tener un camión para pasar por debajo del puente.



361. Calcule la sombra proyectada sobre el suelo de una persona que mide 1.67 metros si el ángulo de elevación del Sol es de 40°.

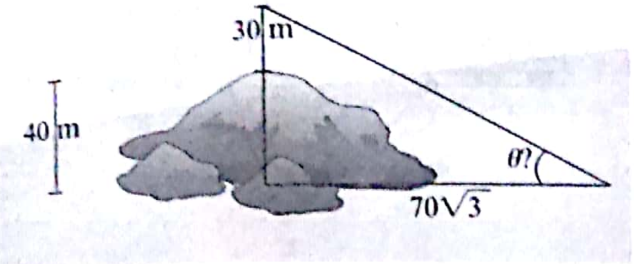
362. ¿Cuál es la altura de un edificio cuya sombra horizontal es de 60 metros cuando el ángulo de elevación del Sol es de 46°?

363. Un niño tiene en sus manos un papalote a 1 metro del piso. Si el papalote está a 12 metros del piso y la cuerda del papalote forma un ángulo de 35° con la horizontal, ¿cuántos metros de cuerda está usando?

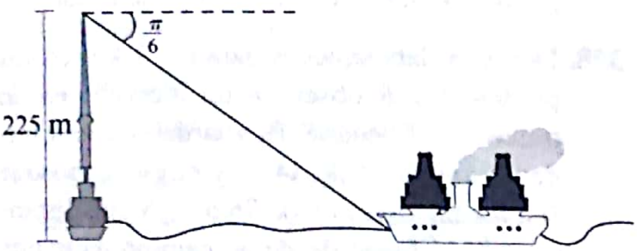


364. Un avión está volando alejándose de un observador en tierra a una razón constante y mantiene una altura de 5850 metros. En cierto momento el ángulo de elevación es de 42° y 20 segundos después 30° ¿qué tan rápido está volando el avión?

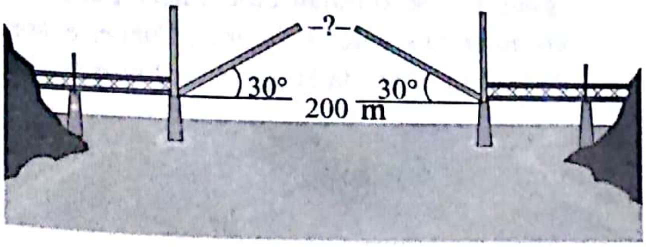
365. La altura de la cima de una colina se eleva 40 metros sobre el nivel de la pista de un aeropuerto cercano, y la distancia horizontal desde el extremo final de una pista hasta un punto que se encuentra directamente bajo la cima de la colina es de $70\sqrt{3}$ metros. Un avión despega al final de la pista en dirección a la colina con un ángulo que permanece constante para librarla. Si el piloto desea pasar 30 metros sobre la cima, ¿cuál debe ser el ángulo con que debe elevarse? Exprese su respuesta en grados y radianes.



366. Un puesto de observacion, que está en la costa, se encuentra a una altura de 225 metros sobre el nivel del mar. Si el ángulo de depresión desde este punto hasta un barco en el mar es $\frac{\pi}{6}$. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la orilla del mar?

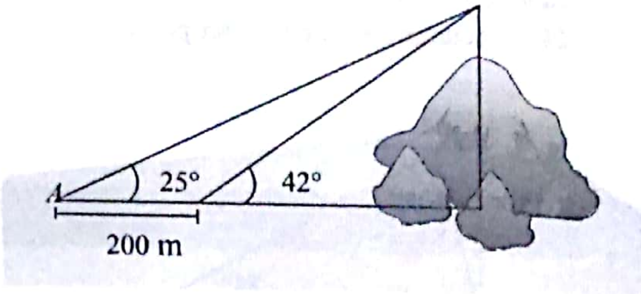


367. Un puente sobre un río tiene 200 metros de largo. Las dos secciones del puente rotan hacia arriba formando un ángulo de 30° para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a otra, él sabe que puede dar saltos hasta de 20 metros, ¿puede el motociclista saltar de un lado al otro, sin peligro?



368. Desde lo alto de un hotel con vista al mar, un turista observa una lancha que navega directamente al hotel. Si el turista está a 32 metros sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 30° a 45° durante la observación, ¿qué distancia recorre la lancha?

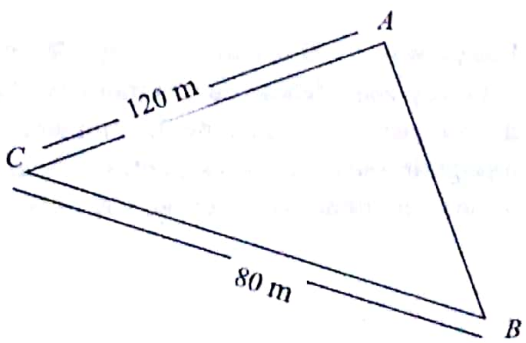
369. Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 25°. Cuando él se encuentra en un punto a 200 metros más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42°. ¿Cuál es la altura de la montaña ? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).



370. Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal y su punto más alto está a $4\sqrt{3}$ metros de altura respecto al suelo. Cuando el ángulo disminuye 15° el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{2}$ metros de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

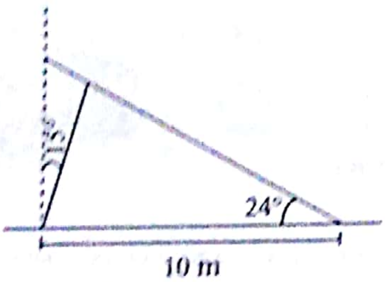
371. La gran pirámide de Egipto, es regular y de base cuadrada. El ángulo de inclinación de las caras con respecto a la base es de 52°. Desde una distancia de 100 m, perpendicular al punto medio de un lado de la base, se ve la punta de la base con un ángulo de elevación de 34°. Calcule la altura de la pirámide.

372. Dos puntos A y B están señalados en la orilla de un lago. Un topógrafo se encuentra en un punto C tal que $AC = 120$ metros y $BC = 80$ metros, y determina que ACB mide 52°. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

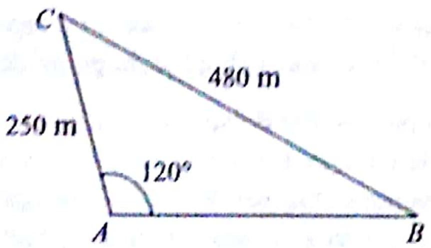


373. Un edificio está situado al final de una calle que tiene una inclinación de 10°. En un punto P a 210 metros del edificio, el ángulo subtendido por éste es de 16°. ¿Cuál es la altura del edificio?

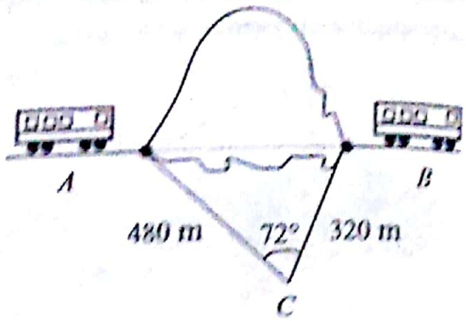
374. Un poste telegráfico está inclinado con un ángulo de 15° de la vertical del sol. El poste emite una sombra de 10 metros de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de 24°. Encuentre la logitud del poste.



375. Se desea cercar una finca triangular cuyos vértices son A, B y C, pero al empezar el trabajo se descubre que la marca B ha desaparecido. El título de la propiedad indica que la distancia de B a C es de 480 metros, la distancia de C a A es de 250 metros, y el ángulo es de 120°. Determine la posición de S obteniendo la distancia de A a B.



376. Los puntos A y B son los extremos de un túnel que pasará debajo de una montaña. Desde un punto C, lejos de la montaña, un topógrafo puede ver esos puntos y determina que AC mide 480 metros, CB mide 320 metros y el ángulo C mide 72°. ¿Cuál es la longitud del túnel?



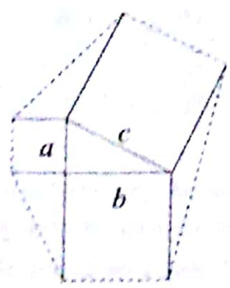
377. En un momento dado, un avión está directamente arriba de una carretera recta que une a dos pueblos, los ángulos de depresión a estos poblados son 12° y 8°. Si la distancia entre los dos pueblos es de 11.3 km, ¿a qué distancia está el avión de cada uno de los pueblos? ¿A qué altura está el avión en ese instante?

378. Dos guardabosques separados 3 km en los puntos A y B observan un incendio en un punto C del bosque. El guardabosque A mide un ángulo A de 44.3° y el guardabosque B mide un ángulo B de 76.5°. ¿A qué distancia está el fuego desde un camino recto que va de A a B?

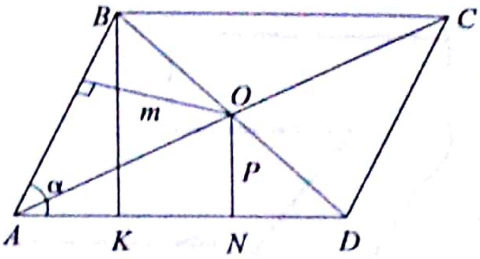
379. Aplique la ley de los senos para mostrar que el área de un triángulo ABC puede darse como:

$$K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$

380. Alrededor de una ilustración del teorema de Pitágoras con catetos a y b e hipotenusa igual a c, se dibujan unas líneas punteadas como en la siguiente figura. ¿Cuál es el área de la región limitada por estas líneas?



381. En un paralelogramo se dan el ángulo agudo α, y las distancias m y p entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determine las diagonales y el área del paralelogramo.



382. Sean a y b las bases de un trapecio y c y d sus lados, determine sus diagonales m y n.

EJERCICIOS II

1. Demuestre que: $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

2. Demuestre que: $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

3. Simplifique:
$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + 2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\cos(\alpha + \beta)$

4. Calcule (sin uso de tablas):
$\text{sen}^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \text{sen}^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

5. Calcule (sin uso de tablas):
$\text{sen}20^\circ\cos 50^\circ\text{sen}60^\circ\cos10^\circ$

6. Calcule $\text{sen}^6\beta + \cos^6\beta$ si $\text{sen}\beta + \cos\beta = a$

5. Calcule $\text{sen}^3\beta + \cos^3\beta$ si $\text{sen}\beta - \cos\beta = b$

CAPÍTULO 7

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Simbólicamente, $\log_a x = y$, $a > 0$, $a \neq 1$ es equivalente a $a^y = x$. La expresión $\log_a x = y$ se lee ***"el logaritmo en base a de x es y"***, esto también significa que a elevada a la y es x.

Propiedades de los logaritmos

1. Identidad general: si $x > 0$, entonces $x = a^{\log_a x}$
2. El logaritmo en base a de a es igual a uno: $\log_a a = 1$
3. El logaritmo de uno es igual a cero: $\log_a 1 = 0$
4. El logaritmo de un producto es una suma de logaritmos:
$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \ (x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0)$$
5. El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos:
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0)$$
6. El logaritmo de la potencia de un número es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número:
$$\log_a x^r = r\log_a x \ (x > 0)$$

Objetivos

- 7.1 Propiedades de los logaritmos
- 7.2 Logaritmos comunes
- 7.3 Logaritmos naturales

7. Fórmula para cambiar la base: si $x > 0$, entonces $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ para cualquier número real $b > 0$ y $b \neq 1$.

   En particular, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ o $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \; (p \in R, p \neq 0)$$

8. Si $a > 1$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$ implica que $x_1 > x_2$;
9. Si $0 < a < 1$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$ implica que $x_1 < x_2$;
10. Si $a > 1$, entonces $\log_a x_1 > \log_a x_2$ implica que $x_1 > x_2$;
11. Si $0 < a < 1$, entonces $\log_a x_1 > \log_a x_2$ implica que $x_1 < x_2$.

Logaritmos comunes

Cuando los logaritmos se utilizan principalmente como ayuda para realizar cálculos, la base se toma como 10. Dichos logaritmos se denominan ***logaritmos comunes***. Así que el logaritmo común de un número y es $\log_{10} y$. Con objeto de simplificar la notación, el logaritmo común por lo regular se denota por $\log y$, la base se omite:

$$x = \log y, \text{ si y sólo si } y = 10^x$$

Logaritmos naturales

También podemos formar logaritmos con base e, donde $e \approx 2.7$. Éstos se denominan ***logaritmos naturales***. Con objeto de simplificar la notación, el logaritmo natural se denota por *ln y*, la base se omite:

$$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \log_e y = \ln y$$

ALGUNAS INSTRUCCIONES PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

- La ecuación $\log_a f(x) = b$, de acuerdo con la definición de logaritmo, es equivalente a $f(x) = a^b$.
- La ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

- Para resolver ecuaciones que contienen logaritmos de bases distintas, es conveniente reducir todos los logaritmos a una base única:

- La ecuación exponencial $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) se resuelve aplicando a ambos términos un logaritmo de alguna base única $c > 0$, $c \neq 1$:

$$f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$$

- Para no perder raíces es necesario usar las fórmulas **(4), (5), (6)** de la siguiente manera:

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$$
$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$$
$\log_a f(x)^r = r\log_a| f(x)|$, r es un número par.

EJERCICIOS I

Complete las tablas siguientes:

1.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$					

2.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	8	16
$\log_4 x$							

3. En los siguientes ejercicios use las propiedades de los logaritmos para escribir la expresión como suma o diferencia de logaritmos:

a. $\log \frac{a}{c}$

b. $\ln \frac{xy^2}{z}$

c. $\ln(abc)$

d. $\ln \frac{a^2-1}{b^2}$

e. $\log a(a-2)^3$

f. $\log_3 3a\sqrt{b}$

En los siguientes ejercicios despeje x:

4. $3^x = e^{x-2}$

5. $5^{x+1} = 5e^{2-x}$

6. $2e^{3x} = 4e^{5x}$

7. $5^x = e^{x+4}$

8. $9^x = 2e^x$

9. $3^{x+4} = e^{5x}$

Escriba las ecuaciones siguientes en forma exponencial:

10. $\log_5 25 = 2$

11. $\log_3 1 = 0$

12. $\log_{0.5} 0.125 = 3$

13. $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Simplifique:

14. $e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$

15. $3 \cdot 10^{\log a^3}$

16. $\log\left(10^{3ab}\right)$

17. $\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln ab^2$

18. $\log 10\sqrt[3]{b}$

19. $3\ln\left(AB^2\right) - \ln \frac{B}{A^2}$

20. Encuentre los valores de x para los cuales tienen sentido las siguientes expresiones.

a. $f(x) = \log_3(9-3x)$

b. $f(x) = \log_{0,1}(-x)$

c. $f(x) = \log_7 x^2$

d. $f(x) = \log_3(x^2 - 5x)$

e. $f(x) = \log(4 - x^2)^{-1}$

Calcule las siguientes sumas:

21. $a^2 + a^{-2}$ si $a + a^{-1} = 5$

22. $a^2 + a^{-2}$ si $a - a^{-1} = 4$

23. $a^2 + 4a^{-2}$ si $a + 2a^{-1} = 3$

24. $a^2 + 9a^{-2}$ si $a - 3a^{-1} = 5$

25. $a^2 + a^{-2}$ si $a + a^{-1} = 2$

26. $a^2 - a^{-2}$ si $a - a^{-1} = 3$

27. $27a^3 + 64a^{-3}$ si $4a^{-1} + 3a = 2$

28. $8a^{-3} - 125a^3$ si $5a - 2a^{-1} = 2$

29 $5^x + 4 \cdot 5^{-x}$ si $5^{2x} + 16 \cdot 25^{-x} = 89$

30. $a^4 + a^{-4}$ si $a + a^{-1} = 2$

31. $a^2 + a^{-2}$ si $a^2 - a^{-2} = 2$

32. $2^x + 2^{-x}$ si $2^x - 2^{-x} = 4$

33. $3^x + 3^{-x}$ si $3^x - 3^{-x} = 5$

34. $a^3 + a^{-3}$ si $a + a^{-1} = 2$

35. $4^x - 4^{-x}$ si $2^x - 2^{-x} = 2$

36. Si se sabe que $\log_6 2 = a$ y $\log_6 5 = b$, calcule

a. $\log_2 3 + \log_{36} 5$

b. $\log_3 2 - \log_{1/6} 5$

c. $\log_3 5$

Calcule el valor de

37. $\log_4 20$ si $\log 2 = a$

38. $\log_{20} 8$ si $\log 5 = a$

39. $\log 56$ si $\log 2 = a, \log_2 7 = b$

40. $\log 108$ si $\log 2 = a, \log_2 3 = b$

Encuentre el valor de

41. $\log_b a$ si $3\log_b ab^{\frac{1}{3}} - 2\log_b ab = -1$

42. $\log_c ab^2$ si $\log_b a = 5$ y $\log_c b = 4$

43. $\log_a \sqrt[4]{\dfrac{ab}{c}}$ si $\log_b a = \dfrac{1}{8}$ y $\log_a \sqrt[4]{c} = 3$

44. $\log_{ac} b$ si $\log_a b = 3$ y $\log_c a = 4$

45. $\log_{ac} b$ si $\log_a b = 2$ y $\log_c b = 3$

46. $\log_a b$ si $4\log_{\sqrt[3]{a^2}} b + 2\log_{a^2} b^2 = 18$

Simplifique las siguientes expresiones:

47. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$

48. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

49. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$

50. $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

51. $$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$$

52. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$

53. $\log_2 1.6 + \log_2 10 - 2^{\log_2 \sqrt{3} \cdot \log_2 4}$

54. $7\log_5 \sqrt{5} \cdot \log_7 81 \cdot (\log_5 35 - 1)$

55. $(\sqrt{5}^{\log_5 4} + \log_2 \frac{1}{4} - \log_4 2)\log_{\sqrt{3}} 9$

56. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$

57. $\log_3 81 \log_2 \frac{1}{4} + \sqrt{10}^{\log 9}$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

58. $\log_6 x = \log_6 5 - 1$

59. $\log_5 x = \log_5 7 + 2$

60. $\log_2 x = \log_4 5$

61. $\log_2(x - 1) = 3$

62. $\log_x 9 + 0.5\log_x 16 = 2$

63. $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$

64. $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$

65. $(\log_3 x)^2 + \log_3 x^2 - \log_3 27 = 0$

66. $\log_{0,5}(x^2 - 3x + 3) = 0$

67. $\log_3\sqrt{x-5} + \log_3\sqrt{2x-3} = 1$

68. $4^x = \frac{1}{64}$

69. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$

70. $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

71. $9^x + 4 \cdot 3^x - 5 = 0$

72. $7^{x+1} - 7^{x-1} = 48$

73. $15 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^x = 27$

74. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

75. $3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} - 1 = 0$

76. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$

77. $\log_a\{1 + \log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)]\} = 0$

78. $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

79. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$

80. $\log_a y + \log_a(y + 5) + \log_a 0.02 = 0$

81. $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

82. $\log(x^2 - 12x + 20) = \log(4x - 8)$

83. $\log(3x - 9) = \log(x^2 - 9x + 18)$

84. $\log(x^2 - 9x + 18) = \log(2x - 9) + \log 2$

85. $2 \cdot \log_{25}(x - 3) - 1 = \log_5(x - 7)$

86. $\log_{12}(x - 7) = 1 - \log_{12}(x - 3)$

87. $\log(x^2 - 12x + 11) = \log(3x - 25)$

88. $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$

89. $\frac{1}{2}\log_{x+2}(2x + 4) = 1$

90. $\log_{x-2}(4 + 6x) = 2$

91. $\log_{x-1}(3x + 1) = 2$

92. $\log_{x+1}(4x + 1) = 2$

93. $\frac{1}{2}\log_{x+4}(16 - 2x) = 1$

94. $\log_{x-3}(9 + 6x) = 2$

95. $\log_{x-3}(9 - 2x) = 2$

96. $\log_{x-1}(2x + 1) = 2$

97. $\log_{x+1}(1 + 4x) = 2$

98. $\log_x(6 + x - x^2) = 2$

99. $\log_{2x-6}(3x^2 - 17x + 26) = 2$

100. $\log_{x-1}(5x - x^2 - 2) = 2$

101. $\log_{x-4}(2x^2 - 11x - 2) = 2$

102. $\log_{x-1}(4 + 3x - x^2) = 2$

103. $\log_{2x-2}(2x^2 + 3x - 1) = 2$

104. $\log_{x+1}(3 - x - x^2) = 2$

105. $\log_{x+1}(x^2 - 5x - 6) = 1$

106. $\log_{x-2}(x^2 - 4x + 2) = 1$

107. $\log_4^2(x + 1) = 1$

108. $|\log x^2| = 4$

109. $\log(x + 1) \cdot \log(x + 1)^2 = 8$

110. $\log(1 - x) \cdot \log(1 - x)^{-2} + 8 = 0$

111. $|\log(x - 2)| = 1$

112. $\log^2 x^2 = 4$

113. $|\log^2 x| = 1$

114. $1 - \log_4^2(x - 1)^2 = 0$

115. $\log(2 - x)^2 = \frac{3}{\log(2-x)}$

116. $\frac{1}{4}\log(3 - x)^4 - \frac{4}{\log(3-x)} = 0$

117. $3 \cdot \log^2 x - 2 \cdot \log x^2 + 1 = 0$

118. $3 \cdot \log_2^2 x + \log_2 x^4 + 1 = 0$

119. $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$

120. $3 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

121. $2 \cdot \log_4^2 x - \log_4 x^5 + 2 = 0$

122. $\log_6^2 x - \log_6 x^2 + 2 = 0$

123. $2\log_4^2 x - \log_4 x^5 - 3 = 0$

124. $2\log_4^2 x + 2\log_4 4x - 2 = 0$

125. $\log_2^2 x + 4\log_4 2x = 1$

126. $3\log^2 x^2 - \log x = 1$

127. $\log_3^2 x - \log_3 3x = -1$

128. $3\log_5^2 x = 3 - 2\log_5 5x$

129. $\log^2 x^2 + 2\log 10x - 4 = 0$

130. $\log^2 x^2 - 3\log x - 1 = 0$

131. $4\log_3^2 x - 7\log_3 3x + 7 = 0$

132. $x^{\log x} = 1000x^2$

133. $2^{x^2} = 16$

134. $4^x = \frac{1}{64}$

135. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$

136. $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

137. $9^x + 4 \cdot 3^x - 5 = 0$

138. $7^{x+1} - 7^{x-1} = 48$

139. $15 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^x = 27$

140. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

141. $9 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

142. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

143. $4^{x-1} + 3 \cdot 4^{x+1} = 196$

144. $3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x+1} = 138$

145. $4^{-x+1} - 3 \cdot 4^{-x-1} = 52$

146. $5^{1-x} + 3 \cdot 5^{2-x} = 80$

147. $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^{2x-3} = 72$

148. $3^{-x} + 2 \cdot 3^{1-x} = 21$

149. $5^{x+2} - 7 \cdot 5^{x-1} = 118$

150. $2^{3-x} + 5 \cdot 2^{1-x} = 144$

151. $6^{x+1} + 4 \cdot 6^{x-1} = 40$

152. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$

153. $\left(\frac{5}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} = (0{,}3)^{-1}$

154. $\left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{x-1} = \frac{40}{3}$

155. $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{x+1} = \frac{5}{2}$

156. $2^{x+2} \cdot 3^{x-2} = 16 \cdot 36^{x-2}$

157. $\left(\frac{7}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{x-1} = \frac{14}{3}$

158. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$

159. $9 \cdot 4^{x-1} + 8 \cdot 9^{x-1} = 3 \cdot 6^x$

160. $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$

161. $7 \cdot 9^x + 4 \cdot 21^x - 3 \cdot 49^x = 0$

162. $7 \cdot 25^x + 2 \cdot 35^x - 5 \cdot 49^x = 0$

163. $4 \cdot 09^x + 12^x = 3 \cdot 4^{2x}$

164. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

165. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$

166. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x = 17 \cdot 2^{2x+2}$

167. $8^x + 12^x = 2 \cdot 27^x$

168. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

169. $9^x + 6^x = 15 \cdot 2^{2x-2}$

170. $3 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$

171. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$

172. $3^{3x} + 2 \cdot 48^x = 3 \cdot 64^x$

173. $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$

174. $2^{x-1} - 5^x = 5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x+1}$

175. $5^{x+1} - 4^{x-1} = 5^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1}$

176. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2$

177. $6^{x+1} + 5^{x+2} = 6^{x+2} - 5^{x+1}$

178. $4^x + 9^{x+1} = 2 \cdot 4^{x+1} - \frac{3}{2}9^x$

179. $7^{x-5} + 3^{x-4} = 7^{x-4} - 3^{x-4}$

180. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$

181. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

182. $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$

183. $3^{2x+2} + 5 \cdot 6^x - 2^{2x+2} = 0$

184. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

185. $4^{x+3} + 9^{x+3} - 12 \cdot 6^{x+2} = 0$

186. $4 \cdot 25^x - 21 \cdot 10^x - 25 \cdot 4^x = 0$

187. $16 \cdot 9^{x-2} + 7 \cdot 12^{x-2} - 9 \cdot 16^{x-2} = 0$

188. $x^{1+\log x} = 10x$

189. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$

190. $x^{\log x^4 - 5\log x} = 0.0001$

191. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$

192. $27x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}$

193. $10^{\log^2 x} + x^{\log x} = 2$

194. $6 \cdot 10^{\log^2 x} + 4x^{\log x} = 10^5$

195. $4x^{\log_2 x} - 2^{1+\log_2^2 x} = 12$

196. $5\log_5^2 x + x^{\log_5 x} = 0$

197. $4^{1+\log_4^2 x} - 3x^{\log_4 x} = 1$

198. $3 \cdot 2^{\log_2^2 x} - x^{\log_2 x} = 4$

199. $3x^{\log_2 x} - 2^{\log_2^2 x} = 1024$

200. $\log_2\left(25^{x+3} - 1\right) = 2 + \log_2\left(5^{x+3} + 1\right)$

Resuelva las siguientes desigualdades:

201. $\log_2 x < \log_2 4$

202. $\log_3 x > \log_3 4$

203. $\log_5 x \geq \log_{25} 36$

204. $\log_7 x < 1$

205. $\log_7 x > -1$

206. $\log_2 x \leq \log_4 9 + \log_2 3$

207. $\log_{0,2} x < \log_{0,2} 3$

208. $\log_{1/3} x > \log_{2/3} 5$

209. $\log_{0,5} x \geq 1$

210. $\log_{2/3} x \leq -1$

211. $\log_{0,1}(3 - x) > 1 + \log_{0,1} 20$

212. $\log_2(\log(x - 1)) > 0$

213. $\log(2 - \log_2 x) > 0$

214. $\log(\log(x^2 + 1)) \geq 1$

215. $\log\operatorname{sen} x \leq 0$

216. $\log_4 2x < -1$

217. $2^x > \sqrt{2}$

218. $\left(\frac{7}{8}\right)^x < 1$

219. $(0.2)^x \leq 0.04$

220. $3^x \leq 81$

221. $\frac{1}{2^x} < 8$

222. $\frac{1}{4^x} \geq 16$

223. $5^{x+1} < 125$

224. $4^{x+1} - 4^{x-1} < 15$

225. $3^{x+1} + 12 \cdot 3^{x-1} \leq 21$

226. $8 \cdot 7^x - 49^x > 7$

227. $4^x - 2^x \geq 2$

228. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0$

229. $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$

230. $5^{2x+1} > 5^x + 4$

231. $0.5^{x-2} > 6$

232. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$

233. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$

234. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0.3 > 0$

235. $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0$

236. $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0$

237. $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+3) < \log_{1,2}5$

238. $0,5^x \leq 0.25^{x^2}$

239. $5^{\log_x \frac{x+2}{x}} < 1$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

240. $\begin{cases} 2^x = 16 \\ \log(x^2 - 5x + 5) = 0 \end{cases}$

241. $\begin{cases} 3^{x^2+x-2} = 1 \\ \log(2-x) + \log x = 0 \end{cases}$

242. $\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^{x-1} + 5 = 0 \\ \log(120 - 4x) = 2 \end{cases}$

243. $\begin{cases} 2^{\log x} = 4 \\ (\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \end{cases}$

244. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$

245. $\begin{cases} 10^{1+\log(x+y)} = 50 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 2 - \log 5 \end{cases}$

246. $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 - \log 5 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 1,2 + 1 \end{cases}$

247. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

248. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \log(y+x)^2 - \log x = 2\log 3 \end{cases}$

249. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2 \\ xy = 27 \end{cases}$

250. $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$

251. $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$

252. El 1 de enero de 1990 la población en cierta ciudad era de 900,000. La población aumenta con una rapidez de 2.8% anual. Por lo tanto, t años después del 1 de enero de 1990, se espera que la población sea $900{,}000\,(1.028)^t$ ¿En qué fecha la ciudad tendrá 1,500,000 habitantes?

253. En 1995, la población de cierta ciudad era de 3 millones de habitantes y estaba creciendo a una tasa del 4% anual ¿Cuándo rebasará la población la marca de 8 millones, suponiendo que la tasa de crecimiento es constante?

254. En 1999, la población en China era de 1,246,871,951, con una tasa de crecimiento de 0.98% si la extensión territorial de China es de 9,596,960 km^2. ¿En qué año tendrán una densidad de 200 habitantes por km^2?

255. En Guyana la tasa de crecimiento es de -0.90%. Si en 1996 tenía 712,091 habitantes, de contar con esta tasa, cuándo tendrá los $\frac{2}{3}$ de la población de 1996?

256. Las islas Caimán es uno de los países americanos con mayor tasa de crecimiento (4.27%). Se piensa que esta tasa de crecimiento comenzará a reducir al llegar a los 50,000 habitantes. Si en 1996 tenía 34,646 habitantes, ¿en qué año comenzará a reducir la tasa de crecimiento?

257. La suma de \$1000 se invierte a un interés compuesto anual del 8% ¿Cuánto tiempo tardará la inversión en incrementar su valor a \$5000?

258. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que se triplique el depósito de \$980, si gana un interés anual del 6% compuesto semestralmente? Tenga en cuenta que la cantidad al final de n

periodos de intereses (An) de una inversión P, con una tasa de 100% compuesto m veces al año, está dada por la fórmula:

$$An = P(1 + \tfrac{i}{m})^n$$

259. Utilice la fórmula anterior para calcular el tiempo en que se duplicará una inversión de \$1200 al 8% compuesto trimestralmente.

260. Una población de bacterias tiene un tamaño dado por la fórmula :

$$P = 40{,}000e^{kt}$$

donde P es la población después de t horas, y K es una constante. Si en 40 horas hay 60,000 bacterias ¿Cuándo habrá 80,000?

261. El número de bacterias en un cultivo crece de acuerdo con la fórmula

$$P = P_o e^{kt}$$

donde P es el número de bacterias después de t horas. Si el número de bacterias fue estimado en 10,000 al medio día, y en 40,000 después de 2 horas, ¿cuántas habrá a las 5 p.m?

Radiactividad

Los elementos radiactivos decaen en una proporción directa a la cantidad presente, de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$y = y_0 e^{kt}$$

donde y^0 es la cantidad radiactiva presente inicialmente y y la cantidad que queda después de un tiempo t; k es una constante negativa.

262. El carbono 14, uno de los tres isótopos del carbón, es radiactivo y decae a una razón proporcional a la cantidad actual. Su vida media es de 5730 años, es decir, una cantidad dada de carbono 14 tarda 5730 años en reducirse a la mitad de su cantidad original. Si estaban presentes 20 gramos al principio, ¿cuánto quedará después de 3000 años?

263. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 920 años. Si hay 15 gramos al principio, ¿cuanto quedará al cabo de 300 años?

264. Si una sustancia radiactiva pierde 20% de su radiactividad en 3 días, ¿cuál es su vida media?

265. La vida media del radio es de 1590 años. Si se dejan 10 gramos de radio durante 1000 años, ¿cuánto quedará?

266. Suponga que 5 gramos de una sustancia radiactiva disminuyen a 4 gramos en 30 segundos, ¿cuál es la vida media?

267. Una momia egipcia contiene 60% de su carbono 14 original. Calcule la antigüedad de la momia.

268. La magnitud M de una estrella o planeta está definida por $M = -(\frac{5}{2}) \log(\frac{B}{Bo})$, donde B es la brillantez y Bo es una constante. El planeta Venus tiene una magnitud promedio de -3.9 y la estrella polar, de 2.1. En promedio, ¿cuántas veces es más brillante Venus que la estrella polar?

269. El nivel de intensidad β de una onda sonora de intensidad I está dado por $\beta = 10 \log \frac{I}{Io}$ donde Io es un patrón de referencia igual a 10^{-12}, que corresponde de manera aproximada al sonido más débil que se pueda oír. El nivel de intensidad está medido en decibeles (db). Determine el nivel de intensidad del sonido del metro, que tiene una intensidad de 10^{-2}.

270. La eficiencia de un operario en cierta fábrica está dada por $y = 120 - 80e^{-0.3t}$, donde el operario puede completar y unidades de trabajo cada día después de desarrollar dicho trabajo durante t meses. ¿Cuántos meses de experiencia requerirá dicho obrero para completar 8 unidades diarias?

EJERCICIOS II

1. Resuelva la ecuación: $3^{2x-1} = \dfrac{729}{9^x + 1}$

2. Encuentre el valor de b si: $\log_b \dfrac{1}{27} = -\dfrac{3}{2}$

3. Encuentre el valor de x si

$$\log_{\frac{1}{3}} 12x^2 - \log_{\frac{1}{3}}(20x - 9) = -1$$

4. Demuestre que:

a. $\log_{ab} C = \dfrac{\log_a C \cdot \log_b C}{\log_a C + \log_b C}$

b. $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_{ab}$

5. Despeje x en términos de y si

$$y = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2e^x}$$

6. Compruebe la siguiente igualdad, sin usar tablas o calculadora.

$$3\log\left(\tfrac{36}{25}\right) + \log\left(\tfrac{6}{27}\right)^3 - 2\log\left(\tfrac{16}{125}\right) = \log 2$$

7. Suponga que 8 gramos de una sustancia radiactiva decrecen a 6 gramos en 30 segundos. ¿Cuál es la vida media, con precisión en décimas de segundo?

8. Use las propiedades de los logaritmos para escribir la siguiente expresión con sumas, diferencias y múltiplos de logaritmos.

$$\ln \frac{(3x+1)^2(2x+3)}{(x-1)^3}$$

CAPÍTULO 8

Matrices y determinantes

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. Los números del arreglo se conocen como elementos de la matriz.

El ***tamaño de una matriz*** se describe especificando el número de renglones (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales) que se presentan en ella.

Se usarán letras mayúsculas para denotar matrices y minúsculas para denotar las cantidades numéricas.

Si **A** es una matriz, se usará a_{ij} para denotar el elemento que está en el renglón i y la columna j de **A**. Por consiguiente, una matriz general de $m \times n$ se puede escribir

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Objetivos

- 8.1 Propiedades de los determinantes
- 8.2 Regla de Cramer

Sean $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. El ij-ésimo cofactor de $\mathbf{A}$, denotado por $\mathbf{A}_{ij}$, está dado por $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|Mij|$,es decir, el ij-ésimo cofactor de $\mathbf{A}$ se obtiene calculando el determinante del ij-ésimo menor y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Adviértase que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1, \text{ si } i+j \text{ es par} \\ -1, \text{ si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. El ***determinante de*** $\mathbf{A}$, está dado por

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}.$$

A la expresión que aparece en el lado derecho se le llama desarrollo mediante cofactores.

■ Propiedades de los determinantes

a) Si los elementos de cualquier renglón o columna de $\mathbf{A}$ son ceros, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$

b) Si el i-ésimo renglón o la j-ésima columna de $\mathbf{A}$ se multiplican por la constante c, entonces $\det(\mathbf{A})$ se multiplica por c.

c) Al intercambiar dos renglones (o columnas) cualesquiera de $\mathbf{A}$, el determinante de la matriz así obtenida es igual a $\det(\mathbf{A})$ multiplicado por -1.

d) Si $\mathbf{A}$ tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

e) Si un renglón (columna) de $\mathbf{A}$ es un múltiplo constante de otro renglón (columna) de $\mathbf{A}$, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

f) Si el múltiplo de un renglón (columna) de $\mathbf{A}$ se suma a otro renglón (columna) de $\mathbf{A}$, entonces el valor del determinante no cambia.

Sea $\mathbf{A}$ un matriz 2×2. Entonces:

a) $\mathbf{A}$ es invertible si y sólo si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

b) Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $m \times n$. La **transpuesta de A**, que se escribe $\mathbf{A}^T$, es la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas de $\mathbf{A}$. La matriz cuadrada de $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es ***simétrica*** si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$ y $[\mathrm{A}_{ij}]$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n; j = 1, 2, 3, \ldots, n$) la matriz de sus cofactores. La ***adjunta de* A** que se escribe como $adj(\mathbf{A})$ es la transpuesta de la matriz de sus cofactores, esto es

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2} \\ \\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn} \end{bmatrix}$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ es invertible, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

Supóngase que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times m$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de $m \times p$. Entonces,

a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

c) Si $\mathbf{A}$ es invertible, entonces $\mathbf{A}^T$ también es invertible y $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Lo escribimos en forma matricial como $\mathbf{A}x = \mathbf{B}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz invertible de $n \times n$, entonces para la matriz $\mathbf{B}$ de $n \times 1$, el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = \mathbf{B}$ tiene exactamente una solución $x = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

Regla de Cramer

Sea **A** una matriz $n \times n$ y supóngase que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Entonces, la única solución del sistema $\mathbf{A}x = \mathbf{B}$ está dada por $x_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{D}}$; $x_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\mathbf{D}}$; ...; $x_n = \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{D}}$ donde $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{D}$; $\det(\mathbf{A}_i) = \mathbf{D}_i$ ($i = 1, 2, 3..., n$) y $\mathbf{A}_i$ es la matriz que se obtiene al sustituir la i-ésima columna de **A** por **B**.

EJERCICIOS I

1. Determine los valores de a y b para que las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3a + 2b & 4 \\ 2 & a - b \end{bmatrix}$$

sean iguales.

En los siguientes problemas efectúe el cálculo indicado con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

2. $3\mathbf{A}$

3. $\mathbf{A} - \mathbf{C}$

4. $0\mathbf{B}$ (0 es el cero escalar)

5. $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$

6. $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$

7. Halle una matriz D tal que $2A + \mathbf{B} - D$ sea la matriz cero de 3×2.

Realice el cálculo que se indica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

8. $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$

9. $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$

10. $\mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{B}$

11. Determine una matriz **D** tal que $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$ sea la matriz cero de 3×3.

Verifique que para las siguientes matrices **A** y **B** y el número α se tiene que $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$:

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\alpha = 4$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\alpha = 3$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $\alpha = -1$

15. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

calcule **AB** y **BA**.

16. Sean

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Calcule **AB**

17. Verifique que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ para

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Efectúe el cálculo que se indica:

18. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

27. $3\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

28. $5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

31. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada entonces $\mathbf{A}^2$ se define como $\mathbf{AA}$ calcule $\mathbf{A}^2$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

32. Calcule $\mathbf{A}^3$ siendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$

y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos y & \operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & \cos x \end{bmatrix}$

demuestre que:

33. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$

34. $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -\operatorname{sen} 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

35. $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix}$

Calcule el determinante indicado:

36. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

43. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Usando propiedades de los determinantes calcule:

44. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

52. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Calcule el determinante:

54. $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

56. $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$

57. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

58. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Evalúe cada determinante:

59. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

60. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

61. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

62. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

63. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Una matriz con todos los elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal se llama matriz triangular superior. Encuentre:

64. $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

65. $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

66. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, verifique que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

67. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, verifique que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

68. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y demuestre que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

69. En geometría analítica se puede demostrar que el área de un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

Encontrar el área de un triángulo con vértices $(-1,4)$, $(4,8)$ y $(1,1)$.

Halle la traspuesta de la matriz dada:

70. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

74. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

76. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

77. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

¿Cuáles de las siguientes matrices son simétricas?

78. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

79. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

80. $\mathbf{A}^{-1}$ sí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

81. $\mathbf{A}^t$ sí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

82. Encuentre todos los valores de a, b y c para los cuales **A** es simétrica.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3a+2b-c \\ a-b+c & 0 & 2 \\ 3 & a+b & 1 \end{bmatrix}$$

83. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ¿es $(\mathbf{A}^{-1})^t$ una matriz simétrica?

84. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule $\mathbf{A}^{-1}$, si existe.

85. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ calcule $\mathbf{A}^{-1}$ si existe.

Determine si la matriz dada es invertible, si lo es, calcule su inversa:

86. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

87. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

88. $\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$

89. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

90. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

91. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

92. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

93. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

94. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

95. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

96. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

97. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

98. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

99. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

100. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

101. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

102. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

103. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

104. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

105. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

106. Demuestre que $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

107. Demuestre que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

108. Muestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y halle su inversa.

109. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

compruebe que $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 - 7\mathbf{A} - 11\mathbf{I} = 0$. A partir de este resultado pruebe que $\mathbf{A}$ es invertible y halle $\mathbf{A}^{-1}$.

110. Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-2}$ y $\mathbf{A}^{-K}$ si:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer:

111.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

112. $2x_1 + 3x_2 = -1$
$-7x_1 + 4x_2 = 47$

113. $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$
$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$

114. $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

115. $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$
$x_1 + x_3 = 2$
$-x_2 + 5x_3 = 1$

116. $x_1 - x_4 = 7$
$2x_2 + x_3 = 2$
$4x_1 - x_2 = -3$
$3x_3 - 5x_4 = 2$

117. $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2$
$-x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 = -3$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1$

Resuelva el sistema de ecuaciones:

118. $\begin{cases} 16x - 27y = 20 \\ 5x + 18y = 41.5 \end{cases}$

119. $\begin{cases} 18x - 21y = 2 \\ 24x - 15y = 7 \end{cases}$

120. $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{3} + 4 = 3x \\ \dfrac{2.5x - 2y}{2} - 2x = 3 \end{cases}$

121. $\begin{cases} \dfrac{15x + 7y}{16} - \dfrac{3x - 4}{4} = -1 \\ 3x - \dfrac{10 - y}{6} = 2 - y \end{cases}$

122. $\begin{cases} \dfrac{x - y}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x - y}{4} \\ \dfrac{x + y}{2} = 4.5 + \dfrac{y - 1}{3} \end{cases}$

123. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{5} + \dfrac{y}{5} = -2 \\ \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

124. $\begin{cases} \dfrac{7x - 3y}{5} = \dfrac{5x - y}{3} - \dfrac{x + y}{2} \\ 3(x - 1) = 5(y + 1) \end{cases}$

125. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{1}{5}(x + 2) = 1.1 \\ x - 2y + 1 = \dfrac{1}{4}\left[2x + 3\left(y - \dfrac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$

126. $\begin{cases} 1 - 0.3(y - 2) = \dfrac{x + 1}{5} \\ \dfrac{y - 3}{4} = \dfrac{4x + 9}{20} - 1.5 \end{cases}$

127. $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = \dfrac{x + y}{2} + 1 \\ \dfrac{3}{4}x - 1\dfrac{3}{4}y = 1 \end{cases}$

Resuelva los siguientes sistemas mediante la Regla de Cramer.

128. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y + z = -5 \\ -x + z = -3 \end{cases}$

129. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$

130. $\begin{cases} 3y + z = -1 \\ x + 2z = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

131. $\begin{cases} 2y - z = -3 \\ x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$

EJERCICIOS II

1. Dadas las matrices **A** y **B**, calcule **A + B**, **4A**, **4(A + B)**, **AB**, **(4A)B**, **4(AB)**, **A(4B)**.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Si **A** y **B** son matrices cuadradas, explique porqué no es válida en general la fórmula.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

3. Dé ejemplos de matrices cuadradas **A**, **B** y **C** tales que

a) $AB \neq BA$
b) $AB = AC$ pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$
c) $AB = 0$ para $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{B} \neq 0$

4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Complete el siguiente cuadro con sí y no y justifique su respuesta:

Matriz	*Invertible*	*Simétrica*
A		
B		
AB		
$\mathbf{A}^t\mathbf{A}$		
$(\mathbf{A}^{-1})^t$		
$(\mathbf{A}^t)^{-1}$		
$(\mathbf{AB})^t$		
$\mathbf{A}^2$		
$\mathbf{A}^{-2}$		
$\mathbf{A}^{-2} - 2\mathbf{A}$		

5. Complete las siguientes afirmaciones:

a) Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

entonces $\det\mathbf{B} = ?$

b) Si $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

entonces $\det\mathbf{C} = ?$

c) Si $\det\mathbf{A} = 2$ y $\det\mathbf{B} = 3$ entonces $\det(A^{-1}B^{-1}) = ?$

6. Si $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & -5 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2912$

entonces $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 5 & 3 \\ -4 & 6 & -8 & -10 & -14 \\ 3 & -5 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = ?$

a. −2912
b. −5825
c. 5824
d. 2912

7. Sea $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule:

a. *adj*$\mathbf{D}$
b. $\mathbf{D}^{-1}$
c. $\mathbf{D}(adj\mathbf{D})$
d. $\mathbf{DD}^{-1}$

8. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) Complete los cofactores de **A** y encuentre *adj***A**.

$\mathbf{A}_{11} = 11$ $\quad\mathbf{A}_{12} =$ $\quad\mathbf{A}_{13} = 2$ $\quad\mathbf{A}_{14} = -3$
$\mathbf{A}_{21} =$ $\quad\mathbf{A}_{22} = -8$ $\quad\mathbf{A}_{23} = 4$ $\quad\mathbf{A}_{24} = -6$
$\mathbf{A}_{31} = -3$ $\quad\mathbf{A}_{32} = -4$ $\quad\mathbf{A}_{33} = 2$ $\quad\mathbf{A}_{34} =$
$\mathbf{A}_{41} = -12$ $\quad\mathbf{A}_{42} = 12$ $\quad\mathbf{A}_{43} =$ $\quad\mathbf{A}_{44} = 8$

b) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.

9. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

a) Exprese el sistema en forma matricial
b) ¿Qué condiciones deben satisfacer las b para que el sistema tenga solución única?

10. Encuentre la solución al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= -10 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 7x_4 &= -6 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 9

Geometría analítica

Un ***sistema coordenado rectangular o cartesiano*** en el plano se define al considerar dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto llamado origen. A cada punto del plano se le puede asignar un par de números, llamados ***coordenadas cartesianas*** del punto, donde el primer número es la ***coordenada x*** o ***abscisa*** y el segundo es la ***coordenada y*** u ***ordenada.***

La ***distancia*** $d(P_1P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Conviene notar que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$, por lo que al aplicar la fórmula de la distancia no importa el orden en el que se restan las abscisas y las ordenadas del punto.

Objetivos

- 9.1 Líneas rectas
- 9.2 Formas de ecuaciones de líneas rectas
- 9.3 Rectas paralelas y perpendiculares
- 9.4 Círculo
- 9.5 Secciones cónicas

Líneas rectas

Cualquier línea recta, con excepción de las líneas verticales, puede caracterizarse por medio de su ***pendiente***. Por "pendiente" debe entenderse, básicamente, ***la inclinación de una recta.***

Si (x_1, y_1) y (x_2, x_2) son dos puntos diferentes sobre una recta no vertical, la pendiente de la recta es el número m dado por

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(\frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}\right) = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

El valor de m calculado a partir de esta ecuación es independiente de la elección de los puntos P_1 y P_2 sobre la recta. La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, cero o indefinida:

- Una línea con una ***pendiente positiva*** sube de izquierda a derecha. Para ella el valor de y aumenta, al aumentar x.
- Una línea que tiene ***pendiente negativa*** baja de izquierda a derecha. Para ella el valor de y disminuye, al aumentar x.
- Una línea que tenga ***pendiente cero*** es horizontal. Conforme x aumenta o disminuye, y permanece constante.
- Las líneas verticales tienen una ***pendiente indefinida***.

Formas de ecuaciones de líneas rectas

- ***Forma lineal general:*** $Ax + By + C = 0$
- ***Forma punto-pendiente:*** $y - y_1 = m(x - x_1)$; donde (x_1, y_1) es un punto de la recta con pendiente m.
- ***Forma pendiente-ordenada al origen:*** $y = mx + b$; donde el número b es la ordenada del punto donde la recta corta al eje y.
- ***Forma segmentada***: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- ***Recta vertical:*** $x = a$

  Esta ecuación lineal es especial porque x es igual a a para cualquier valor de y. La gráfica de la ecuación de esta forma es una línea vertical que cruza al eje x en $x = a$. Para estas gráficas hay una intersección con el eje x $(a, 0)$, pero ninguna con el eje y (a menos que $a = 0$).
- ***Recta horizontal:*** $y = a$

  Esta ecuación sugiere que y es igual a a, sin importar el valor de x. La gráfica de la ecuación de esta forma es una línea vertical que cruza al eje y en $y = a$. Para estas gráficas hay una intersección con el eje y en $(a, 0)$, pero ninguna con el eje x (a menos que $a = 0$).

Rectas paralelas y perpendiculares

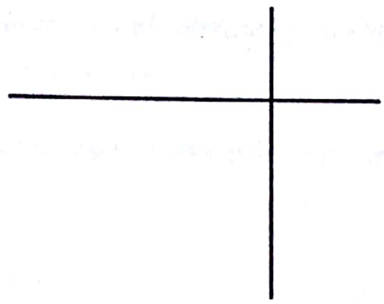
Dos rectas son ***paralelas*** si no se cortan en ningún punto; esto es, las dos son verticales o tienen la misma pendiente:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Dos rectas son ***perpendiculares*** entre sí, si se cortan formando un ángulo recto; esto es, una es horizontal y la otra vertical, o sus pendientes satisfacen la ecuación

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

Rectas paralelas

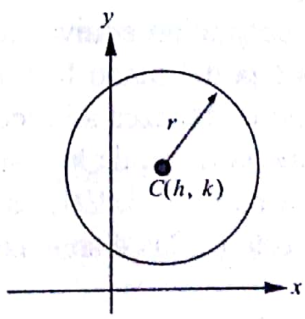


Rectas perpendiculares

Círculo

Un ***círculo*** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistantes de un punto fijo. El punto fijo se llama el ***centro*** del círculo, y la medida de la distancia constante se llama ***radio*** del círculo. En forma general, el círculo con radio r y centro (h, k) tiene la ecuación:

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

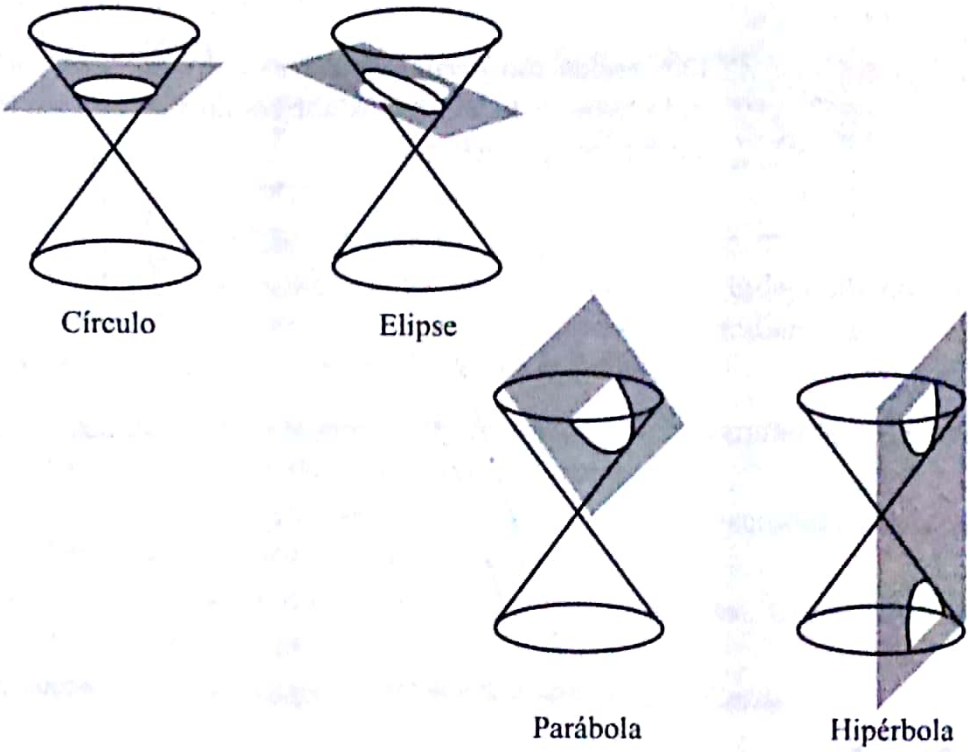


En particular un círculo con radio r y centro en $(0, 0)$ tiene la ecuación:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

■ Secciones cónicas

Cada ***sección cónica*** (o, simplemente, ***cónica***) puede describirse como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. Variando la posición del plano se obtienen tres cónicas básicas: ***elipse, parábola*** e ***hipérbola***.



Cuando el plano pasa por el vértice, la figura resultante es una ***cónica degenerada***. Por ejemplo, si el plano corta al cono solamente en el vértice, entonces la cónica consta de un solo punto. Si el plano contiene al eje del cono, se obtiene un par de rectas que se intersecan. Finalmente, al mover el plano se puede llegar a una posición en la cual el cono tiene solamente una recta en común con el plano.

Una definición equivalente de cónica la obtenemos considerando una recta fija del plano llamada directriz y un punto fijo F llamado foco, que no pertenezca a la recta. Una ***cónica*** es el conjunto de puntos P tales que la razón de la distancia de P al foco F, $|PF|$, y, la distancia de P a la recta D, $|PD|$, es una constante positiva e llamada ***excentricidad***, esto es, las distancias satisfacen la ecuación

$$|PF| = \mathrm{e}|PD|$$

Si $0 < e < 1$, es una ***elipse***; si $e = 1$, es una ***parábola***; si $e > 1$, es una ***hipérbola***.

La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es una cónica o una cónica degenerada.

Si A y B son iguales, la cónica es un círculo, un punto o el conjunto vacío.

■ PARÁBOLA ■

Una ***parábola*** es el conjunto de todos los puntos P en un plano equidistantes de un punto fijo F llamado ***foco*** y una recta fija D llamada ***directriz***.

Esto es: $|PF| = |PD|$

El punto medio entre el foco y la ***directriz*** es el ***vértice***, y la recta que pasa por el foco y el vértice es el ***eje*** de la parábola.

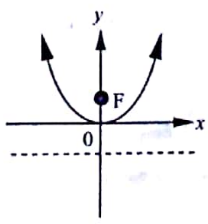
Si el foco es el punto $(0, p)$, y la directriz es la recta $y = -p$, entonces la parábola tiene la ecuación

$$x^2 = 4py$$

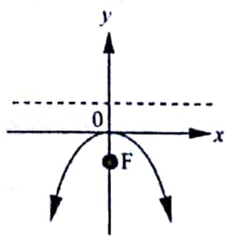
o si escribimos $p = \dfrac{1}{4a}$, entonces la ecuación toma la forma

$$\boxed{y = ax^2}$$

Vemos que la parábola $y = ax^2$ se abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$ y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.



$y = ax^2$; $a > 0$

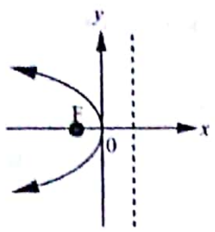


$y = ax^2$; $a < 0$

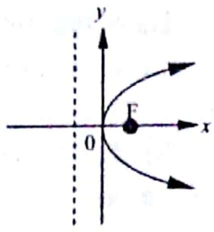
Si intercambiamos x y y en la ecuación $y = ax^2$, el resultado es

$$\boxed{x = ay^2}$$

que representa una parábola con el vértice en el origen, foco $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. La parábola $x = ay^2$ se abre hacia derecha si $a > 0$ y hacia izquierda si $a < 0$ y es simétrica con respecto al eje x.

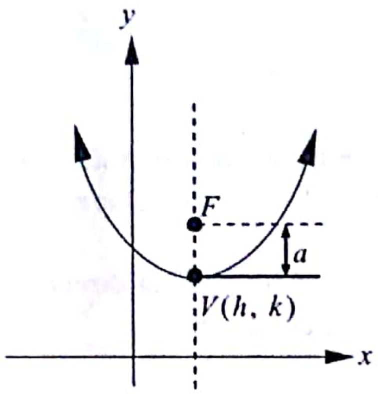


$y = ay^2$, $a < 0$



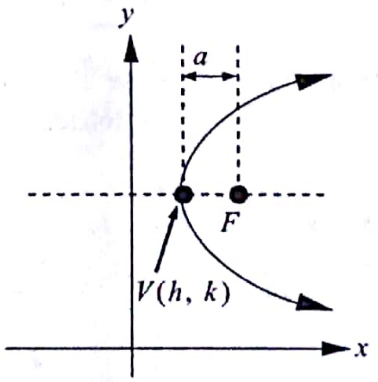
$y = ay^2$; $a > 0$

La parábola con vértice (h, k) y foco en $(h, k + a)$ tiene la ecuación $(x - h)^2 = 4a(y - k)$. Su directriz es $y = k - a$. Si $a > 0$ abre hacia arriba. Si $a < 0$ abre hacia abajo.



$(x - h)^2 = 4a(y - k)$

La parábola con vértice (h, k) y foco en $(h + a, k)$ tiene la ecuación $(y - k)^2 = 4a(x - h)$. Su directriz es $x = h - a$. Si $a > 0$ abre hacia la derecha. Si $a < 0$ abre hacia la izquierda.



$(y - k)^2 = 4a(x - h)$

En la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Si A o B son cero, la cónica es una parábola, una cónica degenerada o el conjunto vacío.

■ ELIPSE ■

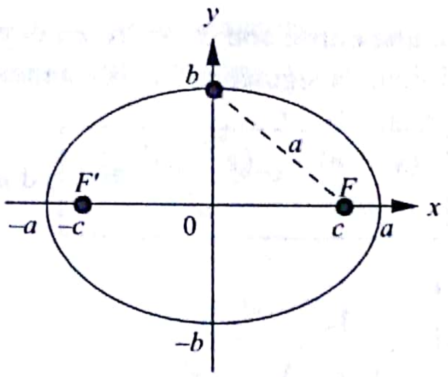
El conjunto de puntos P en el plano que satisfacen la ecuación $|PF| = e|PD|$ con $0 < e < 1$ es una elipse. Las elipses son simétricas con respecto al centro y con respecto a dos ejes; debido a esta simetría, existe un segundo foco y una segunda directriz que permiten dar la siguiente definición equivalente:

Una ***elipse*** es el conjunto de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados ***focos*** es constante.

La ***forma estándar*** de la ecuación de una elipse con focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $c^2 = a^2 - b^2$, y c se le llama la distancia focal.

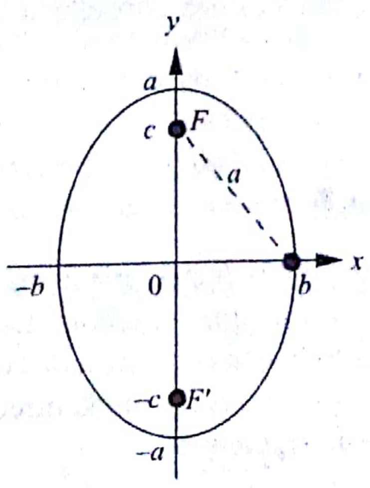


$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La recta que une los focos, corta la elipse en dos puntos llamados ***vértices***. El segmento que une los vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ es el ***eje mayor*** y su longitud es **2*a***. El punto medio del eje mayor es el ***centro*** de la elipse y en este caso el centro está situado en el origen. El segmento perpendicular al eje mayor con los extremos $(0, -b)$ y $(0, b)$ es el ***eje menor*** de la elipse y su longitud es **2*b***. También se observa que la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen, y el eje mayor es siempre más largo que el eje menor.

Si los focos de una elipse están localizados en $(0, c)$ y $(0, -c)$ tenemos la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}, \text{ donde } c^2 = a^2 - b^2$$



$$\frac{x^2}{b^2} = \frac{y^2}{a^2} = 1$$

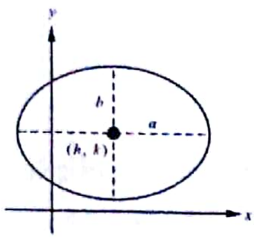
En este caso el eje mayor está en el eje y y sus extremos son los vértices $(0, \pm a)$. El eje menor está en el eje x y sus extremos están en $(\pm b, 0)$. El centro está en $(0, 0)$.

Una elipse con el centro en el punto (h, k), su eje principal paralelo al eje x y focos en $(h \pm c, k)$ tiene la siguiente forma estándar:

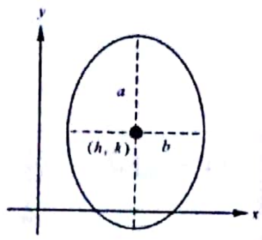
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}, \text{ donde } c^2 = a^2 - b^2$$

Asimismo, una elipse con el centro en el punto (h, k) y cuyo eje mayor es vertical tiene la siguiente forma estándar:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}, \text{ donde } c^2 = a^2 - b^2$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Cuando los números a y b son relativamente iguales, la elipse tendrá un aspecto más circular, y será más aplanada cuando b sea relativamente pequeña, en comparación con a. Esta redondez de una elipse se puede medir con su ***excentricidad***

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

En la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Si A y B tienen el mismo signo, la cónica es una elipse, una cónica degenerada o el conjunto vacío.

HIPÉRBOLA

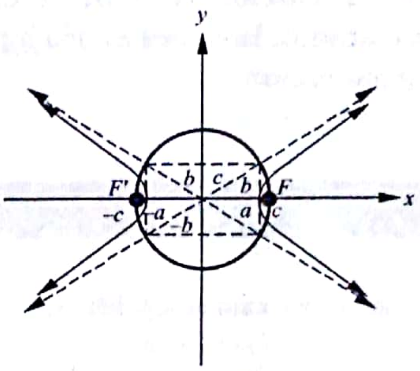
El conjunto de puntos P en el plano que satisfacen la ecuación $|PF| = e|PD|$ con $e > 1$ es una hipérbola. Las hipérbolas son simétricas con respecto al centro y con respecto a dos ejes; debido a esta simetría, existe un segundo foco y una segunda directriz que permiten dar la definición equivalente siguiente:

Una ***hipérbola*** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados ***focos*** es constante. Una propiedad característica de la hipérbola es que su gráfica tiene dos ramas separadas que se abren en direcciones opuestas.

El ***centro*** es el punto medio del segmento F_1F_2. El ***eje principal*** es la recta que pasa por los focos, y el eje conjugado es la recta perpendicular al eje principal en el centro.

Si los focos de una hipérbola están localizados en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ tenemos la siguiente forma estándar:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}\text{, donde } b^2 = c^2 - a^2$$

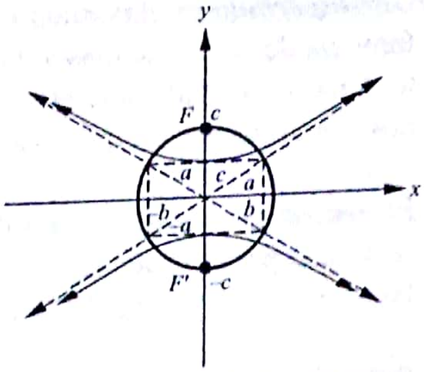


Los puntos (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$ forman un rectángulo cuyas diagonales son las asíntotas de la hipérbola. Los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección del eje principal y el rectángulo auxiliar. La hipérbola dada no tiene intersecciones con el eje y, e interseca al eje x en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, llamados vértices.

Para trazar una hipérbola se traza primero el rectángulo con $2a$ unidades de ancho por $2b$ unidades de altura. Se trazan las diagonales del rectángulo y se prolongan en ambas direcciones (son las asíntotas con ecuaciones $y = \pm\frac{b}{a}x$). A continuación se traza la hipérbola comenzando en los vértices $(\pm a, 0)$ de tal modo que las líneas sean asíntotas a la curva y las ramas queden entre las asíntotas.

Si los focos de una hipérbola están localizados en $(0, -c)$ y $(0, c)$, tenemos la siguiente forma estándar:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}\text{, donde } b^2 = c^2 - a^2.$$



En este caso se observa que las ramas de la hipérbola se abren hacia arriba y hacia abajo. En el caso de la hipérbola la ***excentricidad*** es

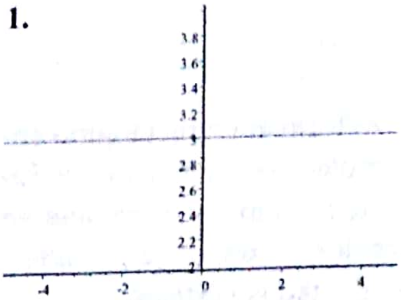
$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

En la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Si A y B tienen signos contrarios, la cónica es una hipérbola, una cónica degenerada o el conjunto vacío.

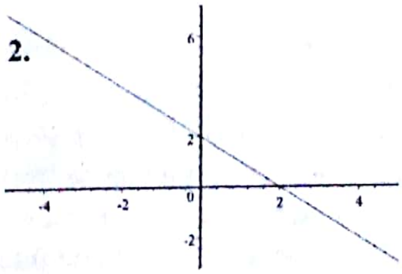
EJERCICIOS I

Relacione las gráficas con las ecuaciones siguientes.

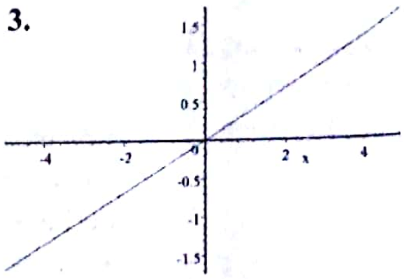
1.



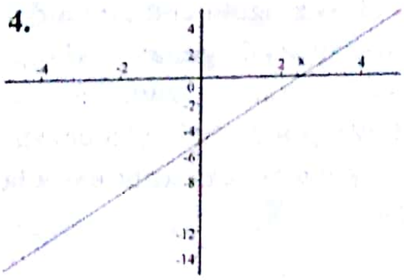
2.



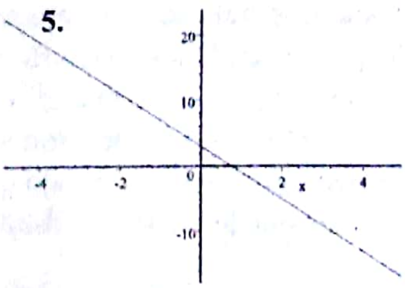
3.



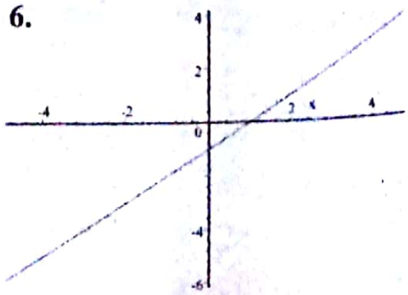
4.



5.



6.



a. $y = -1 + x$

b. $y = -x + 2$

c. $y = 3$

d. $y = \dfrac{x}{3}$

e. $y = 2x - 5$

f. $y = -4x + 3$

En los problemas, calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

7. $(5, 3), (-5, 3)$
8. $(0, 9), (3, 8)$
9. $(5, -2), (2, 8)$
10. $(3, 4), (8, 14)$

Encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas:

11. La pendiente de la recta es 4 y pasa por el punto $(-1, -2)$.
12. La pendiente es 0 y pasa por el punto $(0, -5)$.
13. Pasa por el punto $(-3, -4)$ y es paralela al eje y.
14. Pasa por el punto $(1, -7)$ y la recta es paralela al eje x.

Determine la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas:

15. Tiene intercepción con el eje x en $x = -1$ y con el eje y en $y = 2$.
16. El punto de corte con el eje y es $(0, -3)$ y la pendiente es -3.
17. La recta es paralela a $y = -2$ y perpendicular a $x = -1$.
18. Es paralela a $y = 3x - 2$ y punto de corte con el eje y en $(0, -1)$.
19. Tiene pendiente indefinida y pasa por $(0, 0)$.
20. Tiene pendiente 0 y pasa por $(0, 0)$.
21. ¿El punto $(3, 9)$ está arriba o abajo de la recta $y = 3x - 1$?
22. Encuentre un número real k tal que el punto $P(-1, 2)$ esté en la recta $kx + 2y - 5 = 0$.

Pruebe que los puntos siguientes se encuentran en la misma recta:

23. $A(-2, -5)$, $B(-1, 1)$ y $C(-3, -1)$.
24. $A(2, 5)$, $B(3, 8)$ y $C(-4, -13)$.

Encuentre el punto de intersección de las rectas:

25. $y = 2x - 1$ y $y = 3x + 2$
26. $2x - 3y = 7$ y $5x - 2y = 12$
27. $4x - 5y = 3$ y $-x + 3y = 1$
28. $y = -x + 3$ y $3x - 4y = 2$
29. Encuentre la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y por la intersección de las rectas $2x - 3y = 7$ y $5x - 2y = 12$.
30. Encuentre la recta que pasa por el punto $(3, 4)$ y por la intersección de las rectas $y = -x + 3$ y $3x - 4y = 2$.
31. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es paralela a la recta que tiene como ecuación $y = 3$.
32. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -3)$ y es paralela a la recta que tiene como ecuación $x = 2$.
33. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que tiene como ecuación $y = x + 3$.
34. Resuelva la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es perpendicular a la recta que tiene como ecuación $y = 4x + 3$.
35. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que tiene como ecuación $y = 4x + 13$.
36. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(8, 3)$ y es perpendicular a la recta que tiene como ecuación $y = 4x + 13$.
37. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y es paralela a la recta $y = 4x - 5$.
38. Resuelva la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-5, 4)$ y es perpendicular a la recta $2y = -x + 1$.

Halle la intersección en los ejes x y y para cada una de las siguientes ecuaciones:

39. $3x + y = 7$
40. $y = 5x + \frac{1}{2}$

41. $y = 2$

42. $y = 5x$

Halle las pendientes de las líneas rectas representadas por las siguentes ecuaciones, llevando primero las ecuaciones a la forma de punto-pendiente:

43. $15x + 5y = 40$

44. $12y - 30x = 60$

45. $-3x + 2y = 0$

46. $3x - 5y = 7$

47. $x + 3y = 0$

48. $x = 2$

Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares o de ninguno de estos tipos:

49. $2x + 3y = 6$ y $3x - 2y = 6$

50. $5x + 2y = 4$ y $2x - \frac{1}{2}y = 3$

51. $y = x$ y $x + y = 1$

52. $y = 2x + 3$ y $x = 2y + 3$

53. $4x + 2y = 1$ y $y = 2 - 2x$

54. $3x - 2 = 0$ y $y = 5$

Si se tiene la ecuación lineal $6x - 12y = 36$.

55. ¿Cuál es la pendiente de la línea representada por la ecuación dada?

56. ¿Cuál es la pendiente de una línea paralela a la recta dada?

57. ¿Cuál es la pendiente de una línea perpendicular a la recta dada?

58. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a la línea dada y pasa por el origen.

59. Encuentre el valor de k tal que la recta $kx - 3y = 10$ es paralela a la recta $y = 2x + 4$.

60. Encuentre el valor de k tal que la línea recta $kx - 3y = 10$ es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$.

61. Encuentre el valor de k para el cual la línea $4x + ky = 5$.

a. pasa por el punto (2, 2)

b. es paralela a la recta $4x - 2y = 5$

c. es perpendicular a la recta $2x - 4y = 10$.

62. El costo total para un fabricante consta de costos indirectos fijos de $8000 más costos de producción de $70 por unidad. Exprese el costo total como una función de la cantidad de unidades producidas y elabore la gráfica.

63. El costo variable de fabricar una mesa es de $8 y los costos fijos son de $250 al día. Determine cuánto será el costo total de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

64. Un electricista cobra $80 por una visita domiciliaria más $30 por hora de trabajo adicional. Exprese el costo C de llamar a un electricista a su casa como una función del número de horas x que dure la visita.

65. Un autor recibe honorarios por $1500 más $12.50 por cada libro vendido. Exprese su ingreso R como función del número de libros x vendidos.

66. Una compañía especializada ofrece banquetes a grupos de personas al costo de $48 por persona, más un cargo extra de $150. Encuentre el costo C, en términos de x, que fijará la compañía por x personas.

67. Cierta agencia de alquiler de automóviles cobra $25 diarios y 30 centavos adicionales por kilómetro.

a. Exprese el costo de alquilar un automóvil en esta agencia, durante un día, como una función de la cantidad de kilómetros recorridos y represéntelo de manera gráfica.

b. ¿Cuánto cuesta alquilar un automóvil durante un día para un viaje de 50 kilómetros?

68. Determinada agencia de alquiler de automóviles cobra $25 más 60 centavos por kilómetro. Una segunda agencia cobra $30 más 50 centavos por kilómetro. ¿Qué agencia ofrece el mejor trato?

69. Los costos fijos por fabricar cierto artículo son de \$800 a la semana, y los costos por fabricar 20 unidades a la semana son de \$520. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, suponiendo que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 30 unidades a la semana?

70. La afiliación a un club privado de tenis cuesta \$1000 por año y da derecho al socio a utilizar los campos de juego por una cuota de \$8 por hora. En un club de la competencia, la afiliación cuesta \$800 por año y el cargo por el uso de los campos es \$12 por hora. Si sólo si tienen en cuenta las consideraciones financieras, ¿cómo debería elegir un jugador de tenis el club?

71. A una compañía le cuesta \$95 producir 10 unidades de cierto artículo al día y \$180 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

a. Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

c. ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

72. Suponga que los clientes demandarán 50 unidades de un producto cuando el precio sea de \$15 por unidad, y 30 unidades cuando el precio sea de \$21 cada una. Encuentre la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal, y el precio por unidad cuando se requieren 27 unidades.

73. Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 45,000 de pares de zapatos cuando el precio sea de \$320 pesos por par y 50,000 pares cuando cuesta \$300. Determine la ecuación de la oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionados linealmente.

74. Suponga que el costo para producir 15 unidades de un producto es de \$80 y el de 20 unidades es \$70. Si el costo C está relacionado linealmente con el producto q, determine una ecuación lineal que relacione C con q. Encuentre el costo de producir 35 unidades.

75. El costo de fabricar 100 títeres a la semana es de \$700 y el de 120 títeres a la semana es de \$800.

a. Determine la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.

b. ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

76. Un fabricante puede vender cierto producto a \$120 la unidad. El costo total está formado por los costos indirectos fijos de \$8500, más los costos de producción (\$80 por unidad).

a. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio?

b. ¿Cuál es la utilidad o la pérdida del fabricante si se venden 100 unidades?

c. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener una utilidad de \$1250?

77. El costo de producir cierto artículo es de 80 centavos por unidad y los costos fijos son de \$300 al día. El artículo se vende a \$1.40 cada uno. ¿Cuántos artículos deberá producir y vender para garantizar que no haya ganancias ni pérdidas?

78. Los costos fijos para producir cierto artículo son de \$8610 al mes y los costos variables son de \$3 por unidad. Si el productor vende cada uno a \$6.00

a. Encuentre el punto de equilibrio.

b. Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de \$1000 mensuales.

79. Una empresa vende un producto a \$35 por unidad. Los costos variables por unidad son \$15 y los costos fijos ascienden a \$150 mil. ¿Cuántas unidades hay que vender a fin de alcanzar el equilibrio?

En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación del círculo con centro C y radio r. Escriba la ecuación en la forma centro-radio y en la forma general.

80. $C(2, -3)$, $r = 9$.

81. $C(4, -3)$, $r = 5$.

82. $C(0, 0)$, $r = 1$.

83. $C(-5, -12)$, $r = 3$.

84. $C(-2, 2)$, $r = 2$.

En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación del círculo que satisfaga las condiciones dadas

85. Centro en $(1, 2)$ y pasa por el punto $(3, -1)$.

86. Centro en $(-3, 4)$ y pasa por el punto $(2, 5)$.

87. Centro en $(-1, 1)$ y pasa por el punto $(2, -4)$.

88. Centro en $(3, 4)$ y pasa por el punto $(9, 1)$.

En los problemas encuentre el centro, el radio y dibuje la grafica de los círculos siguientes:

89. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0$

90. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$

91. $x^2 + y^2 - 18y + 77 = 0$

92. $x^2 + 6x + y^2 + 6y + 13 = 0$

93. $x^2 - 4x - 20 + y^2 + 2y = 0$

94. $x^2 - 8x + 15 + y^2 = 0$

95. $y^2 + x^2 - 8y + 8 + 2x$

96. $x^2 + 10x + y^2 + 16 - 10y = 0$

97. $x^2 + 17 - 8x + 4y + y^2 = 0$

98. $y^2 + 6y + 9 + x^2 + 4x = 0$

99. $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 42 = 0$

100. $x^2 + 6x + 5 + y^2 = 0$

En los siguientes ejercicios determine si la gráfica es un círculo, un punto o no existe el lugar geométrico:

101. $x^2 - 2x + y^2 + 5 + 4y = 0$

102. $x^2 - 6x + 20 + y^2 - 6y = 0$

103. $x^2 - 2x + 10 + y^2 - 6y = 1$

104. $y^2 + x^2 - 4y = 0$

105. $x^2 + 12x + 40 + y^2 = 0$

106. $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$

107. $x^2 + 55 + y^2 + 10x - 10y = 0$

108. $x^2 - 4x + 13 + y^2 + 6y = 0$

109. $y^2 + 2x + x^2 = 0$

110. $x^2 + 69 + y^2 - 4x - 16y = 0$

111. $x^2 + y^2 + 8 = 0$

112. $y^2 + x^2 + 2x = 0$

113. $x^2 + y^2 + 1 = 0$

114. $x^2 + 10x + 41 + 8y + y^2 = 0$

Resuelva y grafique cada sistema:

115. $\begin{cases} y - x = 0 \\ (x-2)^2 + (y+5)^2 = 25 \end{cases}$

116. $\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$

117. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{1}{2}x - y = 1 \end{cases}$

118. $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

119. $\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = -4 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$

Grafique cada sistema:

120. $\begin{cases} y > \sqrt{1 - x^2} \\ x^2 + y^2 \leq 3 \end{cases}$

121. $\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 \leq 16 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \end{cases}$

122. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1 \\ 3x + 6y > 1 \end{cases}$

123. $\begin{cases} x - y < 4 \\ x^2 + (y-1)^2 < 1 \end{cases}$

124. $\begin{cases} y < \sqrt{4 - x^2} \\ x < \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$

Encuentre el foco, la directriz, el vértice y dibuje la gráfica.

125. $16y = x^2$

126. $9x = y^2$

127. $10x = y^2$

128. $x^2 = -6y$

129. $y^2 = -2x$

130. $(x-3)^2 = -4(y+1)$

131. $(x+1) = 3(y-2)^2$

132. $(x+3)^2 = 2y$

133. $(x-1)^2 = (y-2)$

134. $(y+4)^2 = 3(x+1)$

Determine la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:

135. Foco $F(0, 3)$ y directriz $y = -3$

136. Foco $F(5, 0)$ y directriz $x = -5$

137. Foco $F(3, 3)$ y directriz $y = -5$

138. Foco $F(4, -1)$ y directriz $x = 2$

139. Vértice $(-2, -2)$ y directriz $y = -50$

140. Vértice $(0, 1)$ y directriz $x = -12$

141. Vértice $(0, 3)$ y foco $F(16, 3)$

142. Vértice $(-4, 2)$ y foco $F(-4, 6)$

143. Vértice en el origen, simétrica al eje y y pasa por el punto $(-2, 8)$.

144. Vértice en el origen, simétrica al eje x y pasa por el punto $(-4, 4)$.

145. Vértice en $(-4, 1)$, eje paralelo al eje x y pasa por el punto $(-2, 9)$.

146. Vértice en $(1, 2)$, eje paralelo al eje y y pasa por el punto $(5, 4)$.

Escriba las siguientes ecuaciones de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

147. $x^2 - 6x - 16y - 39 = 0$

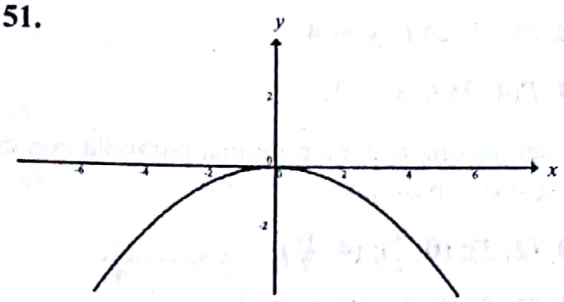
148. $y^2 - 2y - 32x - 31 = 0$

149. $4x + y^2 + 6y + 21 = 0$

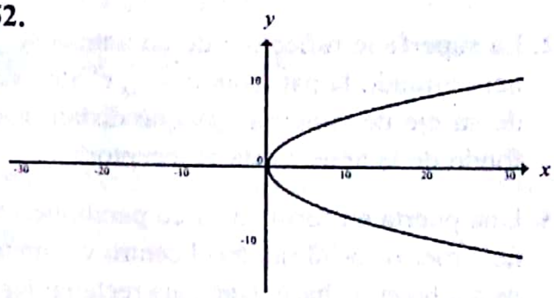
150. $x^2 - 3y + 6 = 0$

Deduzca la ecuación de la parábola dada:

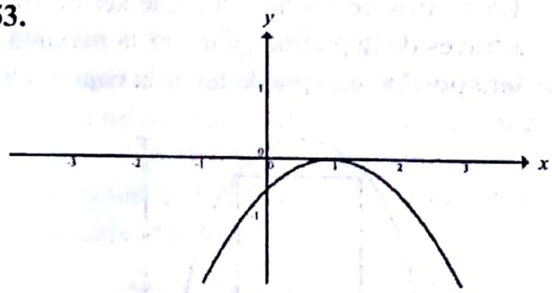
151.



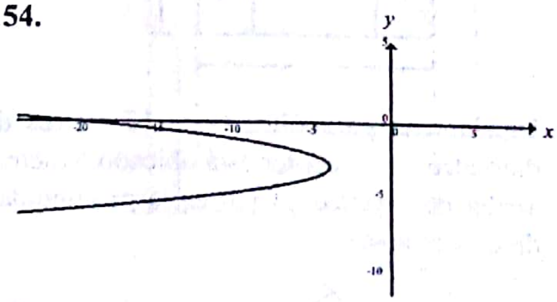
152.



153.



154.



Considere la parábola con ecuación $x^2 = 4py$.

155. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por $(0, 0)$ e intersecan a la parábola exactamente en un punto.

156. Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección de la parábola con la recta que pasa por $(0, 0)$ y tenga una pendiente $m \neq 0$.

Halle una ecuación para el conjunto de puntos del plano xy tales que equidistan del punto P y de la recta L.

157. $P(2, 3)$ L: $x = -3$.

158. $P(-1, 2)$ L: $y = 4$.

159. $P(4, 2)$ L: $x = 2$.

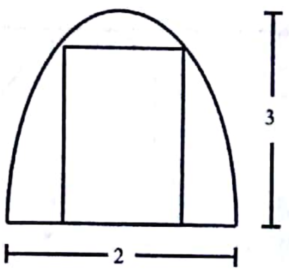
Encuentre una ecuación de una parábola con eje vertical que pase por los puntos

160. $(2, 3)$; $(0, \frac{3}{2})$; $(4, \frac{11}{2})$.

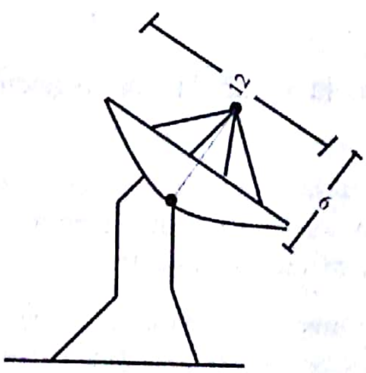
161. $(3, 5)$; $(-6, 14)$; $(-1, \frac{7}{3})$.

162. La superficie reflectora de un antena se genera girando la parábola $y = \frac{1}{16}x^2$ alrededor de su eje de simetría. ¿A qué distancia del fondo de la antena está el receptor?

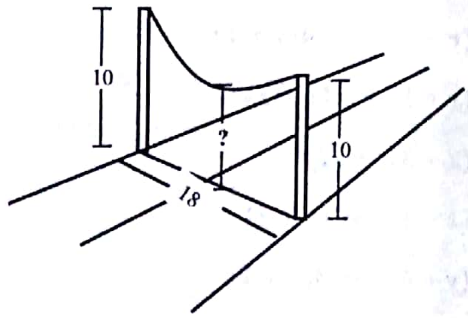
163. Una puerta en forma de arco parabólico tiene 3 metros de altura en el centro y 2 metros de ancho en la base. Una caja rectangular de 1.5 metros de ancho tiene que ser deslizada a través de la puerta. ¿Cuál es la máxima altura posible que puede tener la caja?



164. Una antena parabólica tiene 12 metros de diámetro y el receptor está ubicado 6 metros arriba del vértice. ¿Cuál es la profundidad de esta antena?

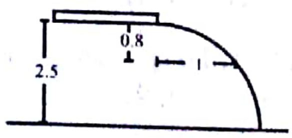


165. Dos postes de luz en lados opuestos de una carretera sostienen en su extremo superior un cable que forma un arco parabólico. A un metro del poste el cable tiene una altura de 7 metros. La distancia entre los dos postes es de 8 metros y la altura de poste es de 10 metros. ¿Cuál es la altura máxima que debe tener un camión para pasar sin peligro debajo del cable?



166. La trayectoria de un proyectil disparado desde el suelo es una parábola abierta hacia abajo. Si la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 120 metros y su alcance horizontal es de 1000 metros. ¿Cuál es la distancia horizontal del punto de disparo al punto donde el proyectil alcanza por primera vez una altura de 80 metros?

167. El agua que sale por el extremo de una tubería horizontal, que está 2.5 metros por arriba de la superficie del suelo, describe una curva parabólica, siendo el vértice de la parábola el extremo del tubo. Si en un punto a 80 cm del tubo, el flujo de agua se ha curvado hacia afuera 1 metro más allá de una vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿a qué distancia de esta línea vertical entrará en contacto el agua con el suelo?



168. Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto m familias lo usarán, en donde $m = \frac{10}{9}n(12 - n)$ $0 \leq n \leq 12$. Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

169. La altura h de una pelota lanzada verticalmente desde el piso está dada por $h = -4.9t2 + 58.8t$, donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos. ¿Después de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

170. El ingreso mensual por la venta de q unidades de cierto artículo está dado por $I = 120q - 0.1q^2$ pesos. Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

171. Si un editor fija el precio de un libro en $180 cada uno, venderá 5000 ejemplares. Por cada $10 pesos de incremento en el precio, las ventas disminuyen en 200 copias. ¿Qué precio deberá fijar el editor a cada ejemplar con el propósito de que la utilidad sea máxima?

Escriba, en la forma estándar, la ecuación de la elipse que tiene las propiedades dadas y dibuje su gráfica:

172. Centro (0, 0); eje mayor horizontal de longitud 10, eje menor de longitud 6.

173. Centro (0, 0); focos (±4, 0); y los vértices (±7, 0).

174. Centro (0, 0); foco (3, 0) y vértice (6, 0).

175. Centro (2, 4); focos (−2, 4) y (6, 4); eje menor de longitud 10.

176. Centro (2, 4); eje mayor horizontal de longitud 16, eje menor vertical de longitud 8.

177. Centro (0, 0); eje horizontal de longitud 14 y eje vertical de longitud 6.

178. Extremos de los ejes mayor y menor en (−3, 0), (3, 0), (0, −2), (0, 2).

179. Extremos de los ejes mayor y menor en (−4, 2), (6, 2), (1, 6), (5, 0).

180. Focos en (± 4, 0); excentricidad $\frac{2}{3}$.

181. Focos en (−8, 2) y (4, 2) y la excentricidad es $\frac{2}{3}$.

En los ejercicios siguientes, encuentre las coordenadas del centro, los vértices y los focos de los elipses siguientes:

182. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

183. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

184. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

185. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

186. $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

187. $x^2 + 25y^2 = 25$

188. $16x^2 + 9y^2 = 144$

189. $x^2 + 9y^2 = 9$

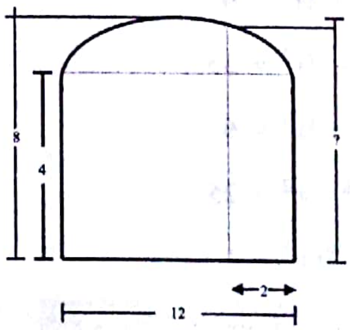
190. $25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$

191. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$

192. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$

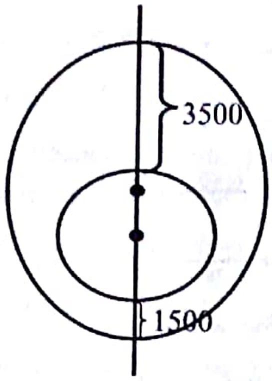
193. $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$

194. El techo de una galería de 12 m de ancho, es una semielipse, con 8 m de altura en el centro y 4 m en los extremos de los muros. Determine qué altura tiene el techo a 2 m de cualquiera de los muros.



195. Suponga que la órbita de un planeta tiene la forma de una elipse con un eje mayor cuya longitud es de 600 millones de kilómetros. Si la distancia entre los focos es de 500 millones de kilómetros, obtenga una ecuación de la órbita.

196. Un satélite describe una órbita eliptica alrededor de la Tierra de tal modo que el centro de la Tierra es uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 3500 millas y el más cercano está a 1500 millas. Si el radio de la tierra es de 4000 millas. Deduzca la ecuación de la órbita.



Dibuje la gráfica de las siguientes hipérbolas, encontrando los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas:

197. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

198. $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

199. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

200. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

201. $4x^2 - 9y^2 = 36$

202. $3y^2 - 2x^2 = 6$

203. $5x^2 - 7y^2 = 35$

204. $2y^2 - 3x^2 = 6$

205. $25y^2 - x^2 = 25$

206. $x^2 - 16y^2 = 1$

207. $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

208. $\frac{(x+1)^2}{25} - (y-3)^2 = 1$

209. $4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 36$

210. $2(x+3)^2 - y^2 = 8$

211. $4x^2 + 8x - 9y^2 + 36y - 68 = 0$

212. $x^2 - 4x - 9y^2 - 18y - 14 = 0$

213. $25x^2 + 150x - 5y^2 + 10y + 195 = 0$

214. $9y^2 + 18y - 4x^2 - 27 = 0$

215. $y^2 - 2y - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

216. $y^2 + 2y - 9x^2 + 54x - 89 = 0$

Obtenga una ecuación de una hipérbola que satisfaga las condiciones dadas:

217. Vértices en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$, y un eje conjugado con longitud 9.

218. Los focos están en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y un vértice en $(0, 3)$.

219. Centro en el origen, sus focos en el eje y y pasa por los puntos $(2, \pm\frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(1, \pm\frac{3\sqrt{7}}{2})$.

220. Un foco en $(1, 1)$ y como asíntotas las rectas $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ y $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

221. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(-2, -5)$ y un foco en $(3 - \sqrt{61}, -5)$.

222. Centro en $(-2, -1)$, un vértice en $(-2, 11)$ y un foco en $(-2, 14)$.

223. Focos en $(10, -1)$, $(-4, -1)$ y pasa por el punto $(3 + 7\sqrt{2}, 5)$

224. Focos en $(-1, 4)$, $(7, 4)$ y la longitud del eje transverso en $\frac{8}{3}$.

225. Un foco en $(1, -1 - \sqrt{73})$, asíntotas que se cortan en $(1, -1)$ y una asíntota que pasa por el punto $(3, -\frac{19}{3})$.

226. Asíntotas que se cortan en $(2, 0)$ y las coordenadas x de los focos son $(2, \pm 1)$.

Encuentre una ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si:

227. Los vértices están en $(-5, 1)$, $(-1, 1)$ y la distancia entre los focos es $2\sqrt{53}$.

228. Los focos de la hipérbola están en $(2 \pm \sqrt{170}, 3)$ y la distancia entre los vértices es 14.

229. Una pelota lanzada desde $(-5, 0)$ le pega a la rama derecha de la pared en forma de hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $(8, 3\sqrt{3})$. ¿Cuál es la coordenada y de la pelota cuando la coordenada x era 10?

230. Tres persona situadas en las coordenadas $A(-8, 0)$, $B(8, 0)$ y $C(8, 10)$ registraron los tiempos exactos en los cuales habían oído una explosión. Si B y C oyeron la explosión al mismo tiempo y A la oyó 12 segundos después, ¿dónde fue la explosión? Suponga que las distancias están en kilómetros y que el sonido recorre $\frac{1}{3}$ de kilómetro por segundo.

Pase las ecuaciones siguientes a la forma estándar e identifique a la cónica:

231. $y = 2x^2 - 4x + 9$

232. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 36y + 81 = 0$

233. $x^2 + 8x - 4y^2 - 8y = -8$

234. $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$

235. $25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0$

236. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 36 - 24y = 0$

237. $3x^2 - 10y^2 + 36x - 20y + 68 = 0$

238. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 14 = 0$

239. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

240. $y = 3x^2 - 6x + 4$

241. $x^2 + 6y + 28 + 8x = 0$

242. $x^2 - y^2 = 4$

243. $x^2 + 9y^2 = 9$

244. $9x^2 + 9y^2 - 144 = 0$

245. $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$

246. $y^2 - 8x = 0$

247. $y^2 - 12y + 36 = -\frac{2}{3}(x + 5)$

Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las siguientes ecuaciones, dibuje y muestre los puntos de intersección en las gráficas.

248. $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 1 \\ y = x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

249. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2y^2 - x^2 = 1 \end{cases}$

250. Obtenga una ecuación de la hipérbola cuyos focos sean los vértices de la elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ y cuyos vértices sean los focos de esta elipse.

EJERCICIOS II

1. Encuentre la ecuación de la parábola con foco $(4, 0)$ y directriz $x = -4$.

2. Grafique la elipse cuya ecuación es $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ y halle las coordenadas de los focos.

3. Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyo centro es $(0, 0)$, los focos son $(0, -13)$ $(0, 13)$ y la longitud del eje transversal es 14.

Transforme las siguientes ecuaciones en una forma estándar, identifique la cónica y grafíquela.

4. $16x^2 + 4y^2 + 96x - 16y + 96 = 0$.

5. $x^2 - 4x - 8y - 10 = 0$.

6. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y - 36 = 0$.

7. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

8. Una antena parabólica para las transmisiones vía satélite tiene un diámetro de 4 metros y dos metros de profundidad ¿A qué distancia del vértice está el foco?

9. Salen tres brigadas en busca de un cazador perdido en una zona boscosa. Dos de ellas toman posiciones de tal modo que quedan a 2 kilómetros de distancia entre sí. El cazador dispara su rifle y el sonido llega a una de las brigadas 4 segundos antes de llegar a la otra. Suponga que las coordenadas de las brigadas son $(0, -\frac{1}{3})$ y $(0, \frac{1}{3})$ y deduzca la ecuación de la hipérbola cuyos puntos sean las ubicaciones posibles del cazador.

10. Resuelva y grafique el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ x^2 + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Soluciones

Capítulo 1

1. a. sí
   b. no
   c. no
   d. no
   e. sí
   f. no
   g. sí
   h. sí
   i. sí
   j. no
   k. sí
   l. sí
   m. sí
   n. sí
   o. no
   p. sí
   q. sí
   r. sí
   s. no

2. a. compuesta
   b. simple
   c. compuesta
   d. compuesta
   e. compuesta
   f. compuesta.

3. a. $p \wedge q \wedge r$; donde p: Daniel está cantando, q: Daniel está bailando, r: Daniel se está divirtiendo
   b. $p \vee q$; donde p: Samuel vive en Cuernavaca, q: Samuel vive en Chihuahua.
   c. $\sim p$; donde p: Juan aceptará el trabajo.
   d. $p \wedge \sim q$; donde p: esta noche iremos a la fiesta, q: esta noche iremos al cine.
   e. $p \wedge q \wedge \sim r$; donde p: la calificación final dependerá del esfuerzo, q: la calificación final dependerá de la dedicación, r: la calificación final dependerá de qué tan bien le caes al profesor.

4. a. no es cierto que Luisa quiera a Supermán y Supermán quiera a Luisa. Esto es: Luisa y Supermán no se quieren
   b. Luisa no quiere a Supermán o Supermán no quiere a Luisa
   c. Luisa no quiere a Supermán y Supermán no quiere a Luisa.

5. a. $q \Rightarrow p$
   b. $q \Rightarrow p$
   c. $p \Rightarrow q$
   d. $q \Rightarrow p$
   e. $q \Rightarrow p$

6. a. *i*) si vas a descansar, entonces tienes vacaciones; *ii*) si no tienes vacaciones, entonces no vas a descansar; *iii*) si no vas a descansar, entonces no tienes vacaciones.
   b. *i*) si nos divertimos, entonces estamos en una fiesta; *ii*) si no estamos en una fiesta, entonces no nos divertimos; *iii*) si no nos divertimos, entonces no estamos en una fiesta.

c. *i*) si se casan, entonces están enamorados; *ii*) si no están enamorados, entonces no se casan; *iii*) si no se casan, entonces no están enamorados.

d. *i*) si eres inteligente, entonces lees mucho; *ii*) si no lees mucho, entonces no eres inteligente; *iii*) si no eres inteligente, entonces no lees mucho.

e. *i*) si compramos un pan, entonces vamos a comer en casa; *ii*) si no comemos en casa, entonces no compramos un pan; *iii*) si no compramos un pan, entonces no comemos en casa.

f. *i*) si eres rico, entonces tienes mucho dinero, *ii*) si no tienes mucho dinero, entonces no eres rico, *iii*) si no eres rico, entonces no tienes mucho dinero.

g. *i*) si compro zapatos negros, entonces compro esta bolsa; *ii*) si no compro esta bolsa, entonces no compro zapatos negros; *iii*) si no compro zapatos negros, no compro esta bolsa.

7. **a.** si llueve hace frío: por lo tanto no voy a la fiesta
b. llueve y hace frío, entonces no voy a la fiesta
c. no llueve y no hace frío, por lo tanto voy a la fiesta.

8. recíproca: hace frío, entonces llueve; inversa: no llueve, entonces no hace frío; contrarrecíproca: no hace frío, entonces no llueve.

9. recíproca $q \Rightarrow \sim p$; inversa: $p \Rightarrow \sim q$; contrarrecíproca: $\sim q \Rightarrow p$.

10. recíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$; inversa: $p \Rightarrow q$; contrarrecíproca: $q \Rightarrow p$.

11. a; b; e; f.

12. a; d; f; g; h.

13.
a. $p \vee q$, verdadera
b. $p \vee \sim q$, verdadera
c. $\sim p \wedge \sim q$, falsa
d. $\sim p \vee \sim q$, falsa
e. $p \veebar q$, verdadera

14. **a.**

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

b.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1

c.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
1	1	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	1

d.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
0	0	1	0

e.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \vee (p \vee q)$
1	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

f.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1

g.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0

h.

p	q	$\sim p$	$q \vee \sim p$	$p \wedge (q \vee \sim p)$
1	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
0	0	1	1	0

i.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

j.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	0	0
0	0	0	1	0

k

p	q	$p \wedge q$	$q \vee (p \wedge q)$	$p \vee (q \vee (p \wedge q))$	$\sim q$	$[p \vee (q \vee (p \wedge q))] \vee (\sim q)$
1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1

l.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$	$[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee (p \wedge q)$
1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0

m.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

n.

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$
1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

o.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)]$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1

15. **a.** falso
b. verdadero
c. verdadero

16.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$
1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1

17. **a.** Existe un número que no es divisible entre dos.
b. A algunos estudiantes no les gustan las matemáticas.
c. Algunas actrices no son guapas.
d. Ningún extranjero habla inglés.
e. Existe un estudiante que no es inteligente.

f. Alguna de mis respuestas es correcta.
g. Algunos libros no son interesantes.
h. Existe un enfermedad que no es curable.
i. Existe uno que no tiene su propia casa.
j. Existe un número que no es entero.
k. Algún hombre quiere casarse.
l. Ningún joven es romántico.
m. Existe uno que no quiere estudiar filosofía.
n. Algunas mujeres no quieren tener hijos.
o. Algunas manzanas son verdes.
p. Existe un rico que no es feliz.
q. Ningún número es negativo.

18. a. Él no es feo y no tiene la frente amplia.
b. Al lado no hay nadie que me ame.
c. La muerte no es lo único seguro en la vida.
d. Existe un cuadrado que no es rectángulo.

19. a. Tautología
b. Ninguna
c. Ninguna
d. Contradicción
e. Tautología
f. Tautología
g. Ninguna
h. Tautología
i. Contradicción
j. Ninguna
k. Ninguna
l. Tautología
m. Ninguna
n. Tautología
o. Ninguna
p. Tautología
q. Ninguna
r. Ninguna
s. Ninguna

22. a. Razonamiento indirecto
b. Silogismo disyuntivo
c. Ley del medio excluido
d. Razonamiento indirecto
e. Razonamiento indirecto
f. Razonamiento directo
g. Razonamiento indirecto.

23. a. válido
b. no válido
c. válido
d. no válido
e. válido.

24. a. $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (\sim r)$ conclusión: p
b. $(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow \sim s \wedge r) \vee (\sim p)$ conclusión: r
c. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim r) \wedge (p \vee s)$ conclusión: $r \Rightarrow s$
d. $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge [(r \vee \sim q) \Rightarrow \sim s] \wedge (\sim s \Rightarrow \sim t)$ conclusión: $t \Rightarrow q$
e. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \sim q)$ conclusión: $\sim r \Rightarrow q$

25. a. $\forall x \in R,\ x \cdot 3 = 3 \cdot x$
b. Existe una persona cuyo idioma natal es el islandés
c. $\exists x,\ 4x - 3 = 7$
d. $\exists x \neq -4,\ \frac{x-2}{x+4} \geq 0$
e. Existe una persona que fue la primera en escalar el Everest.

26. a. falso
b. verdadero
c. falso
d. verdadero
e. falso
f. falso
g. falso
h. falso
i. verdadero
j. falso
k. falso
l. verdadero
m. verdadero
n. falso
o. verdadero
p. falso
q. falso
r. falso

27. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Demostración:

$(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

28. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 = \frac{(1+1)^2}{4}1^2$.
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{(k+1)^2}{4}k^2$.
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2}{4}(k+1)^2$.
Demostración:
$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}k^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2}{4}(k+1)^2$.

29. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 + 4 = \frac{4^{1+1}-1}{3}$.
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^k = \frac{4^{k+1}-1}{3}$.
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^k + 4^{k+1} = \frac{4^{k+2}-1}{3}$.
Demostración:
$(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^k) + 4^{k+1} = \frac{4^{k+1}-1}{3} + 4^{k+1} = \frac{4 \cdot 4^{k+1} - 1}{3} = \frac{4^{k+2}-1}{3}$.

30. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $a_1 = 4 + 15 + 17 = 36$
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = 4^k + 15k + 17 = 9t$
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) + 17$; se divide entre 9.
Demostración:
$a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) + 17 = 4(4^k + 15k + 17) - 9(5k+4) = 9t - 9(5k+4) = 9(t - 5k + 4)$; se divide entre 9.

31. Paso 1: para $n = 1$ se cumple:
$a_1 = 10 - 4 = 6$
Paso 2: suponemos que se cumple para
$n = k$: $a_k = 10^k - 4 = 6t$
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:
$a_{k+1} = 10^{k+1} - 4$; se divide entre 6.
Demostración:
$a_{k+1} = 10^{k+1} - 4 = 10(10^k - 4) + 36 = 10 \cdot 6t + 36 = 12(5t + 3)$; se divide entre 6.

32. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $a_1 = 7 - 1 = 6$
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = 7^k - 1 = 3t$
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:
$a_{k+1} = 7^{k+1} - 1$; se divide entre 3.
Demostración:
$a_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + 6 = 7 \cdot 3t + 6 = 3(7t + 2)$; se divide entre 3.

33. Paso 1: para $n = 1$ se cumple:
$a_1 = 1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 36$
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t$
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:
$a_{k+1} = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$; se divide entre 9.
Demostración:
$a_{k+1} = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3) = 9t + 9(k^2 + 3k + 3) = 9(t + k^2 + 3k + 3)$; se divide entre 9.

34. **a.** Si n es par, $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$ que es par.
Si n es impar, $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $n^2 + n = (2k+1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$ que es par.

b. Paso 1: para $n = 1$ se cumple:
$a_1 = 1^3 - 1 = 0$
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = k^3 - k = 6t$
Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:
$a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$; se divide entre 6.
Demostración:
$a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k = 6t + 3(k^2 + k)$ del ejercicio a. se tiene que $k^2 + k$ es par, por lo tanto $k^2 + k = 2n$, luego $6t + 3(k^2 + k) = 6t + 6n = 6(t + n)$; se divide entre 6.

35. a. Del ejercicio 34 a. tenemos que $n^2 + n$ es par y así $n^2 + n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$

b. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $a_1 = 1 + 5 = 6$

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = k^3 + 5k = 6t$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:

$a_{k+1} = (k + 1)^3 + 5(k + 1)$; se divide entre 6.

Demostración:

$a_{k+1} = (k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6 = 6t + 3(k^2 + k + 2)$ del ejercicio a. se tiene que $k^2 + k + 2$ es par, por lo tanto $k^2 + k + 2 = 2n$ luego $6t + 3(k^2 + k + 2) = 6t + 6n = 6(t + n)$; se divide entre 6.

36. a. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $b_1 = 4 + 5 = 9$; se divide entre 3.

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $b_k = 4^k + 5 = 3t$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $b_{k+1} = 4^{k+1} + 5$; se divide entre 3.

Demostración:

$b_{k+1} = 4^{k+1} + 5 = 4^k 4 + 5 = 4^k 4 + 20 - 15 = 4(4^k + 5) - 15 = 4(3t) - 15 = 12t - 15 = 3(4t - 5)$; se divide entre 3.

b. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $a_1 = 4 + 15 - 1 = 18$.

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $a_k = 4^k + 15k - 1 = 9t$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$:

$a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k + 1) - 1$; se divide entre 9.

Demostración:

$a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4 \cdot 4k + 15k + 15 - 1 = (4^k + 15k - 1) + 3 \cdot 4^k + 15 = 9t + 3(4^k + 5)$ del ejercicio a. se tiene que $4^k + 5$ es divisible entre 3, por lo tanto $4^k + 5 = 3n$, luego $9t + 9n = 9(t + n)$; se divide entre 9.

37. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}$.

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k + 1)^2 = (-1)^{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Demostración:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k + 1)^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k + 1)^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} - (-1)^{k+1}(k + 1)^2 = (-1)^{k+1}(k + 1)\left[\frac{k}{2} - (k + 1)\right] = (-1)^{k+1}(k + 1)\frac{-k-2}{2} = (-1)^{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

38. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 = 1^2$.

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1 + 3 + ... + (2k - 1) = k^2$.

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1 + 3 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$.

Demostración:

$1 + 3 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

39. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

Demostración:

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.

40. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1 \cdot 2 = \frac{1}{3}1(1 + 1)(1 + 2)$

Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + ... + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3)$

Demostración:
$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(\frac{1}{3}k+1) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

41. Paso 1: para $n = 1$ se cumple: $1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1}{4}1(1+1)(1+2)(1+3)$
Paso 2: suponemos que se cumple para $n = k$: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$

Debemos demostrar que se cumple para $n = k+1$: $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$
Demostración:
$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)(k+3)(\frac{1}{4}k+3) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)$

Capítulo 2

1. **a.** $x \in A$
   b. $y \notin B$
   c. $C = \emptyset$
   d. $B \subset A$
   e. $x \in A \wedge x \notin B$
   f. $A \not\subset B$
   g. $x \in A \Rightarrow x \in B$
   h. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$
   i. $P(B)$
   j. $A = B$
   k. $\exists x \in A : x \notin B$
   l. $\forall A\ (\emptyset \subseteq A)$
   m. $x \in A^c$
   n. $y \in A \cup B$

2. **a.** enumeración
   b. comprensión
   c. comprensión
   d. comprensión
   e. enumeración.

3. **a.** $\{2\}$
   b. $\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$

4. **a.** $A = \{x : x$ es par y positivo$\}$
   b. $B = \{x : x$ es impar y positivo$\}$
   c. $C = \{x : x$ es entero y negativo$\}$

5. **a.** {*enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre*}
   b. {*lunes, martes, miércoles, jueves, viernes*}
   c. $\emptyset$
   d. {*primavera, verano, otoño, invierno*}.

6. los conjuntos vacíos son : *a*; *d*; *f*; *g*; *h*, *i*.

7. $A = C = D$, $B = E$.

8. $X = Y = Z$, todos son iguales entre sí: contienen los mismos elementos.

9. todos son iguales entre sí: contienen los mismos elementos.

10. $A = B = C$, contienen los mismos elementos.

11. **a.** no es vacío, tiene un elemento
    b. no es vacío, tiene un elemento
    c. no es vacío, tiene dos elementos
    d. no es vacío, tiene un elemento
    e. es vacío, no tiene elementos.

12. **a.** falso
    b. verdadero
    c. falso
    d. falso
    e. verdadero.

13. **a.** el conjunto de todos los niños nacidos en el año 1999
    b. el conjunto de todos los libros de García Márquez

c. el conjunto de números enteros
d. los 12 meses del año
e. todas las letras del alfabeto.

14. a. B es un elemento del conjunto A;
b. B es un subconjunto del conjunto A;
c. B es un elemento del conjunto A. Observe que los enunciados *a* y *c* son equivalentes.

15. las tres son correctas.

16. ninguna de las tres es correcta.

17. la respuesta correcta es *c*.

18. a. verdadero
b. falso
c. falso
d. falso
e. falso

19. a. falso
b. falso
c. verdadero
d. verdadero

20. a. falso
b. verdadero
c. verdadero
d. falso
e. falso
f. verdadero.

21. **a; b.; c.; d.; f.**

22. a. falso
b. verdadero
c. verdadero
d. falso
e. falso
f. falso
g. falso
h. falso

23. a. $C = \{a,b,c,d,e\}$
b. $E = \{b,d\}$.

24. a. A
b. A
c. A
d. $\emptyset$
e. B
f. A

25. a. $A \cap B = \{\alpha,\delta,\theta,\pi,\varphi,\chi\}$
b. $B \cap C = \{\delta,\chi\}$
c. $A - B = \{\beta,\gamma,\epsilon,\rho\}$
d. $B - A = \emptyset$;
e. $A - (B \cup C) = \{\gamma\}$

26. a. $A \cup B = \{m,e,x,i,c,o,s\}$; $A \cap C = \{m,i,o\}$; $B \cap C = \{s\}$; $B \cup C = \{p,a,d,r,i,s,i,m,o,e,s\}$
c. $A - (B \cup C) = \{m,x,c\}$
d. $B - C = A \cap B = \{e\}$.

27. a. $A \subset B$
b. $A \subset B$
c. $B \subset A$
d. $A \subset B$
e. $A \cap B = \emptyset$

28. a. $A \cup B = \{a,b,c,d,1\}$
b. $B \cap C = \{1\}$
c. $A \cap C = \emptyset$
d. $C \cup C = \{1,2\}$
e. $B \cap B = \{a,b,1\}$
f. $(A \cup B) \cup C = \{a,b,c,d,1,2\}$
g. $(B \cup C) \cup A = \{a,b,c,d,1,2\}$
h. $(A \cup B) \cap C = \{1\}$
i. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1\}$

29. a. sí
b. no está determinado
c. sí
d. sí
e. sí
f. sí

30. a. verdadero
b. falso
c. verdadero
d. verdadero
e. falso
f. falso

31. a. los conjuntos A y B deben de ser vacíos
b A es vacío
c. A y el conjunto universal coinciden: $A = U$
d. A es un subconjunto del conjunto B: $A \subseteq B$
e. para todo el conjunto A
f. A y el conjunto universal coinciden: $A = U$

g. los conjuntos A, B y el conjunto universal coinciden: $A = B = U$

h. B es un subconjunto del conjunto A: $A \supseteq B$

i. para todo el conjunto A

j. A es un conjunto vacío: $A = \emptyset$

32. a. $\{c,d\}$

b. $\{1,2\}$

c. $\{a,b\}$

d. $\{2\}$

e. $\{a,b,c,d\}$

f. $\{1\}$

33. a. $A \cap B = \{6\}$

b. $A \cup B = \{3,5,6,7\}$

c. $B \cup U = \{3,5,6,7,9\}$

d. $(B \cup A)^c = \{9\}$

e. $A \cap B^c = \{3,5\}$

34. a. $\{1,2,11\}$

b. $\emptyset$

c. $\{1,2,7,11\}$

d. $\emptyset$

e. $\{1,2,7,11\}$

36. a. $B\triangle C = \{2,4,b,\{c\},1,5\}$

b. $A \cap (B\triangle C) = \{1,2,4\}$

c. $B\triangle A = \{1,3,a,b\}$

d. $A\triangle A = \emptyset$

e. $A\triangle(B\triangle C) = \{3,b,\{c\},5\}$

f. $A\triangle B = \{1,3,a,b\}$

g. $A\triangle\emptyset = A = \{1,2,3,4\}$

h. $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$

37. a. A

b. A

c. A

d. A

e. U

f. U

38. a. $x \in [A \cap (A \cup B)] \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$

Entonces: $\forall x$: $x \in [A \cap (A \cup B)] \Leftrightarrow x \in A$

b. $x \in ((A \cap B) \cup B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B$

Entonces: $\forall x$: $x \in (A \cap B) \cup B \Leftrightarrow x \in B$

c. $\forall x$: $x \in [B \cup (A - B)] \Leftrightarrow x \in B \vee x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in B \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A) \wedge (x \in B \vee x \notin B) \Leftrightarrow x \in B \cup A \wedge x \in U \Leftrightarrow x \in B \cup A$

Entonces: $\forall x$: $x \in (A \cap B) \cup B \Leftrightarrow x \in B \in \cup A$

d. $x \in [A \cup (A \cap B)] \cup B \Leftrightarrow x \in [A \cup (A \cap B)] \vee x \in B \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in (A \cap B)] \vee x \in B \Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)] \vee x \in B \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)] \vee x \in B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in A \cup B] \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$

Entonces: $\forall x$: $x \in [A \cup (A \cap B)] \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

39. a. $x \in [(A \cup B) - B] \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A - B \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A - B$

Entonces: $\forall x$: $x \in [(A \cup B) - B] \Leftrightarrow x \in A - B$

b. $x \in [(A - B) \cup (B - A)] \Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \in B \wedge x \notin A] \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)] \wedge [(x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)] \Leftrightarrow [x \in (A \cup B) \wedge x \in U] \vee [x \in U \vee x \notin B \cap A] \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \notin (B \cap A) \Leftrightarrow x \in [(A \cup B) - (B \cap A)]$

Entonces: $\forall x$: $x \in [(A - B) \cup (B - A)] \Leftrightarrow x \in [(A \cup B) - (B \cap A)]$

c. $x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) - C$

Entonces: $\forall x$: $x \in [(A - B) \cup (B - A)] \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) - C]$

d. $x \in [(A \cup B) - C] \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge x \notin C \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin C] \vee [x \in B \wedge x \notin C] \Leftrightarrow x \in A - C \vee x \in B - C \Leftrightarrow x \in (A - C) \cup (B - C)$

Entonces: $\forall x$: $x \in [(A \cup B) - C] \Leftrightarrow x \in (A - C) \cup (B - C)$

e. $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Entonces: $\forall x$: $x \in [A \cup (B \cap C)] \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

40. a. $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$

Entonces: $\forall x$: $x \in [A - (B \cup C)] \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$

b. $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge [x \notin B \vee x \notin C] \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A - B \vee x \in (A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$

Entonces: $\forall x$: $x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$

c. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Entonces: $\forall x$: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

41. a. Probemos que $(A \subsetneq B) \Rightarrow (P(A) \subsetneq P(B))$. Sea $C \in P(A) \Rightarrow C \subsetneq A$ por hipótesis $A \subsetneq B$ luego $C \subsetneq A \subsetneq B$ y así $C \subsetneq B \Rightarrow C \in P(B)$. Ahora veamos que $(P(A) \subsetneq P(B)) \Rightarrow (A \subsetneq B)$. Sea $x \in A \Rightarrow \{x\} \in P(A)$ pero como $P(A) \subsetneq P(B)$ entonces $\{x\} \in P(B) \Rightarrow x \in B$

b. Sea $C \in P(A \cap B) \Leftrightarrow [C \subsetneq A \cap B] \Leftrightarrow [(C \subsetneq A) \wedge (C \subsetneq B)] \Leftrightarrow [(C \in P(A)) \wedge (C \in P(B))] \Leftrightarrow C \in P(A) \cap P(B)$

c. Sea $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ entonces $A \cup B = \{1,2\}$ y $P(A) = \{\emptyset, A\}$, $P(B) = \{\emptyset, B\}$, $P(A \cup B) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ mientras que $P(A) \cup P(B) = \{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

42. a. el conjunto de los ciudadanos colombianos que viven en Bogotá

b. D

c. B

d. el conjunto de todas las mujeres que viven en Bogotá

e. el conjunto de los ciudadanos extranjeros que viven en Bogotá

f. el conjunto de los hombres ciudadanos colombianos

g. el conjunto de las mujeres ciudadanas colombianas que no viven en Bogotá

h. el conjunto de los hombres ciudadanos colombianos y las mujeres ciudadanas colombianas que viven en Bogotá

43. a. $A^c = \{5,6,7,8,9\}$

b. $B^c = \{2,3,4\}$

c. $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

44. a. $\{2,4,6\}$

b. $\{1,2,3,4,5,7\}$

c. $\{1,2,4,5,6,7\}$

45. a. $A \cup B = \{2,4,6,8,1,3,5,7,9\}$

b. $A \cap C = \{2,4\}$

c. $A \cap B = \emptyset$

d. $A^c = \{0,1,3,5,7,9,10\}$

e. $(A \cap B)^c = U$

f. $B - C = \{5,7,9\}$

47. a. Sea $x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in A$ por lo tanto $A \cap B \subseteq A$;

b. Sea $x \in [A \cap (A \cup B)] \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow x \in A$ por lo tanto $A \cap (A \cup B) = A$;

c. Sea $x \in (B - A) \Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \in A^c)] \Leftrightarrow x \in (B \cap A^c)$ por lo tanto $B - A = B \cap A^c$;

d. $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$.

48. c.; d.; f.; i.

49. a.; c.; e.; g.

50. $n(P(A)) = 2^3 = 8$, son $\{3\},\{5\},\{6\},\{3,5\},\{3,6\},\{5,6\},\{3,5,6\}, \emptyset$.

51. $n(P(A)) = 2^4 = 16$, son $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$,$\{a,b,c,d\}$, $\varnothing$

52. $n(P(A)) = 2^2 = 4$, son $\{a\}$, $\{b,c\}$, $\{a,\{b,c\}\}$, $\varnothing$

53. $P(P(C)) = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\varnothing,\{a\}\}, \{\varnothing,\{b\}\}, \{\varnothing,\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{\{b\},\{a,b\}\}, \{\varnothing,\{a\},\{b\}\}, \{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}, \{\varnothing,\{b\},\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}, \{a,b\}\}, \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

54. **a.** falso
b. verdadero
c. verdadero
d. verdadero
e. verdadero
f. verdadero
g. falso
h. verdadero
i. verdadero
j. verdadero

55. **a.** $\varnothing$, $\{5\}$, $\{10\}$, $\{5,10\}$;
b. $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$;
c. $\varnothing$

56. **a.** $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{t\}$;
b. $\{x,y,z,t\}$;
c. $\{x,y\}$, $\{x,z,\}$, $\{x,t\}$, $\{y,z\}$, $\{y,t\}$, $\{z,t\}$;
d. $\varnothing$;
e. $\{x,y,t\}$, $\{x,y,z\}$, $\{y,t,z\}$, $\{x,z,t\}$

57. $\{\{a\},b,-0.2\}$, $\varnothing$,$\{\{a\}\}$, $\{b\}$, $\{-0.2\}$, $\{\{a\},b\}$, $\{\{a\}, -0.2\}$, $\{b,-0.2\}$

58. **a.** $X^c = \{b,d\}$
b. $Y^c = \{c,e\}$
c. $U - Z = \{a\}$
d. $Y - X = \{b,d\}$
e. $Z - Y = \{c,e\}$
f. $X - Z^c = \{c,e\}$
g. $Z - (X - Y) = \{b,d\}$
h. $(Y - Z)^c = \{b,c,d,e\}$
i. $(X^c)^c = \{a,c,e\}$

59. **a.** 17
b. 21
c. 5
d. 33
e. 27
f. 23
g. 11
h. 39

60. **a.** 32
b. 36
c. 27
d. 76
e. 50
f. 13
g. 7
h. 63

61. **a.** 29
b. 29
c. 30
d. 21
e. 3
f. 5
g. 27.

62. 5

63. 3

64. $B \subseteq A$

65. 28

66. 25

67. 11

68. 13

69. 18

70. 32

71. **a.** 25
b. 25

72. **a.** 7
b. 46

73. 80

74. **a.** 50
b. 30
c. 30
d. 20
e. 20

75. 310

76. **a.** 28
b. 15

51. $n(P(A)) = 2^4 = 16$, son $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$,$\{a,b,c,d\}$, $\emptyset$

52. $n(P(A)) = 2^2 = 4$, son $\{a\}$, $\{b,c\}$, $\{a,\{b,c\}\}$, $\emptyset$

53. $P(P(C)) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{\emptyset,\{b\}\}, \{\emptyset,\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{\{b\},\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}, \{\emptyset,\{b\},\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

54. a. falso
b. verdadero
c. verdadero
d. verdadero
e. verdadero
f. verdadero
g. falso
h. verdadero
i. verdadero
j. verdadero

55. a. $\emptyset$, $\{5\}$, $\{10\}$, $\{5,10\}$;
b. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$;
c. $\emptyset$

56. a. $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{t\}$;
b. $\{x,y,z,t\}$;
c. $\{x,y\}$, $\{x,z,\}$, $\{x,t\}$, $\{y,z\}$, $\{y,t\}$, $\{z,t\}$;
d. $\emptyset$;
e. $\{x,y,t\}$, $\{x,y,z\}$, $\{y,t,z\}$, $\{x,z,t\}$

57. $\{\{a\},b,-0.2\}$, $\emptyset$,$\{\{a\}\}$, $\{b\}$, $\{-0.2\}$, $\{\{a\},b\}$, $\{\{a\}, -0.2\}$, $\{b,-0.2\}$

58. a. $X^c = \{b,d\}$
b. $Y^c = \{c,e\}$
c. $U - Z = \{a\}$
d. $Y - X = \{b,d\}$
e. $Z - Y = \{c,e\}$
f. $X - Z^c = \{c,e\}$
g. $Z - (X - Y) = \{b,d\}$
h. $(Y - Z)^c = \{b,c,d,e\}$
i. $(X^c)^c = \{a,c,e\}$

59. a. 17
b. 21
c. 5
d. 33
e. 27
f. 23
g. 11
h. 39

60. a. 32
b. 36
c. 27
d. 76
e. 50
f. 13
g. 7
h. 63

61. a. 29
b. 29
c. 30
d. 21
e. 3
f. 5
g. 27.

62. 5

63. 3

64. $B \subseteq A$

65. 28

66. 25

67. 11

68. 13

69. 18

70. 32

71. a. 25
b. 25

72. a. 7
b. 46

73. 80

74. a. 50
b. 30
c. 30
d. 20
e. 20

75. 310

76. a. 28
b. 15

c. 13
d. 25

77. 11

78. a. 1400
b. 800
c. 200
d. 2300
e. 2400

79. 17

80. 2

81. 12

82. a. 142
b. 58

83. a. 20
b. 150
c. 75

84. a. 285
b. 15
c. 250
d. 265
e. 100
f. 135

85. a. 335
b. 83
c. 98
d. 207
e. 252
f. 45

86. a. 235
b. 765
c. 1350
d. 1002
e. 237

87. a. 22
b. 5
c. 63
d. 5

88. a. 10
b. 20
c. 10
d. 5

89. a. 30
b. 50
c. 160

90. 44

91. a. 13
b. 30
c. 12

92. $A = \{hombres\}$; $B = \{profesionistas\}$; $C = \{casados\}$ $n(A \cup B \cup C) = 1050 + 700 + 930 - 350 - 480 - 350 + 200 = 1700 > 1650$

Capítulo 3

1. 139.7
2. 16.54
3. 1006.1
4. 119.59
5. -346.08
6. 45.12
7. 2.85
8. 3.125×10^{-3}
9. .16427
10. 1.86
11. $4\frac{73}{100} = 4.73$
12. $-70.272 = -70\frac{34}{125}$
13. $-80.075 = -80\frac{3}{40}$
14. $-2.71 = -2\frac{71}{100}$
15. $\frac{61}{300}$

16. $-\frac{289}{150}$
17. $\frac{39}{20}$
18. $-\frac{243}{35}$
19. 489.31
20. 1553.38
21. 8073.29
22. 3.13
23. $13\frac{51}{80}$
24. $10\frac{43}{160}$
25. $10\frac{1}{40}$
26. $6\frac{1}{20}$
27. $-42\frac{437}{500}$
28. $\frac{187}{800}$
29. $3\frac{11}{16}$
30. $1\frac{1111}{1296}$
31. $3\frac{82}{135}$
32. 49
33. 23.865
34. $36\frac{25}{72}$
35. 599.3
36. 84.075
37. $2\frac{17}{21}$
38. $\frac{157}{280}$
39. 6
40. 11
41. $\frac{35}{48}$
42. 2
43. 5
44. 23
45. 4
46. $\sqrt{3}$
47. $\sqrt{2}$
48. 2
49. 2
50. $9-\sqrt{7}$
51. $7-\sqrt{5}$
52. $\sqrt{3}-1$
53. $10-\sqrt{3}$
54. $\frac{13}{15}$
55. $\sqrt{3}$
56. 8
57. $8-\sqrt{7}$
58. 5
59. 1
60. 3
61. 6
62. 0
63. 5
64. 2
65. 9
66. 5
67. $-x$
68. y
69. $3-x$
70. $x-3$
71. 0
72. $x-1$
73. $1-x$
74. 0
75. 1

76. 1

77. $|a|$

79. $5\frac{1}{12}a$

80. $\frac{7}{10}b$

81. $-3\frac{1}{2}a$

82. $1\frac{8}{11}a$

83. $\frac{40}{21}ab$

84. $\frac{2}{5}ab$

85. $\frac{147}{16}ab$

86. $-\frac{469}{100}ab$

87. $5x^3$

88. $\frac{8}{3}a^4$

89. $\frac{27}{4}y^5$

90. $(a+1)(4a-2)$

91. $(x-2)(14-5x)$

92. $(x+5)(3+7x)$

93. $8x(1-x)$

94. $2y(5-6y)$

95. $4y$

96. $6\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}x$

97. $0.2x-1\frac{1}{3}y$

98. $-1\frac{1}{15}a-3\frac{3}{4}y$

99. $5\frac{2}{15}x-2\frac{7}{12}b$

100. $20\frac{1}{5}a-1\frac{20}{21}b$

101. $12\frac{31}{40}y+1\frac{34}{35}b$

108. $m=4$

109. $m=4$

110. $m=5$

111. $m=3$

112. $m=1$

113. $m=4$

114. $m=2$

115. $m=2$

116. $m=0$

117. $m=1$

118. $m=2$

119. $m=4$

120. $\frac{3\times 2^{14}}{5}$

121. 7×3^5

122. $\frac{2\times 5^{12}-1}{5^8\times 2}\approxeq 4\times 5^{12}$

123. $\frac{1}{4}7^7$

124. $-\frac{1}{3}a^6$

125. $5a^7$

126. $-\frac{1}{8}a^{18}$

127. $-\frac{3}{17}a^{10}$

128. $\left(1\frac{19}{25}\right)^3$

129. $\left(8\frac{3}{11}\right)^2$

130. $\left(2\frac{4}{7}\right)^4$

131. 6^5

132. $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$

133. $\left(\frac{8}{45}\right)^3$

134. $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

135. 5^5

136. 6^7

137. 3^{13}

138. 4^{10}

139. 7^3

140. 10

141. 11^3

142. $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

143. $\left(\frac{1}{3}\right)^8$

144. 1

145. $(1.05)^{10}$

146. $(0.5)^4$

147. 3^6

149. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{23}{32}$

150. $-\frac{5}{2}a - \frac{41}{3}x = \frac{149}{8}$

151. $a^2 - \frac{1}{3}x^2 = -\frac{3}{16}$

152. $\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}x^2 = 2\frac{1}{16}$

153. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{4}a - x^2 = -1\frac{13}{32}$

154. $\frac{1}{14}a^2 - x^2 = -2\frac{47}{224}$

155. $\frac{15}{4}$

156. $\frac{41}{5}$

157. $-4\frac{1}{54}$

158. $24x^9$

159. $-\frac{1}{2}x$

160. $4\frac{y^5}{x^2}$

161. $\frac{2}{5mn}$

162. $\frac{7}{2}m^4n^2$

163. $\frac{1}{5}\frac{b^5}{a^2}$

164. $\frac{1}{3}x^3$

165. $2\frac{y^8}{x^4}$

166. $\frac{2z^2}{x^2y}$

167. $\frac{1}{4}\frac{x^5z^4}{y^3}$

168. $\frac{2y^3}{3x^2z}$

169. $\frac{1x^3}{4yz}$

170. $\frac{1}{2}x^5y$

171. $\frac{x^3}{y^4z^2}$

172. $-3y^5$

173. $\frac{1}{2}x^4y^{12}$

174. $\frac{5}{3m}$

175. $4p^2q^8$

176. $2s^7$

177. x^2y^3

178. $12x^2$

179. $5x^{-2}$

180. $-\frac{2x}{y}$

181. $3a^2$

182. $\frac{4}{\sqrt{2x}}$

183. $\frac{1}{5\sqrt[3]{5y}}$

184. $4x^2y^2$

185. $-\frac{y^5}{x^3}$

186. $\frac{m}{n^4}$

187. $\frac{1}{p^{\frac{12}{5}}q^{\frac{11}{10}}}$

188. $24x^9$

189. $-\frac{1}{2}x$

190. $4\frac{y^5}{x^2}$

191. $\frac{2}{5mn}$

192. $\frac{7}{2}m^4n^2$

193. $\frac{1}{5}\frac{b^5}{a^2}$

194. $\frac{1}{3}x^3$

195. $2\frac{y^8}{x^4}$

196. $\frac{z^2}{x^2}$

197. $\frac{1}{4}\frac{x^5z^3}{y^3}$

198. $\frac{2y^3}{3x^2z}$

199. $\frac{x^3}{4yz}$

200. $\frac{1}{2}x^5y$

201. $\frac{x^3}{y^4z^2}$

202. $-3x^8y^7$

203. $\frac{1}{2}x^4y^{12}$

204. $\frac{8}{75m}$

205. $-32\,\frac{p^8}{q}$

206. $32t^4s$

207. $\frac{3}{2xy^5}$

208. $2x^2$

209. $\frac{x^2}{5}$

210. $-\frac{1}{32xy^7}$

211. $9a^7$

212. $\frac{1}{32\sqrt{x}}$

213. $\frac{\sqrt[3]{5}}{3125}$

214. $\frac{4}{y^2x^4}$

215. $-\frac{y^4}{x^3}$

216. $\frac{m^2}{n^8}$

217. $p^{-\frac{11}{2}}q^{-\frac{2}{3}}$

218. $\sqrt[3]{x^2}$

219. $\left(8\sqrt[3]{y^2}\right)^2 = 64\sqrt[3]{y^2}$

220. $8\sqrt[3]{y^2}$

221. $2+\sqrt{x}$

222. $\sqrt{2+x}$

223. $2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

224. $4^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$

225. $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

226. $x^{\frac{1}{10}}$

227. $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

228. 3

229. $3|x|$

230. $-3x^{-1}$

231. $\frac{2|y|}{x^2}\sqrt[4]{y}$

232. $\frac{2y^2}{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$

233. $\frac{2x^2}{y^2}\sqrt{\frac{3}{y}}$

234. $\frac{2x}{3y^2}$

235. $\frac{x^2y}{z}\sqrt[5]{25y}$

236. $4m^3n^2$

237. $\frac{2|x|}{|y|}\frac{\sqrt[4]{2x^3}}{x^{\frac{1}{8}}}$

238. $\frac{-5y^2}{2x^2}\sqrt[3]{y^2}$

239. $(p^2q^2)\sqrt[5]{7q^3}$

240. xy

241. $a - b$

242. $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$

243. $4|x||z|y\sqrt{z}$

244. x^2y^2

245. xy

246. $10x^3$

247. 1

248. $2xz^3\sqrt[3]{2x^2y^2}$

249. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4y^3}}$

250. $\dfrac{2y}{\ }\sqrt{3vz}$

251. 1

252. $x + 4$

253. 44

254. 4

255. $\dfrac{1.21 \times 10^{-5}}{a}$; 2.8095

256. $w = \dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$ y $w = \frac{5}{6}$

257. Tenemos $54 - 30\sqrt{3} =$
$27 - 27\sqrt{3} + 27 - 3\sqrt{3} =$
$3^3 - 3 \times 3^2\sqrt{3} + 3 \times 3^2(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 =$
$(3 - \sqrt{3})^3$ y $54 - 30\sqrt{3} =$
$(3 + \sqrt{3})^3$ Entonces:
$\sqrt[3]{(3 - \sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(3 + \sqrt{3})^3} = 6$

258. $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x - 2)}$

259. $\dfrac{1}{6}\,\dfrac{3x^2a - 8}{a^2x}$

260. $\dfrac{3a^2x + xab - 3b^2}{a^3b^2}$

261. $\dfrac{a^2 - ab + b}{a^2 - b^2}$

262. $\dfrac{5x^2 + 16x + 1}{10(x + 3)}$

263. $\dfrac{6y + 5x}{15x^2y}$

264. $\dfrac{xy - 8y^2 + 3x^2}{60xy}$

265. $\frac{1}{12}x + \frac{1}{60}y$

266. $\dfrac{19x^3 + 30x^2 - 18x + 10}{45x^3}$

267. $\dfrac{2(b^2 + a^2)}{ab(a - b)(a + b)}$

268. $\dfrac{1 + x}{x(3 + x)}$

269. 0

270. $\dfrac{7a^2 - 12a + 1}{(a - 2)(a + 3)(a - 1)}$

271. $\dfrac{3}{10(1 - x^2)}$

272. $\dfrac{5}{4(1 + x)}$

273. $\dfrac{y}{x + y}$

274. $\dfrac{x + x^2 - 2}{x^2}$

275. $(2x^2 - y^2)\,\dfrac{x + y}{y(x - y)}$

276. $(1 + x)\dfrac{-1 + x}{x^3 + 2}$

277. $\dfrac{1}{4}\,\dfrac{4x + 8}{(x + 2)(1 + x)}$

278. $\dfrac{1 + x}{x}$

279. $\dfrac{x + 4}{x + 10}$

280. $\frac{1}{2}(1 + x^2 + 2x)(1 - x)$

281. x

282. $x - 1$

283. $\dfrac{1}{3(a-b)}$

284. $\dfrac{5y}{4x(y+x)}$

285. $x+1$

286. $\dfrac{x^2-4}{5xy+104}$

287. $\dfrac{3x+5}{x-2}$

288. $\dfrac{x-y}{y+x}$

289. $\dfrac{x+7}{x+3}$

290. $\dfrac{a+2b}{(a-3b)ax}$

291. $\dfrac{(x-a)^2}{x^2+ax+a^2}$

292. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$

293. $(4a+5)\dfrac{x}{(3a+2)a}$

294. $-\dfrac{x-3-2y}{x+3+2y}$

295. $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{2-\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} =$
$\dfrac{2-\sqrt{5}}{4-5} = \dfrac{2-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}-2$

296. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$
$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$

297. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})} =$
$\dfrac{3+\sqrt{18}}{3-6} = \dfrac{3+3\sqrt{2}}{-3} = -1-\sqrt{2}$

298. $\dfrac{5}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} = \dfrac{5(\sqrt{8}-\sqrt{7})}{(\sqrt{8}+\sqrt{7})(\sqrt{8}-\sqrt{7}} =$
$\dfrac{5(\sqrt{8}-\sqrt{7})}{8-7} = 5(\sqrt{8}-\sqrt{7})$

299. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} =$
$\dfrac{4+2\sqrt{6}}{2-3} = -2(2+\sqrt{6})$

300. $\dfrac{1}{x+\sqrt{7}} = \dfrac{x-\sqrt{7}}{(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})} = \dfrac{x-\sqrt{7}}{x^2-7}$

301. $\dfrac{2x^2}{5(\sqrt{3}+3)} = \dfrac{2x^2(\sqrt{3}-3)}{5(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)} =$
$\dfrac{2x^2(\sqrt{3}-3)}{5(3-9)} = -\dfrac{x^2(\sqrt{3}-3)}{15}$

302. $x^5(3x-1)$

303. $5x^6(x^6-5) = 5x^6\left((x^3)^2-\left(\sqrt{5}\right)\right)^2 =$
$5x^6\left((x^3)-\left(\sqrt{5}\right)\right)\left((x^3)-\left(\sqrt{5}\right)\right) =$
$5x^6\left((x^3)-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)^3\right)\left((x^3)+\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)^3\right) =$
$5x^6\left(x-\sqrt[6]{5}\right)\left(x^2+x\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{5}\right)\left(x+\sqrt[6]{5}\right)$
$\left(x+\sqrt[6]{5}\right)$

304. $(4x^6x^9+2)$

305. $4x^5(x^5-1)$

306. $3x^8(3x^3-2) =$
$9x^8\left(x-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\left(x^2+x\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$

307. $2x^8(7x^9+4)$

308. $a^2x(1+ax-4x^2)$

309. $a^2b^2(2a-3-a^2)$

310. $3ax^2(1-3a+2a^2x)$

311. $2ax^2(x-2a-2a^2)$

312. $4ab^2c(1-2ab)$

313. $7a^2xy^2(y-2x)$

314. $(x-y)(x-2y)$

315. $(y+3x)(y-x)$

316. $(x+y)(x-2y)$

317. $(x+5y)(x+3y)$

318. $3x(x-2)$

319. $5a(1+2a)$

320. $x^2(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)$

321. $3a(a+2b-3)$

322. $(x+y)(a-b)$

323. $2b\left(a^2+ab+b^2\right)$

324. $-(c+3d)(a-3b)$

325. $a\left(1-a+a^2\right)(4a-3b)$

326. $(a+c)(a+b)$

327. $(x+a)(x+y)$

328. $(a-3)(a-b)$

329. $(ab-2)(ab+2)$

330. $m-4n^2$

331. $\left(a^2+b^2\right)^2$

332. $-(x-y+3)(x-y-3)$

333. $(p+2)^3$

334. $(x+1)^2(x-1)^3$

335. $(4m-n+7)(4m-n-7)$

336. $\left(y^2-xy+x^2\right)\left(x^4+y^4\right)$

337. $(x-1)(x+1)^2$

338. $(x+1)(x-1)^2$

339. $(x-5)(x-1)(x+1)$

340. $(x-2)(x+2)^2$

341. $(x-1)(x-2)\left(x^2+2\right)$

342. $x^5-x^4-5x^3-5x^2+6x-6$

343. $(x-2)(x+2)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

344. $(x-2)(x+1)^2$

345. $(x-1)(x-2)(x+3)$

346. $(x-1)(x-3)(x+4)$

347. $(x-1)(3x-1)(x-3)(x+1)$

348. $(x-1)(x-2)(2x-1)(x+1)$

349. $(3x+4)(4x-3)\left(x^2+1\right)$

350. $-2(x-1)(x-2)(x-4)$

351. $(a-2)(a-4)(a+3)^2$

352. $-2(3x+4)(x-2)$

353. $4(x-2)(x-3)(2x+5)^2$

354. $(3t-1)(2t-1)(3t+1)$

355. $2(2m-1)(3m-5)$

356. $x^2(x+y)$

357. $x(1+x)$

358. $a^2(2-a)$

359. $x^2(y+z)$

360. $(x+y)(x+2)$

361. $(a-b)(m+n)$

362. $(4x-1)(x^2+1)$

363. $(1+3y)(1+x)$

364. $(4+5y^2)^2$

365. $(a-3)^2$

366. $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

367. $(a-1)^2(a^4+a^3+a^2+a+1)^2$

368. $(1+x)^2$

369. $(m-n+3)^2$

370. a

371. $-(6xy-1)(6xy+1)$

372. $(2x-9y^2)(2x+9y^2)$

373. $(xy^2z^3-12)(xy^2z^3+12)$

374. $\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{36}y^6$

375. $\frac{1}{100}-x^{2n}$

376. $-(y-1+x)(y+1-x)$

377. $-(4y-x+5)(4y-x-5)$

378. $(x-2)(x-3)$

379. $(x+2)(x-1)$

380. $(a-1)(a-8)$

381. $(m-2)(m-18)$

382. $(x^2+4)(x^2+1)$

383. $(x^5-4)(x^5+5)$

384. $(14y-x)(7y-x)$

385. $(x+11)(x-10)$

386. $(x+2)(2x-1)$

387. $(x+3)(5x-2)$

388. $(5x+3)(2x+1)$

389. $(6x+5)(5x-2)$

390. $(7x+9y)(3x-8y)$

391. $-(5a+6m)(3a-m)$

392. $(x+3mn)(4x-5mn)$

393. $-(2b-a)(3b-4a)$

394. $(x+1)^3$

395. $(3a+2)^3$

396. $(5a^2+1)(25a^4-5a^2+1)$

397. $(x+2-y)^2$

398. $(-n+x+m-y)(n+x+m+y)$

399. $1-\frac{4}{9}a^8$

400. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

401. $(2a-1)(3x-1)$

402. $(a-1)(2x-1)$

403. $(10x+a)(8x-a)$

404. $(1+3x^3)^2$

405. $(x^2y^2+12)(x^2y^2-8)$

406. $x\frac{x+6}{x+2}$

407. $-\frac{x^2-xy+y^2}{y}$

408. $\frac{x^2+2y^2}{x-y}$

409. $\frac{x\left(x^2-10x+4\right)}{x-2}$

410. $\frac{x}{x+y}$

411. $\frac{x+\sqrt{(xy)^2}}{y}$

412. $\sqrt{xy}$

413. $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$

414. $\sqrt{x^2+y}$

415. $2(x+\sqrt{x^2-1})$

416. $\sqrt{a^2-4a}$

417. a

418. $x-1$

419. $2-3\sqrt[10]{32y^2}+9\sqrt[5]{y^2}$

420. 0

421. $3\sqrt{\frac{b}{a}}$

422. $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

423. $\frac{1}{mn}$

424. $\frac{m^2}{n^2}$

425. $2y(x-y)$

426. $x\sqrt[4]{y}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$

427. $\sqrt[4]{(a-b)^2}$

428. $-4\sqrt{x}$

429. $\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

430. $-\sqrt{xz}$

431. $\frac{x^2}{2x-1}$

432. 1

433. $\frac{1}{2b}$

434. $\frac{5}{x-9y}$

435. 0

436. 1

437. $4(x-y)$

438. $\frac{4}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}$

439. a

440. 0

441. $\frac{a+1}{ab}$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$y$a \neq b$

442. $-m$ si $m \neq 0$, $m \neq 1$

443. $a-b$ si $a \neq b$, $a \neq -b$

444. $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

445. $2\frac{x+1}{x-1}$ si $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq 0$

446. $\frac{(x+y)(x^2-xy+2y^2)}{xy(x-y)}$
si $x \neq 0, y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$, $x \neq y$

447. $\frac{x^2+2x+4}{5(a-x)}$ si $a \neq 2$ y $a \neq x$, $x \neq 2$

448. $\frac{x^2+3x+9}{a-x}$ si $a \neq -3$ y
$a \neq 3$, $x \neq 3$, $x \neq a$ y $a \neq 0$

449. u^2-v

450. u^2-3v

451. $u^3-3uv-4u^2+5v^2+8v$

452. $2u^3-10uv$

453. $3u-14v+u^2$

455. $T_1 = P_1V_1\frac{T_2}{P_2V_2}$

456. $R = P\frac{V}{nT}$

457. $n = i\frac{r_2}{-ir_1+E}$

458. $v = \pm\frac{1}{m}\sqrt{2}\sqrt{(mFg)}$

459. $t = -\frac{-A+p}{pr}$

460. $T_1 = P_1V_1\frac{T_2}{P_2V_2}$

461. $t = \frac{V_1-V_0}{a}$

462. $a = F\frac{g}{M}$

463. $\pm 5\sqrt{\frac{Q}{6RT}}$

464. $r = \pm\frac{1}{F}\sqrt{(Fkm_1m_2)}$, $m_2 = \frac{F}{km_1}r^2$

465. $$\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{a-\sqrt{ab}+b} =$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b = 8$$

466. $a^3+a^{-3} = (a+a^{-1})(a^2-1+a^{-2}) =$
$(a+a^{-1})((a+a^{-1})^2-3) =$
$2(2^2-3) = 2$

467. $|x|+x$

468. $|x-5|+|x|$

469. $\left|\frac{a}{b}\right|$

470. $|x-3|+x$

471. $3|x|$

472. $|a+2|$

473. $|a-b|$

474. $1.2a^4b^6c^2$

475. $\frac{3|ab|}{5x^2|y|}$

476. $x-3$

477. $-a-2$

478. $a-5$

479. $4-x$

480. $-x\sqrt{2}-1$

481. $2a-3b$

482. 3

483. $1-3x$

484. 1

495. $b=-1.5,\ c=-1.5$

496. **a.** Pareja de números $(m, -7-m)$

b. $a=2,\ b=-1,\ c=2$

c. $a=1,\ b=-2,\ c=5$

d. $a=4,\ b=-3,\ c=-5$

497. $d=3$

498. $b=2$

499. $a=1,\ b=5$

500. $a=2,\ b=2,\ c=-1$

501. $a=2,\ b=2,\ c=-1$

502. **a.** $m=0, p=1, n=4, q=1$

o $m=0, p=1, n=4, q=-3$

b. $p=1,\ q=1,\ m=3,\ n=2,$

o $p=1,\ q=-1,\ m=-1,\ n=-2$

c. $(p, q, m, n)=(3, 2, 6, 12)$

o $(-3, 2, -6, -12)$

o $\left(\sqrt{17}, -2, 2\sqrt{17}, -4\sqrt{17}\right)$

o $\left(-\sqrt{17}, -2, -2\sqrt{17}, 4\sqrt{17}\right)$

503. $6x-5+\dfrac{23x-10}{2x^2+3x+2}$

504. $Q(x)=3;\qquad R(x)=2x-2$

505. $Q(x)=\frac{5}{2}x^3-x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2},\ R(x)=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}x;$

506. $Q(x)=x-1,\ R(x)=3x+2$

507.

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & -x^6+0x^5+0x^4-x^3+1 \\ & \underline{-x^6 \qquad\qquad\qquad +x^3} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

$Q(x)=x^3;\qquad R(x)=1$

508. $Q(x)=4x^2-2x-1;$
$R(x)=-13x^2+10x+1$

509. $Q(x)=-3x^2-6x-10;$
$R(x)=-30x-1$

510. $Q(x)=-x-1;$
$R(x)=-x$

511. $Q(x)=3x+6;$
$R(x)=6x-20$

512. $Q(x)=\dfrac{2}{3}x;$
$R(x)=-3x^2-\dfrac{10}{3}x-1$

513. $Q(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16;$
$R(x)=-33$

514. $Q(x)=1;$
$R(x)=-x^2-1$

515. $Q(x)=5x-15;$
$R(x)=41x+15$

516. $Q(x)=2;$
$R(x)=3x-1$

517. $Q(x)=3x-8;$
$R(x)=21$

518. $Q(x)=3x-8;$
$R(x)=21$

519.

$$\begin{array}{rrrrr} -2 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ & & -6 & 8 & -24 \\ \hline & \underbrace{3 \quad -4 \quad 12}_{\text{Coeficiente de } q(x)} & & & \underbrace{-22}_{\text{Residuo}} \end{array};$$

$Q(x)=3x^2-4x+12;$
$R(x)=-22$

520. $Q(x)=4x^3+7x^2+9x+10;\ R(x)=11$

521.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 3 \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{29}{8} \end{array};\ Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4};\ R(x) = \frac{29}{8}$$

522.

$$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ & & -3 & 3 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array};$$

$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$; $R(x) = 0$

523. $Q(x) = x^2$;
$R(x) = 0$

524. $Q(x) = 2x^3 + 9x^2 + 18x + 37$;
$R(x) = 71$

525. $Q(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 3$;
$R(x) = -4$

526. $Q(x) = 4x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$;
$R(x) = -\frac{9}{8}$

527. $Q(x) = 5x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{13}{16}$;
$R(x) = \frac{295}{64}$

528. $Q(x) = 2x + 11$;
$R(x) = 43$

529. $Q(x) = 5x^3 - 13x^2 + 39x - 120$;
$R(x) = 361$

530. $Q(x) = 5x^2 + 25x + 130$;
$R(x) = 651$

531. $Q(x) = 8x^3 + 8x^2 + 8x + 8$;
$R(x) = 11$

532. $Q(x) = 3x^2 - 9x + 25$;
$R(x) = -71$

533. $a = 1$ o $a = 7$

534. $a = -7$

535. $a = \sqrt{3}$ o $a = -\sqrt{3}$

536. $a = 3$; $b = -\frac{1}{2}$

537. $a = 2$; $b = -4$

538. $a = 2$; $b = 7$

539. $p = -12$, $q = 16$, $x_1 = x_2 = 2$,
y $x_3 = -4$

540. $k_1 = \frac{3}{2}$ y $k_2 = \frac{1}{2}$

541. $s(2) = 1$

542. $s(3) = 27$

543. $s(-2) = 8$

544. $s(-3) = -479$

545. $s(4) = 137$

546. $Q(x) = a(x - \frac{2}{3})(x - 1)(x - 5)$.
Sustituyendo x por 0 obtenemos
$10 = a(-\frac{2}{3})(-1)(-5) = a(-\frac{10}{3})$.
Luego $a = -3$
$Q(x) = -3(x - \frac{2}{3})(x - 1)(x - 5) =$
$3x^3 - 16x^2 + 3x + 10$

547. $Q(x) = a(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$.
Sustituyendo x por 2 obtenemos
$-6 = a(-\sqrt{2})(\sqrt{2}) = a(-2)$
Luego $a = 3$
$Q(x) = 3(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2}) =$
$3x^2 - 12x + 6$

548. $Q(x) = a(x - 0)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.
Sustituyendo x por -2 obtenemos
$24 = a(-2)(-1)(-3)(-4) = a(24)$
Luego $a = 1$
$Q(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

549. $Q(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{9}$

550. $Q(x) = 2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 11x + 3$

551. $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$; $a \neq 0$ puesto que el grado es 3; $c = 1$ pues de lo contrario $x = 0$ sería una raíz; $b = 0$ pues de lo contrario $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ que no satisface la condición. Así, $Q(x) = (x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$

552. $Q(x) = ax^2 + bx + c$; donde $b^2 - 4ac < 0$

553. $Q(x) = 2(x-2)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-c)$. Sustituyendo $x = 0$ obtenemos $2 = 2(-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-c)$ de donde $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, $Q(x) = 2x^3 - x - 4x^2 + 2$

554. $Q(x) = 2x(x-1)(x+1)(x-c)$ puesto que $Q(-1) = 0$ significa que $(x+1)$ es un factor. Sustituyendo $x = 2$ obtenemos: $24 = 4(1)(3)(2-c)$; luego se hace $c = 0$; así, tenemos: $Q(x) = 2x^2(x-1)(x+1) = 2x^4 - 2x^2$

555. $Q(x) = a(x-c)^3$ $-Q(x) = -a(x-c)^3$ y $Q(-x) = a(-x-c)^3$; luego tenemos: $-a(x-c)^3 = a(-x-c)^3$; esto es $-x + c = -x - c$; por lo tanto, $c = 0$. Así tenemos que $Q(x) = ax^3$

556. $P(x) = 15x^3 - 43x^2 + 28x - 4$

557. $P(x) = 6x^3 - 16x^2 - 6x$

558. $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

559. $P(x) = 5x^3 + 17x^2 + 16x + 4$

560. $P(x) = 4x^4 - x^2$

561. $P(x) = a(x+1)(x-3)^2 = ax^3 - 5ax^2 + 3ax + 9a$

562. $P(x) = ax^2(x+1)^2 = ax^4 + 2ax^3 + ax^2$

563. $P(x) = a(x-3)^3(x-2)(x+1)^2$

564. $P(x) = 2(2x-1)^2(x-3)^3$

565. $P(x) = a(x-c)^3$

566. $x_1 = 0$ multiplicidad 3;
$x_2 = 3$ multiplicidad 2;
$x_3 = -1$ multiplicidad 1;
$x_4 = 2$ multiplicidad 3

567. $x_1 = \frac{2}{3}$ multiplicidad 4;
$x_2 = -\frac{1}{2}$ multiplicidad 2

568. $x_1 = 0$ multiplicidad 1;
$x_2 = -3$ multiplicidad 2;
$x_3 = \frac{1}{2}$ multiplicidad 3

569. $x_1 = \frac{3}{5}$ multiplicidad 3;
$x_2 = -\frac{3}{2}$ multiplicidad 2

570. $x_1 = -\frac{1}{2}$ multiplicidad 1
$x_2 = \frac{2}{3}$ multiplicidad 2
$x_3 = -\sqrt{2}$ multiplicidad 2

571. $x_1 = \sqrt{2}$ multiplicidad 1;
$x_2 = -\sqrt{2}$ multiplicidad 2

572. $x_1 = \frac{3}{5}$ multiplicidad 4;
$x_2 = 1$ multiplicidad 3

573. $x_1 = 2$ multiplicidad 3;
$x_2 = \frac{4}{3}$ multiplicidad 2

574. sí

575. sí

576. no

577. no

578. no

579. sí

580. sí

581. sí

582. sí

583. si

584. no

585. sí

586. no

587. no

588. sí

589. $5x^3 - 21x^2 + 24x - 4 = (x-2)^2(5x-1)$

590. $27x^5 - 54x^4 - 72x^3 - 26x^2 - 3x = 27x(x-3)(x+\frac{1}{3})^3$

591. $2x^5 + 17x^4 + 56x^3 + 88x^2 + 64x + 16 = (x+2)^4(2x+1)$

592. $9x^5 + 6x^4 - 11x^3 - 4x^2 - 4x = x(3x-2)^2(x+1)^2$

593. $x^4 - 16x^3 + 90x^2 - 200x + 125 = (x-5)^3(x-1)$

594. $P(x) = (x-2)^3(x^2+x+1)$

595. $P(x) = (x-2)^2(x^2+x+4)$

596. $P(x) = (x-1+\sqrt{6})(x-1-\sqrt{6})(x+3)^2$

597. $P(x) = (2x-3)^3(3x^2-x-1)$

598. $P(x) = (2x^2-3x+2)(x-3)^2$

599. $P(x) = (3x-2)(5x^2-3x+2)$

600. $P(x) = (x-15)^2(8x^2-5x+2)$

601. $P(x) = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-4)^3$

602. $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)(x-2)^2$

603. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)$

604. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, ± 2, ± 3, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{4}$, ± 6; ninguna de ellas es raíz.

605. Las posibles raíces racionales son ± 1, ± 5; ninguna de ellas es raíz.

606. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{9}$; ninguna de ellas es raíz.

607. $p(x) = 3(x^4 - x^2 + 4x^3 + 8x - 6)$; las posibles raíces son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 ninguna de ellas es raíz.

608. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, ± 3, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{4}$; ninguna de ellas es raíz.

609. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{10}$, $\pm\frac{2}{15}$, $\pm\frac{1}{30}$, ± 2, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{2}{5}$, $\pm\frac{2}{15}$; ninguna de ellas es raíz.

610. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{3}$; ninguna de ellas es raíz.

611. Las posibles raíces racionales son ± 1, ± 2 $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$; ninguna de ellas es raíz.

612. Las posibles raíces racionales son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$; ninguna de ellas es raíz.

613. Las posibles raíces racionales son ± 1, ± 2, ninguna de ellas es raíz.

614. $(x-1)(x+1)(2x-3)(3x-2) = 6x^4 - 13x^3 + 13x - 6$

615. $(3x-4)(4x-2)(x-1) = 12x^3 - 34x^2 + 30x - 8$

616. $(x-3)(4x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 4x^4 - 9x^2 - 13x^3 + 39x - 9$

617. $(5x-2)(x-3)(2x-7) = 10x^3 - 69x^2 + 131x - 42$

618. $(2x+1)\left(2x^2-x+2\right) = 4x^3 + 3x + 2$

619. $(3x-2)(4x+3)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 12x^4 - 30x^2 + x^3 - 2x + 12$

620. $(2x-1)(2x+1)\left(3x^2+2x+1\right)(x-1) = 12x^5 - 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + x + 1$

621. $(2x-5)(3x-2)\left(5x^2-4x+2\right) = 30x^4 - 119x^3 + 138x^2 - 78x + 20$

622. $\left(-2x^2+4x+3\right)(x-2) = -2x^3 + 8x^2 - 5x - 6$

623. $(3x-2)(2x+1)(5x+3) = 30x^3 + 13x^2 - 13x - 6$

Capítulo 4

1. no

2. sí

3. no

4. sí

5. sí

6. sí

7. x_1 sí es raíz, x_2 no es una raíz

8. los dos son raíces

9. sí

10. no

11. no

12. $x = 2$

13. $x = 1$

14. $x = \frac{11}{2}$

15. $\frac{5}{2}$

16. $x = -2$

17. $x = 3$

18. $x = 5$

19. $x = -2$

20. $y = \frac{1}{4}$

21. $y = 3$

22. $x = -4$

23. $z = 6$

24. $x = -2$

25. $x = -27$

26. $x = -\frac{14}{11}$

27. $x = \frac{15}{11}$

28. $x = 1$

29. 23

30. $x = \frac{21}{5}$

31. $x \in \mathbf{R}$

32. $x = -\frac{1}{2}$

33. $x = \frac{1}{4}$

34. $x = -1$

35. $x = -1$

36. $x = \frac{25}{21}$

37. $x = 5$

38. $x = 2$

39. $x = \frac{2}{3}$

40. $x = -13$

41. $x = \frac{11}{4}$

42. $x = \frac{8}{5}$

43. $x = 8$

44. $x = \frac{4}{3}$

45. $x = 2$

46. $x = 1$

47. $x = 5$

48. $x = -\frac{4}{7}$

49. 2

50. $x_1 = -2,\ x_2 = -3$

51. $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

52. $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

53. -4

54. -1

55. $x_1 = 3 + \sqrt{17},\ x_2 = 3 - \sqrt{17}$

56. $x_1 = -3,\ x_2 = 5$

57. $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

58. $x = -\frac{1}{3},\ x = \frac{4}{3}$

59. $x = \frac{6}{5},\ x = -\frac{6}{5}$

60. $x = \frac{4}{3},\ x = -\frac{4}{3}$

61. no hay solución

62. $x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

63. $x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2},\ x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

64. $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

65. $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

66. $x = -3$, $x = \frac{1}{4}$

67. $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$

68. $x = -2$, $x = 1$

69. $x = -\frac{2}{3}$, $x = 3$

70. $x_1 = -\frac{16}{11}$, $x_2 = -\frac{6}{11}$

71. $x_1 = x_2 = -\frac{4}{5}$

72. $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$

73. no hay solución

74. $x_1 = \frac{1}{15}$, $x_2 = \frac{2}{5}$

75. $x_1 = \frac{27}{4}$, $x_2 = \frac{20}{3}$

76. $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33}$, $x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33}$

77. $x_1 = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{29}$, $x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{29}$

78. $x_1 = \frac{2}{13} + \frac{1}{26}\sqrt{94}$, $x_2 = \frac{2}{13} - \frac{1}{26}\sqrt{94}$

79. $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 4$

80. $x_1 = -\pi$, $x_2 = 3\pi$

81. $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \sqrt{5}$

82. $x_1 = -4\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$

83. $x_1 = -10$, $x_2 = 5$

84. $x_1 = -\frac{10}{3}$, $x_2 = 5$

85. $x = 2$

86. no hay solución

87. $x = -4$

88. $x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$, $x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

89. $x_1 = -7 + \sqrt{53}$, $x_2 = -7 - \sqrt{53}$

90. $x_1 = \sqrt{5} + 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

91. $x \in \mathbf{R}$

92. $x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

93. $x_1 = -3$, $x_2 = 5$

94. no hay solución

95. $x = -1$

96. $x = 8$

97. $x_1 = 4$, $x_2 = -5$

98. $x_1 = 9$, $x_2 = -4$

99. no hay solución

100. $x = -1$

101. no hay

102. no hay

103. $x = 2$

104. $x = 0$

105. $x = -1$

106. $x = 1.5$

107. $x = -0.25$

108. $x = \frac{1}{4}$

109. $10\frac{3}{4}$

110. $x_1 = 1.4$, $x_2 = 3$

111. $x_1 = -2$, $x_2 = -8\frac{1}{2}$

112. $x = 4$

113. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$

114. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$, $x_4 = 4$

115. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$, $x_4 = 6$

116. $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{7}$, $x^4 = \sqrt{7}$

117. $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{6}$, $x_4 = \sqrt{6}$

118. indicación: $t = x^2 - 16x$,
$x_1 = 8 - \sqrt{57}$, $x_2 = 8\sqrt{57}$,
$x_3 = 8 - \sqrt{73}$, $x_4 = 8 + \sqrt{73}$

119. indicación: $t = x^2 + x + 1$, $x = -2$, $x_2 = 1$

120. indicación: $x - 3 = t^2$, $x = 12$

121. indicación: el trinomio $ax^2 + bx + c$ se factoriza de la siguiente manera
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:
$a = 6$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ por lo tanto
$6x^2 + 5x + 1 = 6(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{2}) =$
$(3x + 1)(2x + 1)$

122. $a = 4$, $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{4}$ por lo tanto
$4x^4 + 19x - 5 = 4(x + 5)(x - \frac{1}{4}) =$
$(x + 5)(4x - 1)$

123. $a = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ por lo tanto
$2x^2 - 7x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3) =$
$(2x - 1)(x - 3)$

124. $a = 3$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$ por lo tanto
$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})(x - 1) =$
$(3x - 2)(x - 1)$

125. $a = 4$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 3$ por lo tanto
$4x^2 - 11x - 3 = 4(x + \frac{1}{4})(x - 3) =$
$(4x + 1)(x - 3)$

126. $a = 5$, $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = -2$ por lo tanto
$5x^2 + 13x + 6 = 5(x + \frac{3}{5})(x + 2) =$
$(5x + 3)(x + 2)$

127. $a = 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{4}{3}$ por lo tanto
$3x^2 - 5x - 12 = 3(x - 3)(x + \frac{4}{3}) =$
$(x - 3)(3x + 4)$

128. $a = 5$, $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{2}{5}$ por lo tanto
$5x^2 + 18x - 8 = 5(x + 4)(x - \frac{2}{5}) =$
$(x + 4)(5x - 2)$

129. $a = -3$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$ por lo tanto
$4 - 3x^2 - 4x = -3(x - \frac{2}{3})(x + 2) =$
$(2 - 3x)(x + 2)$

130. $a = -4$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 3$ por lo tanto
$15x - 4x^2 - 9 = -4(x - 3)(x - \frac{3}{4}) =$
$(4x - 3)(3 - x)$

131. $a = -3$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$ por lo tanto
$5x + 2 - 3x^2 = -3(x - 2)(x + \frac{1}{3}) =$
$(2 - x)(3x + 1)$

132. $a = -3$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -7$ por lo tanto
$-19x + 14 - 3x^2 = -3(x + 7)(x - \frac{2}{3}) =$
$(2 - 3x)(x + 7)$

133. $a = -2$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 4$ por lo tanto
$5x + 12 - 2x^2 = -2(x + \frac{3}{2})(x - 4) =$
$(4 - x)(2x + 3)$

134. $a = -5$, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = 3$ por lo tanto
$17x - 5x^2 - 6 = -5(x - \frac{2}{5})(x - 3) =$
$(5x - 2)(3 - x)$

135. $a = 2$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 5$ por lo tanto
$2x^2 - 7x - 15 = 2(x + \frac{3}{2})(x - 5) =$
$(x - 5)(2x + 3)$

136. $x^2 - 2x - 3 = 0$

137. $6x^2 - 5x - 6 = 0$

138. $x^2 - 6\sqrt{3}x + 9 = 0$

139. $x^2 - \frac{1}{25} = 0$

140. $x^2 + (\sqrt{2} - 2)x + -2\sqrt{2} = 0$

141. Según el teorema de Viete $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ y $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, entonces $x_1 \cdot x_2 = 1$ y $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$: $4x_1^2 + 4_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) = 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 4[(\frac{7}{2})^2 - 2] = 41$

142. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$ y $x_1 + x_2 = 2$, entonces: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 6$

143. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{5}$ y $x_1 + x_2 = -3$, entonces: $x_1^2 + x_2^2 + 7x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 5x_1x_2 = 18$

144. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = 2$ y $x_1 + x_2 = -7$, entonces:

$$\frac{1}{x_1{}^2} + \frac{1}{x_2{}^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{45}{4}$$

145. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -3$ y $x_1 + x_2 = 5$, entonces:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1x_2}{9} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} - \frac{x_1x_2}{9} = 6$$

146. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 + x_2 = 4$, entonces: $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1} = -22$

147. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 + x_2 = -\frac{9}{2}$, entonces: $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_1x_2 = 40$

148. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{8}$ y $x_1 + x_2 = \frac{1}{4}$, entonces: $x_1^2 + x_2^2 - \frac{x_1x_2}{2} = 1$

149. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -1$ y $x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, entonces: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2}$

150. Según el teorema de Viete: $x_1 \cdot x_2 = -1$ y $x_1 + x_2 = -3$, entonces: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2 = \sqrt{6} + \frac{1}{2}$

151. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 2$, por hipótesis, $7x_2 - 4x_1 = 47$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (-3 y 5) y entonces $p = x_1x_2 = (-3)(5) = -15$.

152. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1x_2 = -16$, por hipótesis, $x_1 = -4x_2$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (-8 y 2 o 8 y -2). Entonces $p = x_1 + x_2 = \pm 6$

153. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1x_2 = 18$, por hipótesis, $x_1 = 2x_2$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (-6 y -3 o 6 y 3). Entonces $p = x_1 + x_2 = \pm 9$

154. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 15$, por hipótesis, $x_1 = 2x_2$. Las raíces son $x_1 = 10$ y $x_2 = 5$. Entonces $p = x_1x_2 = 50$

155. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = -6$, por hipótesis, $x_1 - x_2 = 2$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (-2 y -4). Entonces $p = x_1x_2 = (-2)(-4) = 8$

156. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 12$, por hipótesis, $x_1 = 3x_2$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (9 y 3). Entonces $p = x_1x_2 = (9)(3) = 27$

157. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1x_2 = 4$, por hipótesis, $x_1 - x_2 = 3$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (1 y 4 o -1 y -4). Entonces $p = x_1 + x_2 = \pm 5$

158. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1x_2 = 3$, por hipótesis, $x_1 - x_2 = 2$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (3 y 1 o -1 y -3). Entonces $p = x_1 + x_2 = \pm 4$.

159. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = -5$, por hipótesis, $7x_1 - 5x_2 = 13$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (-1 y -4). Entonces $p = x_1x_2 = (-1)(-4) = 4$

160. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 8$, por hipótesis, $3x_1 - 4x_2 = 10$. De estas ecuaciones se puede hallar x_1 y x_2 (6 y 2). Entonces $p = x_1x_2 = (6)(2) = 12$

161. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 2p + 3$, por hipótesis, $x_1x_2 = 5p + 6$. De estas ecuaciones se puede hallar $x_2 = 3$ y $p = 6$. Entonces, la ecuación resultante es $x^2 - 15x + 36 = 0$

162. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 3p + 1$ y $x_1x_2 = 10p + 5$. Por hipótesis, $x_1 = 11$ entonces $x_2 = 5$ y $p = 5$, por lo tanto la ecuación resultante es $x^2 - 16x + 55 = 0$

163. De acuerdo con el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = -(4 - 2p)$ y $x_1x_2 = -6p + 3$. Por hipótesis, $x_1 = 7$ entonces $x_2 = -3$ y $p = 4$. Entonces, la ecuación resultante es $x^2 - 4x - 21 = 0$

164. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 2p + 1$ y $x_1x_2 = 4p + 4$. Por hipótesis, $x_1 = 8$ entonces $x_2 = 3$ y $p = 5$, por lo tanto, la ecuación resultante es $x^2 - 11x + 24 = 0$

165. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 4p + 1$ y $x_1x_2 = 7p + 2$. Por hipótesis, $x_1 = 15$ entonces $x_2 = 2$ y $p = 4$, por lo tanto la ecuación resultante es $x^2 - 17x + 30 = 0$

166. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 3p - 3$ y $x_1x_2 = 11p + 3$. Por hipótesis, $x_1 = 10$ entonces $x_2 = 8$ y $p = 7$, por lo tanto, la ecuación resultante es $x^2 - 18x + 80 = 0$

167. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 5p - 4$ y $x_1x_2 = 10p - 1$. Por hipótesis, $x_1 = 13$ entonces $x_2 = 3$ y $p = 4$, por lo tanto, la ecuación resultante es $x^2 - 16x + 39 = 0$

168. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 3p - 2$ y $x_1x_2 = 5p - 2$. Por hipótesis, $x_1 = 14$ entonces $x_2 = 2$ y $p = 6$, por lo tanto, la ecuación resultante es $x^2 - 16x + 28 = 0$

169. Según el teorema de Viete, $x_1 + x_2 = 3p - 4$ y $x_1x_2 = 11p - 5$. Por hipótesis, $x_1 = 8$ entonces $x_2 = 9$ y $p = 7$, por lo tanto, la ecuación resultante es $x^2 - 17x + 72 = 0$

170. $m_1 = -\sqrt{2} \qquad m_2 = \sqrt{2}$

171. $x^2 + npx + n^2q = 0$

172. $x^2 + (p - 2m)x + q - mp + m^2 = 0$

173. $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$

174. $x^2 = t \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Entonces, tenemos:

$$x^2 - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}\right)$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

con lo que tenemos que $x_2 + x_1 = 0$

175. $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$

176. $m < -\frac{5}{2}$

177. $-6 < m < \frac{4}{3}$

178. $-\frac{1}{3} \le m < 4$

179. La ecuación tiene 2 raíces para cualquier valor de m.

180. La ecuación tiene 2 raíces para $m \neq 2$ y una raíz para $m = n$.

181. La ecuación tiene 2 raíces para $m \neq n$ y una raíz para $m^2 = -n$.

182. La ecuación tiene 2 raíces para $m^2 > -n$ y una raíz para $m = 2n$.

183. La ecuación tiene 2 raíces para $m \neq 0$; $n \neq 0$ y $m^2 \neq n$ y una raíz para $m^2 = n$ ($m \neq 0$ y $n \neq 0$).

184. La ecuación tiene 2 raíces para $n \neq 0$ y una raíz para $n = 0$.

185. $a = 2$ y $b = 3$

186. $x = 4a$, $a \neq 0$
Si $a = 0$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

187. $x = \dfrac{2(a^2 - b^2 - 2a^2b^2)}{ab(a^2 - b^2 + 2)}$

para $ab(a^2 - b^2 + 2) \neq 0$, $b^2 \neq 1$

188. $x = \dfrac{(a + b)\,n}{(a - b)\,m}$ para $m \neq 0$, $n \neq 0$

$a \neq b$ y $(a + b)n \neq (a - b)m$

189. $x = c$ para $c \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq -b$

190. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$

191. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

192. $x_1 = 3$, $x_2 = 7$

193. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

194. $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 4$

195. $x_1 = -8$, $x_2 = 24$

196. $x_1 = 24$, $x_2 = -18$

197. $x_1 = 8$, $x_2 = -16$

198. $x_1 = -6$, $x_2 = -10$

199. $x_1 = -2$, $x_2 = -5$

200. $x = -1$

201. $x = \frac{11}{10}$

202. $x = -\frac{4}{3}$

203. $x = \frac{6}{5}$

204. $x = \frac{5}{8}$

205. $x = \frac{6}{13}$

206. $x = 1$

207. $x = 0$

208. $x = \frac{2}{11}$

209. $x = 1$

210. $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$

211. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{4}$

212. $x_1 = 4, x_2 = -2$

213. $x_1 = 3, x_2 = 0$

214. $x_1 = 3, x_2 = -3$

215. $x_1 = 6, x_2 = -4$

216. $x_1 = 2, x_2 = -2$

217. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{5}{2}$

218. $x_1 = 2, x_2 = -\frac{14}{5}$

219. $x_1 = 4, x_2 = -\frac{8}{3}$

220. $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

221. $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

222. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

223. $x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$

224. $x \in \left[-\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}\right]$

225. $x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = 0$

226. $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

227. $x \in \left[\frac{1}{7}, \frac{8}{7}\right]$

228. $x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{14}{5}\right]$

229. $x \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$

230. $x_1 = -3, x_2 = 3$

231. $x_1 = -4, x_2 = 2$

232. $x_1 = -1, x_2 = 3$

233. $x_1 = -2, x_2 = 1$

234. $x_1 = -3, x_2 = 5$

235. $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}$

236. $x_1 = 2 + 2\sqrt{3}, x_2 = -4$

237. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{11}{2}$

238. $x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$

239. $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{11}{2}$

240. $x_1 = 3, x_2 = 3 + \sqrt{2}, x_3 = 3 - \sqrt{2}$

241. $x_1 = 3, x_2 = 3 + 3\sqrt{2}$
$x_3 = 3 - 3\sqrt{2}$

242. $x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}$

243. $x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{2}, x_3 = 1 - \sqrt{2}$

244. $x_1 = 4, x_2 = 4 + 2\sqrt{2}$
$x_3 = 4 - 2\sqrt{2}$

245. $x_1 = -1, x_2 = -1 + 3\sqrt{2}$.
$x_3 = -1 - 3\sqrt{2}$

246. $x_1 = -1, x_2 = -1 + 2\sqrt{2}$
$x_3 = -1 - 2\sqrt{2}$

247. $x_1 = 3, x_2 = 3 + 5\sqrt{2}, x_3 = 3 - 5\sqrt{2}$

248. $x_1 = 5, x_2 = 5 + 3\sqrt{2}, x_3 = 5 - 3\sqrt{2}$

249. $x_1 = 3, x_2 = 3 + 2\sqrt{2}, x_3 = 3 - 2\sqrt{2}$

250. $x_1 = 3 - \sqrt{82}, x_2 = 1 - 3\sqrt{10}$

251. $x_1 = 6, x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{29}$

252. $x_1 = 3, x_2 = \sqrt{2}$

253. $x_1 = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{46}, x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{19}$

254. $x_1 = 0, x_2 = 4 - \sqrt{6}$

255. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{15}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{265}$

256. $x_1 = 5, x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57}$

257. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{41}$

258. $x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}$

259. $x = 1$

260. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

261. $x = 1$

262. $x \in (-\infty, 1]$

263. $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

264. $x \in [-1, 1]$

265. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

266. $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

267. $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$

268. $x = \frac{-1-\sqrt{26}}{2}$

269. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

270. $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$, $x_3 = 0$

271. $x_1 = \sqrt{11}$, $x_2 = -\sqrt{11}$,
$x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$

272. $x_1 = -3$, $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$

273. $x = -1$

274. no hay solución

275. no hay solución

276. $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$

277. $x = 4$

278. $x_1 = 1$, $x_2 = 2.5$
$x_3 = -1$, $x_4 = -2.5$

279. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$
$x_4 = 1$, $x_5 = -4$

280. Tenemos:

$$|(x^2-2)(x^2+2) - (x^2+2)| = |(x^2-2)(x^2+2)| - (x^2+2)$$

$$|(x^2+2)(x^2-2-1)| = |(x^2-2)(x^2+2)| - |x^2+2|$$

$$|x^2+2| \times |x^2-3| = |x^2-2| \times |x^2+2| - |x^2+2|$$

Pero, $|x^2+2| \neq 0$ para cualquier $x \in R$ entonces dividiendo ambos lados por $|x^2+2|$ tenemos

$$|x^2-3| = |x^2-2| - 1 \, (*)$$

Sin embargo, con la definición de valor absoluto podemos escribir

$$|x^2-3| = \left\{ \begin{array}{l} x^2-3 \text{ para } x^2-3 \geq 0 \\ 3-x^2 \text{ para } x^2-3 < 0 \end{array} \right\}$$

y

$$|x^2-2| = \left\{ \begin{array}{l} x^2-2 \text{ para } x^2-2 \geq 0 \\ 2-x^2 \text{ para } x^2-2 < 0 \end{array} \right\}$$

Entonces, finalmente tendremos una equivalencia de la ecuación (*) en la forma:

a) $\begin{cases} x^2-3 = x^2-2-1 \\ x^2-3 \geq 0 \\ x^2-2 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-3 = 2-x^2-1 \\ x^2-3 \geq 0 \\ x^2-2 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3-x^2 = x^2-2-1 \\ x^2-3 < 0 \\ x^2-2 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3-x^2 = 2-x^2-1 \\ x^2-3 < 0 \\ x^2-2 < 0 \end{cases}$

y como solución tenemos:
$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) U (\sqrt{3}, +\infty)$

281. $x \geq 0$

282. para cualquier x, $y \in R$

283. para $x = y$ y $x = -y$

284. para $x = y$ o $x = -1$

285. para $x = -1$ o $x = 7$

405. $x_1 = -8$, $y_1 = -15$; $x_2 = 10$, $y_2 = 12$

406. $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = -\frac{6}{5}$; $x_2 = 6$, $y_2 = 4$

407. $x = \frac{m^2 + m}{(m-1)^2}$; $y = \frac{m^2 - 3m}{(m-1)^2}$ y $m \neq 1$

Tenemos que $x \cdot y < 0$ y esto significa que

$$\frac{m^2(m+1)(m-3)}{(m-1)^4} < 0$$

Entonces, $m \in (-1,0)U(0,1)U(1,3)$

408. $x = \frac{3}{2}m - 1$ y $y = \frac{1}{8}m - 1$

Las condiciones son $x > 0$ y $y > 0$, con lo que concluimos que $m > 8$

409. $a \in (-2, 4)$

410. $m \in (-1, 1)$

Indicación: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

411. $m > 0$

412. Valor mínimo 2 para $x = y = 1$

413. $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ y $m_3 = 3$

414. $a \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

415. $m \in \left(-1\frac{1}{2}; -1\right) \cup (0,1)$

416. $m > 12$

417. 15

418. 12

419. Enrique 6 años; Juan 10 años

420. 15

421. 24, 25 y 26

422. hoy: 1875; ayer: 875

423. Primer día, 844; segundo día, 422; tercer día, 211

424. 120,000 60,000 15,000 3000 y 300

425. 48 y 30

426. $\frac{9}{1} = 9$

427. $1\frac{7}{8}$

428. 109.09 km

429. sí

430. 369

431. 36,000 y 16,000

432. \$141.54

433. 30,000 y 50,000, respectivamente

434. \$5066.70

435. \$6318.80

436. \$182.50

437. \$148.60

438. **a.** $C = 15{,}000 + 5x$
b. 75,000

439. **a.** 26.6°
b. 32°F

440. $(C+\frac{q}{100}C)\frac{p}{100}+(C+\frac{q}{100}C)$

441. **a.** $C\left(1-\frac{n}{k}\right)$
b. 3 años

442. **a.** $x = \frac{6.4}{12.8 - h}$
b. 6.6 metros

443. **a.** $x = \frac{1}{4}h : \frac{1}{4}$
b. $\frac{4}{3}\pi x^3$

444. 10 minutos

445. $6\frac{2}{13}$ min

446. 256 de cemento, 384 de arena y 512 de piedra

447. 1^{er} tren 48 km/h; 2^{o} tren 36 km/h

448. tren: 44km/h, barco 14 km/h

449. 18 y 24 km/h

450. 25 km/h

451. 21 hrs

452. La 1^{ra} vez sacaron 8 l, la 2^{da} 7l

453. 4 y 6 kg

454. $\dfrac{\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}-(a+10bc)}{20c}$

455. $v_1=\dfrac{125}{3}$; $v_2=\dfrac{50}{6}$

456. 5.33 l y 2.67 l

457. 30 gr de 60% y 30 gr de 55%

458. 3.33 l

459. 9.9 kg del colombiano y 20.01 del cubano

460. 16.66 litros

461. 1632

462. $\frac{5}{9}$ y $\frac{10}{9}$

463. 12, 8 y 7

464. A: 132 min; B: 110 min

465. Juan: $b+\sqrt{b(b-a)}$
Berta: $b-a+\sqrt{b(b-a)}$
Miguel: $\sqrt{b(b-a)}$

466. 8,4 y 2 o −6.4 , 11.2 y −19.6

467. a. $1
b. 900 kg

468. bote: 20 mi/h, corriente: 4 mi/h

469. 4.95 km

470. 239.83 km/h; 35.17 km/h

471. $14,677; 2.58%

472. 100 de a y 50 de b

Capítulo 5

1. $(-\infty, 5)$
2. $[-1, +\infty)$
3. $[2, 5)$
4. $[-100, -10]$
5. $(0, 3]$
6. $(-\infty, \frac{1}{2}]$
7. $\{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 5\}$
8. $\{x \in \mathbf{R} : -5 < x \leq 8\}$
9. $\{x \in \mathbf{R} : -3 \leq x \leq 1\}$
10. $\{x \in \mathbf{R} : 7 \leq x < 10\}$
11. $\{x \in \mathbf{R} : x < 7\}$
12. $\{x \in \mathbf{R} : 3 \leq x\}$
13. $\{x \in \mathbf{R} : x > 2\}$
14. $\{x \in \mathbf{R} : x < -2\}$

15. $\{x \in \mathbf{R} : -3 < x < 2 \vee 3 < x < 5\}$

16. $\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1\}$

17. $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 1 \vee 2 \leq x < 3\}$

18. $\{x \in \mathbf{R} : x < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} > x\}$

19. $\{x \in \mathbf{R} : \frac{3}{4} < x < 1 \vee 2 \leq x < 3\}$

20. $(\frac{9}{2}, +\infty)$

21. $(3, +\infty)$

22. $[-\frac{2}{3}, +\infty)$

23. $(-\infty, \frac{5}{2}]$

24. $(\frac{4}{3}, +\infty)$

25. $[0, +\infty)$

26. $[-2, \frac{-3}{2}]$

27. $(-1, 3]$

28. $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$

29. $[5, +\infty)$

30. $(-\infty, 30)$

31. $[-\frac{1}{7}, +\infty)$

32. $[4, +\infty)$

33. $(-3, 4)$

34. $(-\infty, -1)$

35. $[\frac{1}{5}, 1]$

36. $(-\infty, 2)$

37. $(-\infty, \frac{8}{9}]$

38. $(-\frac{1}{3}, \infty]$

39. $(-\infty, 1)$

40. $[0, 2]$

41. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

42. $[-\frac{2}{5}, 4]$

43. $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

44. $(-\infty, -1)$

45. $(-\infty, 3)$

46. $\mathbf{R} - \{7\}$

47. $(-\infty, -2)$

48. $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

49. $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, 1]$

50. $\emptyset$

51. $(-\infty, -2) \cup (\frac{4}{5}, +\infty)$

52. $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

53. $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{7}) \cup (\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

54. $[\frac{3\sqrt{5}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

55. $(-\infty, 0.5) \cup [0.75, +\infty)$

56. $(0, 2)$

57. $(0, \frac{1}{4})$

58. $(1, \frac{3}{2})$

59. $(-\infty, \frac{5}{14}) \cup (\frac{3}{8}, +\infty)$

60. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{9}{5}, +\infty)$

61. $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$

62. $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{12})$

63. $(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$

64. $(-\infty, -5) \cup [2, +\infty)$

65. $(-\infty, 5) \cup [22, +\infty)$

66. $(-\infty, -1) \cup [7, +\infty)$

67. $(-3, 15]$

68. $[-17, -6)$

69. $(-\infty, 1) \cup [8, +\infty)$

70. $(-1, 10]$

71. $[-9, 2)$

72. $(-\infty, -6) \cup [-5, +\infty)$

73. $(-\infty, 8] \cup (16, +\infty)$

74. $[-\frac{11}{2}, -2) \cup (5, +\infty)$
75. $[-4, -1) \cup (5, \infty)$
76. $(-2, -\frac{1}{3}] \cup (3, +\infty)$
77. $(-\infty, -\frac{17}{3}] \cup (-1, 6)$
78. $(2, \frac{43}{9}) \cup (7, \infty)$
79. $(-\infty, -2) \cup [-1, 2)$
80. $(-\infty, -5) \cup [1, 5)$
81. $(-\infty, -3) \cup [\frac{13}{5}, 4)$
82. $(-4, 0] \cup (4, +\infty)$
83. $(-\infty, 6) \cup [0, 3)$
84. $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
85. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$
86. $(-\infty, 1) \cup \{2\} \cup (3, +\infty)$
87. $(-\infty, -2) \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup (2, +\infty)$
88. $(-\infty, -2) \cup \{-1\} \cup (0, +\infty)$
89. $\{2\} \cup (6, 7)$
90. $(-\infty, -3) \cup \{-1\} \cup (4, +\infty)$
91. $(-\infty, -2) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$
92. $(-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$
93. $(-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup (1, +\infty)$
94. $(-2, 1) \cup \{3\}$
95. $\{0\} \cup (1, 2)$
96. $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
97. $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$
98. $(-1, +\infty)$
99. $\{2\} \cup (4, +\infty)$
100. $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
101. $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$
102. $(-\infty, -1) \cup \{4\}$
103. $\{0\} \cup (1, +\infty)$
104. $(-\infty, 1) \cup (1, 5)$
105. $(-\infty, -2) \cup (-2, 2)$
106. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$
107. $[2, 4]$
108. $[-4, 3]$
109. $[4, 5]$
110. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$
111. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$
112. $(-\infty, -9) \cup 0, \infty$
113. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
114. $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$
115. $[2, 9]$
116. $[1, \frac{10}{3}] \cup (\frac{7}{2}, 4)$
117. $[-3, 1) \cup [\frac{3}{2}, \frac{8}{3})$
118. $(-\infty, -2) \cup [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{9}{2}, +\infty)$
119. $(-5, -4) \cup [-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2})$
120. $[-5, \frac{4}{3}) \cup (2, 3]$
121. $(-\infty, -2) \cup [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) \cup [4, +\infty)$
122. $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup [-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}] \cup (-1, +\infty)$
123. $(-1, \frac{9}{2})$
124. $(1, 3) \cup (3, 5)$
125. $(-\infty, -5] \cup (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$
126. $(-\infty, -1) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$
127. $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$
128. $[3, \frac{7}{2})$
129. $(-\infty, 2) \cup [\frac{5}{3}, +\infty)$
130. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
131. $(-\infty, \frac{7}{3}] \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$
132. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
133. $(-3, 3]$
134. $(\frac{8}{3}, 4)$

135. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

136. $(1, +\infty)$

137. $(0, +\infty)$

138. $(-2, +\infty)$

139. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 5) \cup (5, +\infty)$

140. $(-\infty, +\infty)$

141. $[4, +\infty)$

142. $(-\infty, 0)$

143. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

144. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{4}{3}, +\infty)$

145. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [\frac{3}{2}, 4)$

146. $(-\infty, -1) \cup [\frac{2}{3}, 1)$

147. $[\frac{20}{9}, 4) \cup (5, +\infty)$

148. $(-1, 1)$

149. $(-\infty, -3) \cup (3, 5)$

150. $(2, +\infty)$

151. $(1, 2)$

152. $(2, +\infty)$

153. $[1, 2)$

154. $(2, +\infty)$

155. $[2, +\infty)$

156. $[2, +\infty)$

157. $[1, 2]$

158. $\emptyset$

159. $(1, 2]$

160. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, 4)$

161. $(-5, -2]$

162. $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [6, +\infty)$

163. $(-\frac{9}{2}, -4] \cup [2, +\infty)$

164. $(-2, -1] \cup [\frac{11}{2}, +\infty)$

165. $(-1, \frac{2}{5}]$

166. $(-3, \frac{5}{2}]$

167. $(1, 3]$

168. $(-7, -\frac{1}{3}] \cup [5, +\infty)$

169. $(-\infty, -\frac{1}{5}] \cup [1, 6)$

170. $(-\infty, -2)$

171. $(\frac{1}{2}, 5)$

172. $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

173. $(-\infty, \frac{4}{3}]$

174. $(-\infty, 3]$

175. $[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

176. $(3, +\infty)$

177. $(-\infty, \frac{5}{3})$

178. $(-\infty, -\frac{9}{10}) \cup (\frac{7}{30}, +\infty)$

179. $[-2, 4]$

180. $(-\infty, 0.6] \cup [6.4, +\infty)$

181. $[-5, 1]$

182. $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

183. $[2, 8]$

184. $(2, 6)$

185. $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$

186. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

187. $(-\infty, -\frac{81}{70}) \cup (\frac{3}{10}, +\infty)$

188. $(-\infty, \frac{1}{7}] \cup [3, +\infty)$

189. $[-\frac{2}{3}, \frac{8}{7}]$

190. $(-\infty, -4] \cup [-\frac{2}{7}, +\infty)$

191. $(-10, -6)$

192. $[-\frac{1}{3}, +\infty)$

193. $[\frac{7}{2}, +\infty]$

194. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

195. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, +\infty\right)$

196. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

197. $\left(-\frac{1}{5}, 3\right)$

198. $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right] \cup [4, +\infty)$

199. $\left(\frac{14}{5}, 3\right) \cup \left(3, \frac{10}{3}\right)$

200. $\left[-\frac{19}{4}, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}, -\frac{21}{16}\right]$

201. $\left[0, \frac{4}{7}\right]$

202. $\left(\frac{1}{7}, \frac{5}{8}\right)$

203. $\left(-\frac{23}{7}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, \frac{19}{13}\right)$

204. $\left[-\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 6\right]$

205. $\left(-\frac{114}{67}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{124}{33}\right)$

206. $\left[\frac{6}{17}, \frac{6}{19}\right]$

207. $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right]$

208. $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{6}{7}, +\infty\right)$

209. $\left[-\frac{5}{6}, \frac{1}{8}\right]$

210. $\left(-\frac{14}{3}, 0\right)$

211. $\left[0, \frac{10}{9}\right]$

212. $\left[-9, \frac{7}{3}\right]$

213. $\left(-\infty, -\frac{25}{2}\right) \cup \left(\frac{15}{4}, +\infty\right)$

214. $\left[-\frac{14}{3}, -\frac{12}{11}\right]$

215. $\left(-\frac{11}{4}, -\frac{3}{8}\right)$

216. $\left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}\right]$

217. $(-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$

218. $\left(-2, -\frac{3}{5}\right] \cup [5, +\infty)$

219. $(-\infty, 3)$

220. $\emptyset$

221. $\left[-\frac{11}{2}, -2\right) \cup \left(-2, -\frac{5}{6}\right]$

222. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

223. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{14}{3}, +\infty\right)$

224. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

225. $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty]$

226. $(-\infty, -7) \cup \left[-\frac{26}{7}, 16\right]$

227. $\left[-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right]$

228. $\left[-\frac{5}{3}, 3\right]$

229. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}\right)$

230. $\left(-\infty, -\frac{11}{5}\right] \cup \left[-\frac{7}{5}, +\infty\right)$

231. $\left(-\frac{17}{10}, -\frac{11}{6}\right)$

232. $\left[-7, \frac{5}{3}\right]$

233. $\left(-\infty, -\frac{13}{8}\right] \cup \left[-\frac{11}{6}, +\infty\right)$

234. $\left[-\frac{6}{7}, 2\right]$

235. $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

236. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

237. $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

238. $(-5, 5)$

239. $[-2, 2]$

240. $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$

241. $(-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$

242. $[-1, 1]$

243. $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

244. $(-3, 3)$

245. $(-6, 6)$

246. $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

247. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, 0\right) \cup (1, +\infty)$

248. $[-1, 2] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, +\infty\right]$

249. $\left(-1 - \sqrt{23}, -4\right) \cup (2, +\infty)$

250. $(-\infty, -8) \cup \left(-\frac{11}{2}, -2\right)$

251. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{4} + \frac{\sqrt{85}}{4}\right)$

252. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$

253. $(-\infty, 2]$

254. $(-3, 3) \cup (5, +\infty)$

255. $[-3, +\infty)$

256. $(-\infty, 0]$

257. $(-\infty, 5)$

258. $(2, 3) \cup (7, 8)$

259. $(-\infty, -\frac{11}{4}) \cup (-2, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$

260. $[-1, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{5}{2}]$

261. $(-\infty, -4) \cup (\frac{1}{3}, 2) \cup (\frac{15}{3}, +\infty)$

262. $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{3})$

263. $\emptyset$

264. $[0.5, 1] \cup [2.5, 3]$

265. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2) \cup (3, +\infty)$

266. $(-2, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, 3)$

267. $(-\infty, 2] \cup [1, 3] \cup [6, +\infty)$

268. $[1, 3] \cup [4, 5]$

269. $\emptyset$

270. $[-\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{7}{2}, 4]$

271. $(2, 4)$

272. $[-3, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 5]$

273. $(-\infty, -4) \cup (-\frac{3}{2}, 3) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$

274. $[-\infty, -3] \cup [-2, -\frac{1}{2}] \cup [4, +\infty)$

275. $(-\infty, -7) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$

276. $(-\infty, -5.5] \cup [-3.5, 0.5] \cup [3.5, +\infty)$

277. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) \cup (\frac{10}{3}, +\infty)$

278. $(-\infty, -1) \cup (\frac{11}{10}, \frac{10}{9})$

279. $[-\frac{7}{8}, -\frac{6}{7}] \cup [2, +\infty)$

280. $(-2, \frac{13}{14})$

281. $(-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [-\frac{5}{4}, 2]$

282. $[-\frac{8}{9}, 3]$

283. $(-3, \frac{3}{4}) \cup (\frac{4}{5}, +\infty)$

284. $(-\infty, 0) \cup (\frac{5}{4}, +\infty)$

285. $[\frac{5}{4}, 1]$

286. $(-1, +\infty)$

287. $(-\infty, -3]$

288. $[-\frac{2}{3}, \frac{47}{3}]$

289. $(-\frac{27}{4}, -\frac{1}{2}]$

290. $(3, +\infty)$

291. $[0, 3]$

292. $[-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}) \cup (0, +\infty)$

293. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \frac{9}{10}]$

294. $(0, \infty)$

295. $(\frac{9}{7}, \infty)$

296. $(-\infty, 0]$

297. $(-\infty, 1]$

298. $[-\frac{4}{5}, 0] \cup [1, +\infty)$

299. $(-\infty, 1] \cup [2, \frac{7}{3}]$

300. $[-\frac{7}{2}, 1)$

301. $[-\frac{4}{3}, \frac{1}{6}]$

302. $(-\infty, 3]$

303. $[-\frac{7}{6}, -1)$

304. $[\frac{3}{4}, 3]$

305. $[\frac{5}{2}, 7)$

306. $(-\infty, \frac{4}{3}]$

307. $(1, \frac{11}{2}]$

308. $(-\infty, 0)$

309. $[3, +\infty)$

310. $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

311. $\left[-3, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[1, \frac{7}{3}\right]$

312. $(-1, 4)$

313. $[0, 2) \cup (9, +\infty)$

314. $(3, +\infty)$

315. $(-\infty, 2) \cup [10, +\infty)$

316. $(1, 6)$

317. $(-1, 5)$

318. $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$

319. $(1, +\infty)$

320. $(-1, 1)$

321. $\emptyset$

322. $[1, +\infty)$

323. $[-1, 1]$

324. $[1, +\infty)$

325. $(1, +\infty) \cup \{-1\}$

326. $[1, +\infty)$

327. $[-1, 1)$

328. $(-1, 1]$

329. $[4, 5] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$

330. $\left[\frac{1}{2}, 4\right] \cup \{6\}$

331. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{-5\}$

332. $\left[-6, -\frac{3}{2}\right] \cup \{1\}$

333. $\{-1\} \cup \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

334. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [2, 4]$

335. $\{-7\} \cup \{1\}$

336. $\left[-1, \frac{5}{2}\right] \cup \{4\}$

337. $\{-1\} \cup \left[\frac{5}{2}, 5\right]$

338. $[-10, -4] \cup \{3\}$

339. $[5, 6)$

340. $[1, 2)$

341. $\left(-\frac{22}{3}, -6\right]$

342. $\left[\frac{7}{2}, 4\right)$

343. $\left[2, \frac{7}{2}\right)$

344. $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$

345. $\left[1, \frac{3}{2}\right)$

346. $[2, 3]$

347. $\left(-6, -\frac{11}{2}\right]$

348. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right]$

349. $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

350. $\left(-\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right] \cup \{1\}$

351. $(-13, -1] \cup [2, \infty)$

352. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

353. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$

354. $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup [-1, 2]$

355. $(-\infty, -1] \cup [2, 4]$

356. $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{22}{3}\right]$

357. $\left[-\frac{14}{5}, -1\right] \cup \left[-\frac{4}{5}, \infty\right)$

358. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$

359. $(-\infty, -4] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

360. $\left[\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{101}}{2}, \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{101}}{2}\right]$

361. $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

362. $[-2, 3]$

363. $\left[-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right]$

364. $\left[-3, \frac{5}{2}\right]$

365. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

366. $\left[-1, \frac{7}{2}\right]$

367. $(-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

368. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$

369. $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$

370. $(-\infty, -2)$

371. $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$

372. $\left(-\frac{16}{7}, -2\right] \cup \left[-\frac{1}{7}, 0\right)$

373. $\left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[2, \frac{7}{3}\right]$

374. $\left[-\frac{5}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$

375. $\left[\frac{8}{9}, \infty\right)$

376. $[2, 3] \cup [6, 7]$

377. $[-7, -3) \cup (2, 6]$

378. $[1, 5) \cup (5, 9]$

379. $[-5, 4) \cup (11, 20]$

380. $\left[-\frac{9}{2}, -4\right) \cup \left(8, \frac{17}{2}\right]$

381. $[2, 3) \cup (11, 12]$

382. $[-27, -18] \cup [-2, 7]$

383. $[-10, -1) \cup (-1, 8]$

384. $[-3, 1] \cup [22, 26]$

385. $\left[-\frac{10}{3}, 2\right) \cup \left(5, \frac{31}{3}\right]$

386. $(6, \infty)$

387. $x \in \phi$

388. $x > 3$

389. $x > \frac{305}{162}$

390. $x \in \phi$

391. $\frac{4}{5} < x < \frac{7}{6}$

392. $-\frac{839}{127} < x < -\frac{7}{2}$

393-396. Si $x,\ y \in \boldsymbol{R}$ entonces pueden ocurrir 4 situaciones:

1. $x < 0$ y $y < 0$
2. $x \geq 0$ y $y \geq 0$
3. $x < 0,\ y \geq 0$ y $x + y < 0$
4. $x < 0,\ y \geq 0$ y $x + y \geq 0$

En el caso 1 tenemos:

$|x| = -x,\ |y| = -y,\ |x + y| = -(x + y)$

entonces $|x + y| = |x| + |y|$

En el caso 2 tenemos:

$|x| = x,\ |y| = y,\ |x + y| = x + y$

entonces $|x + y| = |x| + |y|$

En el caso 3 tenemos:

$|x| = -x,\ |y| = y,\ |x + y| = -(x + y)$

entonces $|x + y| - (|x| + |y|) = -x - y - (-x + y) =$

$-x - y + x - y = -2y \leq 0$ y deducimos que

$|x + y| \leq |x| + |y|$

En el caso 4 tenemos:

$|x| = -x,\ |y| = y,\ |x + y| = x + y$

entonces $|x + y| - (|x| + |y|) = x + y - (-x + y) =$

$x + y + x - y = 2x < 0$ y deducimos que

$|x + y| < |x| + |y|$

Entonces, la desigualdad se cumple para cualquier $x,\ y \in \boldsymbol{R}$.

397. $m < -2$ o $m > 1$

398. $x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

399. $x \geq 2$

400. $x \in (0, 3)$

401. $x \in (-\infty, -3] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

402. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

403. $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(+\frac{2}{3}, +\infty\right)$

404. $x \in (1, 2)$

405. $x \in (-3, 1)$

406. $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$

407. $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$

408. $\{x \in Z : -2 \leq x \leq 3\}$

409. $257° \leq F \leq 347°$

410. sea x el número de unidades que debe producir y vender $80x \geq 15{,}000 + 30x$, donde $x \geq 300$

411. debe ser mayor de 1920

412. $11 \leq a \leq 16$, a es el ancho y A el área, $385 \leq A \leq 790$

413. entre 10 y 12 kg

414. 12 ganan entre 1550 y 2100 y 3 ganan entre 3350 y 4450

415. entre 65 y 97

416. a. $p \leq 0.9mt$
b. $15 \leq h \leq 30$

417. $\frac{4}{3} \leq y \leq 3$

Capítulo 6

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\csc\theta = \frac{5}{3}$

2. $\operatorname{sen}\theta = \frac{7}{25}$; $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$; $\cot\theta = \frac{24}{7}$; $\sec\theta = \frac{25}{24}$; $\csc\theta = \frac{25}{7}$

3. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\theta = \frac{1}{4}$; $\tan\theta = \sqrt{15}$; $\cot\theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$; $\sec\theta = 4$; $\csc\theta = \frac{4\sqrt{15}}{15}$

4. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cot\theta = 2\sqrt{2}$; $\sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\csc\theta = 3$

5. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{3}}{13}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\tan\theta = \frac{3}{2}$; $\cot\theta = \frac{2}{3}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

6. $y = 1$, $x = \sqrt{3}$

7. $y = 2$, $x = 2\sqrt{2}$

8. $y = \sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$

9. $y = 2\sqrt{2}$, $x = 2$

10. $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{3}{2}$

11. $\frac{xy}{49}$

12. $\frac{y^2}{7x}$

13. $(\frac{y}{x})^2$

14. 1

15. $\frac{49}{y^2}$

16. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}, \tan\alpha = \frac{5\sqrt{39}}{39}, \cot\alpha = \frac{\sqrt{39}}{5},$

$\sec\alpha = \frac{8\sqrt{39}}{39}, \csc\alpha = \frac{8}{5}$

17. $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \tan\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7}, \cot\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8},$

$\sec\alpha = \frac{7}{9}, \csc\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{8}$

18. $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}, \cot\alpha = \frac{4}{3},$

$\sec\alpha = \frac{5}{4}, \csc\alpha = \frac{5}{3}$

19. $\text{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos\alpha = \frac{1}{3}, \tan\alpha = 2\sqrt{2},$

$\cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \csc\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

20. $\text{sen}\alpha = \frac{2}{5}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21},$

$\cot\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}, \sec\alpha = \frac{5\sqrt{21}}{21}$

30. $\frac{\text{sen}t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\text{sen}t}$

$\text{sen}^2 t = (1+\cos t)(1-\cos t)$

$\text{sen}^2 t = 1-\cos^2 t$

$\text{sen}^2 t = \text{sen}^2 t$

31. $\frac{1}{\tan t + \cot t} = \frac{1}{\frac{\text{sen}t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\text{sen}t}} =$

$\frac{1}{\frac{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}{\text{sen}t + \cos t}} = \text{sen}t\cos t$

32. $\frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{\text{sen}^2 t}{\cos t} = \frac{\text{sen}t\text{sen}t}{\cos t} = \text{sen}t\tan t$

33. $\cos^4\alpha - sen^4\alpha = (\cos^2\alpha)^2 - (sen^2\alpha)^2 =$

$(\cos^2\alpha - sen^2\alpha)(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) =$

$\cos^2\alpha - sen^2\alpha$

34. $\cos\alpha + \cos 7\alpha + \cos 6\alpha + \cos 2\alpha =$

$(\cos\alpha + \cos 7\alpha) + (\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) =$

$2\cos 4\alpha\cos 3\alpha + 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha =$

$2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos 2\alpha) =$

$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$

35. $\text{sen}9\beta + \text{sen}10\beta + \text{sen}11\beta + \text{sen}12\beta =$

$(\text{sen}9\beta + \text{sen}12\beta) + (\text{sen}10\beta + \text{sen}11\beta) =$

$2\text{sen}\frac{21\beta}{2}\cos\frac{3\beta}{2} + 2\text{sen}\frac{21\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$

$2\text{sen}\frac{21}{2}\beta\left(\cos\frac{3\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right) =$

$4\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta\text{sen}\frac{21}{2}\beta$

36. $\text{sen}4\alpha - \text{sen}5\alpha - \text{sen}6\alpha + \text{sen}7\alpha =$

$(\text{sen}4\alpha + \text{sen}7\alpha) - (\text{sen}5\alpha + \text{sen}6\alpha) =$

$2\text{sen}\frac{11}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha - 2\text{sen}\frac{11}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} =$

$2\text{sen}\frac{11}{2}\alpha(\cos\frac{3}{2}\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}) =$

$-4\text{sen}\frac{\alpha}{2}\text{sen}\alpha\text{sen}\frac{11\alpha}{2}$

37. $(\text{sen}\alpha)^{-1} + (\tan\alpha)^{-1} = \frac{1}{\text{sen}\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} =$

$\frac{1}{\text{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} =$

$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2}$

38. $\cos 4\alpha - \text{sen}4\alpha\cot 2\alpha =$

$\cos 4\alpha - \text{sen}4\alpha\frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}2\alpha} =$

$\cos 4\alpha - \frac{2\text{sen}2\alpha\cos^2 2\alpha}{\text{sen}2\alpha} =$

$\cos 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha =$

$\cos 4\alpha - 2\frac{1+\cos 4\alpha}{2} = -1$

39. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha - 1} + \dfrac{1-\cos 4\alpha}{\operatorname{sen}^{-2}2\alpha - 1} =$

$\dfrac{\cos^2 2\alpha(1-\cos 4\alpha)}{1-\cos^2 2\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}^2 2\alpha(1+\cos 4\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2 2\alpha} =$

$\dfrac{1+\dfrac{\cos 4\alpha}{2}(1-\cos 4\alpha)}{1-\dfrac{1+\cos 4\alpha}{2}} +$

$\dfrac{1-\dfrac{\cos 4\alpha}{2}(1+\cos 4\alpha)}{1-\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2}} =$

$\dfrac{(1+\cos 4\alpha)(1-\cos 4\alpha)}{1-\cos 4\alpha} +$

$\dfrac{(1-\cos 4\alpha)(1+\cos 4\alpha)}{1+\cos 4\alpha} =$

$1+\cos 4\alpha + 1 - \cos 4\alpha = 2$

48. $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \dfrac{1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} =$

$\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)-\operatorname{sen} x}$

pero,

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)+\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-x) =$

$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)-\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)\cos\frac{\pi}{4} =$

$\sqrt{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x)$ y,

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-x) = \operatorname{sen}[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x)] =$

$\cos(\frac{\pi}{4}+x)$

$\cos(\frac{\pi}{4}-x) = \cos[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x)] =$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)$

entonces:

$\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+x)}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)} = \tan(\frac{\pi}{4}+x)$

60. $-\frac{3}{4}$

61. $\dfrac{12\sqrt{3}-13}{3\sqrt{2}+2}$

62. 1

63. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

64. -6

65. 0

66. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

67. $1+\sqrt{3}$

68. $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

69. 0

70. $2\cos 21°$

71. 0

72. 0

73. $-\tan t$

74. $-\operatorname{sen} x$

75. $-\tan x$

76. 1

77. 1

78. 1

79. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

80. $\dfrac{1}{2}$

81. $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

82. $\begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 1 \\ x^2 + 48 < 14x \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ 6 < x < 8 \end{cases}$

Respuesta: $x = \frac{5\pi}{2}$

83. $\begin{cases} \tan \frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 10x + 24 < 0 \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ -6 < x < -4 \end{cases}$

Aplicando varios valores para k observamos que ningún x satisface el sistema.

Respuesta: $\varnothing$

84. $\begin{cases} \tan 2x = \sqrt{3} \\ x^2 + 15 < 8x \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z} \\ 3 < x < 5 \end{cases}$

Respuesta: $x = \frac{7\pi}{6}$.

85. $\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 1 \\ x^2 + 14x + 13 < 0 \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = 4\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ -13 < x < 1 \end{cases}$

Observamos que el único valor de k para el cual x satisface el sistema es $k = -1$.

Respuesta: $x = -4\pi$.

86. $\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ x^2 + 77 < 18x \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z} \\ -11 < x < -7 \end{cases}$

Observamos que el sistema es válida para

$x = -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{11\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}\ (k = -5; -6; -7)$

Respuesta: $x = -\frac{9\pi}{4}$;

$x = -\frac{11\pi}{4}$; $x = -\frac{13\pi}{4}$.}

87. $\begin{cases} \operatorname{sen} \frac{x}{3} = 0 \\ x^2 + 17x + 70 < 0 \end{cases}$

El sistema dado es equivalente a

$\begin{cases} x = 3\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ -10 < x < -7 \end{cases}$

Entonces tenemos $x = -3\pi (k = -1)$

Respuesta: $x = -3\pi$

88. Sí

89. No

90. No

91. Sí

92. Sí

93. Sí

94. Sí

95. No

96. $\operatorname{sen}^2 \alpha$

97. $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \pi$ y $\alpha \neq 2\pi$;

98. $\tan^2\alpha; \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ y $\alpha \neq 3\frac{\pi}{2}$

99. $\frac{1}{\cos^2\alpha}; \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ y $\alpha \neq 3\frac{\pi}{2}$

100. Tenemos $\tan(\frac{\pi}{4} - x) =$

$\tan\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + x)\right] = \cot(\frac{\pi}{4} + x)$

y finalmente $\cot(\frac{\pi}{4} + x)\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 1$.

101. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

102. $-\frac{1}{2}$

103. $\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$

104. $\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}$

105. $\sqrt{3}$

106. $-\frac{1}{2}$

107. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

108. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

109. $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$, $\tan\beta = -\sqrt{3}$ o

$\operatorname{sen}\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\alpha = -\sqrt{3}$, $\tan\beta = \sqrt{3}$

110. $-\frac{15}{28}$

111. $\frac{1}{2}(-p^4 + 2p^2 + 1)$

112. 7

113. a. $\sqrt{0.19}$

b. $\frac{\sqrt{19}}{9}$

c. $\frac{9\sqrt{19}}{19}$

d. $-\sqrt{19}$

e. $-\sqrt{19}$

f. $-\frac{9\sqrt{19}}{19}$

g. $\frac{\sqrt{19}}{9}$

114. a. $-\sqrt{0.91}$

b. $\frac{3\sqrt{91}}{91}$

c. $\frac{\sqrt{91}}{3}$

d. $\sqrt{0.91}$

e. 0.3

f. $\sqrt{0.91}$

g. $\frac{\sqrt{91}}{3}$

h. $-\frac{3\sqrt{91}}{91}$

115. $-\frac{3}{8}$

116. $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ o $\frac{\sqrt{7}}{2}$;

117. $\frac{11}{16}$

118. $\frac{23}{32}$

119. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$;

$\cos\alpha = \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{m}$

120. $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ o $x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

121. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

si cumple: $\cos 3x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$

122. $x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ o $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $k \in Z$

123. $x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ o $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$; $k \in Z$

124. $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ o $x = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$; $k \in Z$

125. $x = k\pi; k \in Z$

126. $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$ o $x = -\frac{1}{3}\pi + k\pi; k \in Z$

127. $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi; k \in Z$

128. $x = \pi - 2k\pi$ o $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; k \in Z$

129. $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$ o $x = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$; $k \in Z$

130. $x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ o $x = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$; $k \in Z$

131. $x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$; $k \in Z$

132. Aplicando la formula:

$\text{sen}4x = 2\text{sen}2x\cos 2x = 4\text{sen}x\cos x\cos 2x$

tenemos: $4\text{sen}x\cos 2x(\text{sen}3x - \cos x) = 0$

ahora: $\text{sen}3x - \cos x = \text{sen}3x - \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$

$= 2\text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{3})$ finalmente:

$\text{sen}x\cos 2x\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

133. $x = k\pi$; $x \in Z$

134. $x = k\pi$; $x \in Z$

135. $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi; x \in Z$

136. $x = -\frac{2}{3}\pi + 4k\pi; x \in Z$

137. $x = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$; $k \in Z$

138. $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ o $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; k \in Z$

139. $x = \frac{1}{12}\pi + 2k\pi$ o $x = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi$; $k \in Z$

140. $x \in \mathbf{R}$

141. $\text{sen}x - \text{sen}2x = 0.$

Aplicando la fórmula (24) al segundo término tenemos $\text{sen}x - 2\text{sen}x\cos x = 0$, y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\text{sen}x = 0$ y

(2) $(1 - 2\cos x) = 0.$

De la primera tenemos: $x = \pi k$ y de la segunda: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

142. $2\text{sen}^2 x - \text{sen}x = 0.$

Al factorizar $\text{sen}x$ tenemos:

$\text{sen}x(2\text{sen}x - 1) = 0$, y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\text{sen}x = 0$ y

(2) $\text{sen}x = d\ 1/2$

De la primera tenemos: $x = \pi k$ y de la segunda: $x = (-1)\frac{\pi}{6} + \pi k.$

Respuesta: $x = \pi k$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$

143. $2\cos x - \text{sen}2x = 0.$

Observamos que $\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cos x$ y factorizando $\cos x$ tenemos:

$2\cos x(1 - \text{sen}x) = 0$, y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $\text{sen}x = 1$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

144. $\tan^2 x - \tan x = 0.$

Al factorizar $\tan x$ tenemos: $\tan x(\tan x - 1) = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\tan x = 0$ y (2) $\tan x = 1$

De la primera ecuación tenemos $x = \frac{\pi}{k}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

145. $\cos2x\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x = 5\cos2x + 5$.
Factorizando $\operatorname{sen}x$ en el término derecho y 5 en el término izquierdo tenemos $\operatorname{sen}x(\cos2x + 1) = 5(\cos2x + 1)$. Volviendo a factorizar la ecuación obtenemos $(\cos 2x + 1)(\operatorname{sen}x - 5) = 0$. A su vez, esta ecuación se reduce a las dos siguientes:
(1) $\cos2x = -1$ y
(2) $\operatorname{sen}x - 5 = 0$
De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y la segunda ecuación no tiene solución.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

146. $\sqrt{3}\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x = 0$.
Al aplicar la fórmula (24) al $\operatorname{sen}2x$ tenemos: $\operatorname{sen}2x = 2\cos x\operatorname{sen}x$ y la ecuación se reduce a $\sqrt{3}\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}x\cos x = 0$. Al factorizar $\operatorname{sen}x$ tenemos: $\operatorname{sen}x(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0$. A su vez, esta ecuación se reduce a dos siguientes:
(1) $\operatorname{sen}x = -1$ y
(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
De la primera ecuación tenemos $x = \pi k$ y de la segunda $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$
Respuesta : $x = \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

147. $5\cos x = \operatorname{sen}2x$.
Aplicando la fórmula (24) a $\operatorname{sen}2x$ y después factorizando $\cos x$ tenemos $\cos x(5 - 2\operatorname{sen}x) = 0$. Y la ecuación se reduce a dos siguientes:
(1) $\cos x = 0$ y
(2) $5 - 2\operatorname{sen}x = 0$
De la primera ecuación tenemos $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y la segunda ecuación no tiene solución.
Respuesta : $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

148. $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = -1$.
Observamos que $\operatorname{sen}^2 3x = 1 - \cos^2 3x$, entonces la ecuación se reduce a $\cos^2 3x = 0$. Tenemos $\cos3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$.

149. $\cos3x = \frac{1}{3}\cos^2 3x$.
Factorizando $\cos3x$ tenemos: $\cos3x(1 - \frac{1}{3}\cos3x) = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:
(1) $\cos3x = 0$ y
(2) $\frac{1}{3}\cos3x = 1$.
De la primera ecuación tenemos $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, y la segunda ecuación no tiene solución.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

150. $2\operatorname{sen}x\cos x + 4\cos x = \operatorname{sen}x + 2$.
Al agrupar los términos y factorizando $\cos x$ y -1 obtenemos: $2\cos x(\operatorname{sen}x + 2) - (\operatorname{sen}x + 2) = 0$. Al factorizar $\operatorname{sen}x + 2$ obtenemos $(\operatorname{sen}x + 2)(2\cos x - 1) = 0$ y la ecuación se reduce a dos siguientes:
(1) $\operatorname{sen}x = -2$ y
(2) $\cos x = \frac{1}{2}$
La primera ecuación no tiene solución y de la segunda tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.
Respuesta : $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

151. $\cos x + \operatorname{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) = 0$.
Observamos que $\operatorname{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) = \cos3x$. Entonces la ecuación dada se reduce a $\cos x + \cos3x = 0$. Aplicando la fórmula (32) tenemos: $\cos2x\cos x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:
(1) $\cos2x = 0$ y
(2) $\cos x = 0$.
De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

152. $\operatorname{sen}2x + \cos(3x + \frac{\pi}{2}) = 0$.
Aplicando que $\cos(3x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}3x$ obtenemos $\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}3x = 0$. Según la fórmula (31) la ecuación se reduce a $2\cos d\ \frac{5x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$ y la ecuación resultante se reduce a su vez a las dos ecuaciones siguientes:
(1) $\cos\frac{5x}{2} = 0$ y
(2) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$.
De la primera ecuación tenemos $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$ y de la segunda: $\frac{x}{2} = \pi k$ o $x = 2\pi k$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = 2\pi k$

153. $\text{sen}x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$.

Observamos que $\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \text{sen}2x$, entonces tenemos: $\text{sen}x + \text{sen}2x = 0$ o según la fórmula (30) $\text{sen}x + \text{sen}2x = 2\cos\frac{x}{2}\text{sen}\frac{3x}{2}$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos\frac{x}{2} = 0$ y

(2) $\text{sen}\frac{3x}{2} = 0$

De la primera ecuación tenemos: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \pi + 2\pi k$ y de la segunda: $\frac{3x}{2} = \pi k$ o $x = \frac{2\pi k}{3}$

Respuesta: $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi k}{3}$

154. $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \text{sen}4x = 0$.

Tomando en cuenta que $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}x$ tenemos $-\text{sen}x + \text{sen}4x = 0$ y según la fórmula (31) la ecuación se reduce a $2\cos\frac{4x+x}{2}\text{sen}\frac{4x-x}{2} = 0$. Entonces tenemos las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos\frac{5x}{2} = 0$

$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$

(2) $\text{sen}\frac{3x}{2} = 0$

$\frac{3x}{2} = \pi k$

$x = \frac{2\pi k}{3}$

Respuesta: $x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x_2 = \frac{2\pi k}{3}$

155. $\text{sen}(x + \frac{5\pi}{2}) + \cos3x = 0$.

Tomando en cuenta que $\text{sen}(x + \frac{5\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ tenemos: $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) + \cos3x = 0$. A su vez, esta ecuación se reduce a $\cos x + \cos3x = 0$. Aplicando la fórmula (32) obtenemos: $2\cos\frac{4x}{2}\text{sen}\frac{2x}{2} = 0$. La ecuación resultante es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos2x = 0$ y

(2) $\cos x = 0$.

De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

156. $\text{sen}(\frac{7\pi}{2} - x) - \cos4x = 0$.

Observamos que $\text{sen}(\frac{7\pi}{2} - x) = \text{sen}(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$, obtenemos: $-\cos x - \cos4x = 0$. Aplicando la fórmula (32) obtenemos: $2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$. La ecuación resultante se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos\frac{5x}{2} = 0$ y

(2) $\cos\frac{3x}{2} = 0$

De la primera ecuación tenemos: $\frac{5x_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, y de la segunda: $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$

157. $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \text{sen}\frac{x}{2} = 0$.

Reemplazando $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}x$ y aplicando la fórmula (31) tenemos: $\cos\frac{3x}{4}\text{sen}\frac{x}{4} = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos\frac{3x}{4} = 0$ y

(2) $\text{sen}\frac{x}{4} = 0$

De la primera ecuación tenemos: $\frac{3x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}$, y de la segunda: $\frac{x}{4} = \pi k$ o $x = \frac{4\pi}{k}$.

Respuesta: $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}$, $x = 4\pi k$

158. $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2x) + \cos3x = 0$.

Como $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2x) = \cos2x$ tenemos la siguiente ecuación $\cos2x + \cos3x = 0$. Aplicando la fórmula (32) obtenemos: $2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos\frac{5x}{2} = 0$ y

(2) $\cos\frac{x}{2} = 0$

De la primera ecuación tenemos $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, y de la segunda $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \pi + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \pi + 2\pi k$

159. $\cos 2(x - \frac{\pi}{2}) + \cos 2x = 0$.

Reemplazando $\cos 2(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x$ tenemos: $-\cos 2x + \cos 2x = 0$. Es decir $0 = 0$.

Respuesta: $x \in R$

160. $\cos 4x + \operatorname{sen} 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

La ecuación dada es equivalente a $\cos 4x + \cos 3x = 0$. Aplicando la fórmula (32) obtenemos: $2\cos\frac{4x + 3x}{2}\cos\frac{4x - 3x}{2} = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos\frac{7x}{2} = 0$ y

(2) $\cos\frac{x}{2} = 0$

De la primera tenemos que $\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$ y de la segunda: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \pi + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$, $x = \pi + 2\pi k$

161. $\operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(3x + \pi) = 0$.

Observamos que $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(3x + \pi) = -\cos 3x$, entonces tenemos: $-\operatorname{sen} x - \cos 3x = 0$. Reemplazamos $\operatorname{sen} x$ por $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ y aplicando la fórmula (32) tenemos $\cos(\frac{\pi}{4} + x)\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$. La ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes

(1) $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = 0$ y

(2) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera tenemos que $\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ y de la segunda: $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$.

162. $\operatorname{sen} 3(x - \frac{\pi}{2}) + \cos 2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

Simplificando la ecuación y aplicando la fórmula (32) obtenemos:

$\cos\frac{\frac{5x + \pi}{2}}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera ecuación tenemos $\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, y de la segunda: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

163. $\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi - x) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

Simplificando la ecuación y aplicando la fórmula (32) tenemos $\operatorname{sen}(2x - \frac{3\pi}{4})\operatorname{sen}(x - \frac{3\pi}{4}) = 0$. La ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\operatorname{sen}(2x - \frac{3\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}(x - \frac{3\pi}{4}) = 0$

De la primera ecuación tenemos que $x_1 = \frac{\pi}{2k} + \frac{3\pi}{8}$ y de segunda: $x = \pi k + \frac{3\pi}{4}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2}k + \frac{3\pi}{8}$, $x = \pi k + \frac{3\pi}{4}$

164. $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2x) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 0$.

Simplificando la ecuación y aplicando la fórmula (32) tenemos: $\cos(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4})\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}) = 0$. La ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}) = 0$, y

(2) $\cos(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4}) = 0$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ y de la segunda: $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

165. $\operatorname{sen}(7\pi + x) + \cos(4x - \pi) = 0$.

Observemos que $\operatorname{sen}(7\pi + x) = \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(4x - \pi) = -\cos 4x$ entonces tenemos: $\operatorname{sen} x + \cos 4x = 0$ o $\operatorname{sen} x$

$+\ \mathrm{sen}(4x + \frac{\pi}{2}) = 0$. Aplicando la fórmula (30) tenemos: $2\mathrm{sen}(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$ y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\mathrm{sen}(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$, y

(2) $\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera ecuación tenemos $\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k$ y de la segunda: $\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

166. $\mathrm{sen}7(\frac{\pi}{2} - x) + \cos 3(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

Observamos que $\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{2} - 7x) = \mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2} - 7x) = -\cos 7x$, entonces tenemos: $-\cos 7x + \cos(3x - \frac{3\pi}{2}) = 0$ y aplicando la fórmula (33) tenemos:

$$2\mathrm{sen}\,\frac{10x - \frac{3\pi}{2}}{2}\ \mathrm{sen}\,\frac{4x + \frac{3\pi}{2}}{2} = 0$$

La ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\mathrm{sen}(5x - \frac{3\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\mathrm{sen}(2x + \frac{3\pi}{4}) = 0$

De la primera tenemos $x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k$ y de la segunda: $x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$

Respuesta: $x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k$, $x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$.

167. $\mathrm{sen}2(x + \frac{\pi}{2}) + \mathrm{sen}2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

La ecuación se reduce a: $2\mathrm{sen}2x = 0$, donde $2x = \pi k$ o $x = \frac{\pi}{2}k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2}k$

168. $\cos(4x + \pi) + \mathrm{sen}2(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

La ecuación dada es equivalente a $\cos 4x + \mathrm{sen}2x = 0$ o $\cos 4x + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0$. Al aplicar la fórmula (32) tenemos:

$$2\cos\frac{4x - 2x - \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{4x - 2x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

La ecuación dada es equivalente a las dos siguientes:

(1) $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera tenemos $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k$ y de la segunda tenemos $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

169. $\cos 4(x + \frac{\pi}{4}) - \mathrm{sen}(x - \pi) = 0$.

La ecuación dada es equivalente a

$\cos 4x - \mathrm{sen}x = 0$ o

$\cos 4x + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 0$.

Al aplicar la fórmula (32) obtenemos

$$2\cos\frac{5x + \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{3x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

La ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$ y (2) $\cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera tenemos: $\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ y de la segunda: $\frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$

170. $\cos 5(x + \frac{\pi}{2}) + \mathrm{sen}3(x + \frac{\pi}{2}) = 0$.

La ecuación dada es equivalente a $\cos(5x + \frac{5\pi}{2}) + \mathrm{sen}(3x + \frac{3\pi}{2}) = 0$. Tomando en cuenta que $\cos(5x + \frac{5\pi}{2}) = \cos(5x + \frac{\pi}{2})$ y $\mathrm{sen}(3x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos 3x$ tenemos: $\cos(5x + \frac{\pi}{2}) - \cos 3x = 0$. Al aplicar la fórmula (33) $\mathrm{sen}(4x + \frac{\pi}{4})\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\mathrm{sen}(4x + \frac{\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera: $4x + \frac{\pi}{4} = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; y de la segunda: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

171. $\cos x + \mathrm{sen}x = 1$.

Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La ecuación es equivalente a

$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\mathrm{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o según la fórmula (18) $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}$

Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}$

172. $\cos 4x = \operatorname{sen}4x + 1$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o sen $\frac{\pi}{4}\cos 4x - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{4x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - 4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces $(\frac{\pi}{4} - 4x) = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k$
Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4k}$

173. $-\cos x + \operatorname{sen}x = 1$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
La ecuación resultante es equivalente a $\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o
$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k + \frac{\pi}{4}$
Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k$

174. $-\cos x = \operatorname{sen}x + 1$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\frac{\pi}{4} + x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$ o
$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k$.
Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k$.

175. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces
$\frac{\pi}{3} + x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$
$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi k$
Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi k$

176. $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x = -1$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$.
La ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$, según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} - x) = -\frac{1}{2}$.
Entonces $\frac{\pi}{6} - x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$,
al despejar x tenemos
$x = -(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \pi k + \frac{\pi}{6}$ o
$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \pi k$
Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \pi k$

177. $\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.
La ecuación resultantes equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x = 1$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + x) = 1$ o
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

178. $\cos 2x + \operatorname{sen}2x = \sqrt{2}$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}2x = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.
La ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}2x = 1$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + 2x) = 1$, donde $\frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ o $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$.

179. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{2} + \cos\frac{x}{2}$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La ecuación resultante es equivalente a $\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2} = 1$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1$, donde $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ o $x = \frac{3\pi}{2} + 4\pi k$.
Respuesta: $x = \frac{3\pi}{2} + 4\pi k$.

180. $\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\sqrt{2}$.
La ecuación dada es equivalente a $\cos x - \operatorname{sen}x = -\sqrt{2}$, multiplicando la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos
$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ y

la ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x = -1$, según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) = -1$, donde $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ o $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Respuesta: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

181. $2\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \operatorname{sen}x = 2$.

La ecuación dada es equivalente a $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = 2$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x = 2 \times \frac{1}{2}$ y la ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x = 1$, según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + x) = 1$ o $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

182. $\sqrt{3}\cos x - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x = 2$.

La ecuación dada es equivalente a $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen}x = 2$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x = 1$, y la ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x = 1$, o según la fórmula (18): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - x) = 1$, donde $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

183. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}(\pi + x) = \sqrt{2}$.

La ecuación dada es equivalente a $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen}x = \sqrt{2}$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y la ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $x - \frac{\pi}{3} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi k$.

184. $\sqrt{3}\cos(\pi - x) + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}$.

La ecuación dada es equivalente a $-\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \sqrt{2}$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos: $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y la ecuación resultante es equivalente a $\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi k$.

185. $\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = -\sqrt{2}$.

Al aplicar la fórmula (32) obtenemos $\cos\frac{\pi}{4}\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o la ecuación es equivalente a $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$, donde $2x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$ o $x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$.

186. $\cos(-2x) + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, la ecuación dada es equivalente a $\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, multiplicandola por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(2x) = -\frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos(2x) - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(2x) = -\frac{1}{2}$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - 2x) = -\frac{1}{2}$, donde $2x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ o $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$.

Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$.

187. $\cos(\pi - 2x) + \operatorname{sen}2x = -\sqrt{2}$, la ecuación dada es equivalente a $-\cos 2x + \operatorname{sen}2x = -\sqrt{2}$, multiplicándola por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = -1$ o $\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 2x = -1$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$, donde $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ o $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$.

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$.

188. $\cos(3x - \pi) + \operatorname{sen}3x = -1$, la ecuación dada es equivalente a $-\cos 3x + \operatorname{sen}3x = -1$, multiplicándola por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o podemos escribir $\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$.

Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$.

189. $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = -1$, la ecuación dada es equivalente a $\cos 3x - \operatorname{sen}3x = -1$, multiplicándola por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o podemos escribir $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 3x - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, o según la fórmula (19): $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$.
Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$.

190. $\cos\left(\frac{13}{2}\pi + 4x\right) + \operatorname{sen}4x = -1$, la ecuación dada es equivalente a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) + \operatorname{sen}4x = -1$ o podemos escribir $-\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}4x = -1$. La ecuación se reduce a $0 = -1$, y la expresion dada no tiene sentido.
Respuesta: Ø .

191. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x = \cos 4x$.
Observamos que: $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x$. Entonces tenemos: $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\cos x = \cos 4x$, la ecuación dada es equivalente a $\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x = \cos 4x$. Aplicando la fórmula (19) tenemos $\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ y tomando en cuenta que $\cos 4x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$ obtenemos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 0$, al aplicar la fórmula (31) obtenemos $\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{2}\right) = 0$, y la ecuación resultante se reduce a las dos siguientes:
(1) $\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ y
(2) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{2}\right) = 0$
De la primera tenemos $\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}$ y de la segunda: $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6} = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$
Respuesta: $x = \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$.

192. $2\operatorname{sen}x\cos x - \sqrt{3}(\cos^2x - \operatorname{sen}^2x) = 2\operatorname{sen}5x$.
Observamos que $2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}2x$ y $\cos^2x - \operatorname{sen}^2x = \cos 2x$. Entonces tenemos: $\operatorname{sen}2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\operatorname{sen}5x$ Multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{2}$ obtenemos $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \operatorname{sen}5x$ o podemos escribir $\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos 2x = \operatorname{sen}5x$. Según la fórmula (19) $\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos 2x = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ y aplicando la fórmula (31) obtenemos $\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{2}\right) = 0$. Y la ecuación se reduce a dos siguientes:
(1) $\cos\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ y
(2) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{2}\right) = 0$
De la primera tenemos $\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{4\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}$ y de la segunda: $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6} = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$
Respuesta: $x = \frac{4\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}, x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$.

193. $2\operatorname{sen}x\cos x - \cos 2x = \sqrt{2}\operatorname{sen}4x$.
Observamos que $2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}2x$. Entonces tenemos: $\operatorname{sen}2x - \cos 2x = \sqrt{2}\operatorname{sen}4x$, multiplicando ambos lados por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = \operatorname{sen}4x$. La ecuación resultante es equivalente a $\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 2x = \operatorname{sen}4x$, o según la fórmula (19) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}4x = 0$, aplicando la fórmula (31) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{8}\right)\operatorname{sen}\left(-x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$. Observamos que la ecuación se reduce a las dos siguientes:
(1) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$ y
(2) $\operatorname{sen}\left(-x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$
De la primera tenemos $3x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x + \frac{\pi}{8} = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$.
Respuesta: $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}, x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$.

194. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x = \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x$.
Multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos: $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x$ o podemos escribir $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x$. Tomando en cuenta las formulas (18) y (19) tenemos:

$\text{sen}(\frac{\pi}{3} + x) = \text{sen}(\frac{\pi}{6} - x)$ o $\text{sen}(\frac{\pi}{3} + x) - \text{sen}(\frac{\pi}{6} - x) = 0$. Según la fórmula (31): $\cos\frac{\pi}{4}\text{sen}(\frac{\frac{\pi}{6} + 2x}{2}) = 0$, donde $\frac{\pi}{12} + x = \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$.

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$.

195. $\cos 2x - \sqrt{3}\,\text{sen}2x = 2\cos 4x$.

Multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$ tenemos: $\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}2x = \cos 4x$ o podemos escribir $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{6}\text{sen}2x = \cos 4x$, o la ecuación dada es equivalente a $\text{sen}(\frac{\pi}{6} - 2x) - \text{sen}(4x + \frac{\pi}{2}) = 0$. Tomando en cuenta la fórmula (31) tenemos:

$$\cos\frac{5x + \frac{2\pi}{3}}{2}\,\text{sen}\frac{-6x - \frac{\pi}{3}}{2} = 0$$

y la cuación dada es equivalente a las dos siguientes:

(1) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$ y

(2) $\text{sen}(-3x - \frac{\pi}{6}) = 0$

De la primera tenemos $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ y de la segunda: $3x + \frac{\pi}{6} = \pi k$ o $x = \frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{18}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{18}$.

196. $\sqrt{3}\cos x - \text{sen}x = \sqrt{3}\cos 2x - \text{sen}2x$.

Multiplicando todos términos por $\frac{1}{2}$ tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\text{sen}2x$ o podemos escribir $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}x = \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}2x$, tomando en cuenta la fórmula (19) tenemos $\text{sen}(\frac{\pi}{3} - x) = \text{sen}(\frac{\pi}{3} - 2x)$ o $\text{sen}(\frac{\pi}{3} - x) - \text{sen}(\frac{\pi}{3} - 2x) = 0$. Aplicando la fórmula (31) podemos escribir $\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{2})\,\text{sen}\,\frac{x}{2} = 0$ o la ecuación resultante es equivalente a dos siguientes:

(1) $\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{2}) = 0$ y

(2) $\text{sen}\,\frac{x}{2} = 0$.

De la primera tenemos $\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = 2\pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi k}{3}$, $x = 2\pi k$

197. $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}x = 2\cos 3x$.

Multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{2}$ obtenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos + \frac{1}{2}\text{sen}x = \cos 3x$ o podemos escribir $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}x = \cos 3x$. La ecuación resultante es equivalente a $\text{sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{2}) - \text{sen}(\frac{\pi}{2} + 3x) = 0$, o al aplicar la fórmula (31) tenemos:

$$2\cos\frac{\frac{\pi}{3}+x+\frac{\pi}{2}+3x}{2}\,\text{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{2}-3x}{2} = 0.$$

La ecuación es equivalente a las dos siguientes:

(1) $\cos(2x + \frac{5\pi}{6}) = 0$ y

(2) $\text{sen}(-\frac{\pi}{6} - 3x) = 0$

De la primera tenemos: $2x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $\frac{\pi}{6} + 3x = \pi k$ o $x = \frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{18}$.

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{18}$

198. $\cos 7x - \text{sen}5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \text{sen}7x)$ la ecuación es equivalente a $\cos 7x + \sqrt{3}\,\text{sen}7x = \sqrt{3}\cos 5x + \text{sen}5x$.

Al multiplicar por $\frac{1}{2}$ tenemos: $\frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\text{sen}5x$ o podemos escribir $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{6}\text{sen}7x = \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}5x$. Entonces la ecuación se reduce a $\text{sen}(\frac{\pi}{6} + 7x) - \text{sen}(\frac{\pi}{3} + 5x) = 0$ o según la fórmula (31) $\cos(\frac{\pi}{4} + 6x)\,\text{sen}(-\frac{\pi}{12} + x) = 0$. La ecuación resultante es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\cos(\frac{\pi}{4} + 6x) = 0$ y

(2) $x - \frac{\pi}{12} = 0$

De la primera tenemos:

$\frac{\pi}{4} + 6x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$

y de la segunda:

$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$

199. $\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\operatorname{sen}3x$.

Al multiplicar la ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}3x$ o podemos escribir $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}3x$. La ecuación resultante es equivalente a $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + x) - \operatorname{sen}3x = 0$ o según la fórmula (31) tenemos: $\cos(\frac{\pi}{8} + 2x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8} - x) = 0$, entonces la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

$\cos(\frac{\pi}{8} + 2x) = 0$ $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8} - x) = 0$

De la primera tenemos: $\frac{\pi}{8} + 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $\frac{\pi}{8} - x = \pi k$ o $x = \frac{\pi}{8} - \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi}{8} - \pi k$

200. $\cos4x + \operatorname{sen}2x = \sqrt{3}(\operatorname{sen}4x - \cos 2x)$.

Al multiplicar la ecuación por $\frac{1}{2}$ podemos escribir $\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos2x = \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos 4x$, o según las fórmulas (18) y (19) tenemos: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + 2x) - \operatorname{sen}(4x - \frac{\pi}{6}) = 0$. Al aplicar la fórmula (31) tenemos: $\cos(\frac{\pi}{12} + 3x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Y la ecuación se reduce a las dos ecuaciones siguientes.

(1) $\cos(\frac{\pi}{12} + 3x) = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) = 0$

De la primera tenemos: $\frac{\pi}{12} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} - \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}, x = \frac{\pi}{4} - \pi k$

201. $1 - \cos x + \cos2x + \cos3x = 0$.

La ecuación dada es equivalente a $(1 + \cos2x) + (\cos3x - \cos x) = 0$, observamos que $1 + \cos2x = 2\cos^2x$, entonces tenemos: $2\cos^2x - 2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x = 0$, tomando en cuenta que $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}^2x\cos x$ obtenemos: $\cos^2x - 2\operatorname{sen}^2x\cos x = 0$ o $\cos x(\cos x - 2\operatorname{sen}^2x) = 0$, y la ecuación se reduce a las dos siguientes

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $\cos x - 2\operatorname{sen}^2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, y la segunda: ecuación se reduce a $\cos x - 2(1 - \cos^2x) = 0$ o podemos escribir $2\cos^2x + \cos x - 2 = 0$. Denotemos $\cos x = u$ y consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 + u - 2 = 0 \\ -1 \leq u \leq 1\,. \end{cases}$$

Observamos que el sistema dado no tiene sentido.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

202. $\cos2x - \cos8x + \cos6x = 1$.

Observamos que $1 - \cos2x = 2\operatorname{sen}^2x$, entonces tenemos: $2\operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}7x\operatorname{sen}x = 0$ o $\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}7x) = 0$ y la ecuación se reduce a dos siguientes

(1) $\operatorname{sen}x = 0$ y

(2) $2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}7x = 0$

De la primera tenemos: $x = \pi k$, al aplicar la fórmula (31) a la segunda ecuación obtenemos: $2\cos4x\operatorname{sen}3x = 0$, entonces la segunda ecuación se reduce a dos siguientes: $\cos4x = 0$ y $\operatorname{sen}3x = 0$, donde $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ y $x = \frac{\pi k}{3}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $x = \frac{\pi k}{3}$

203. $\cos9x - \cos7x + \cos3x - \cos x = 0$.

La ecuación dada según la fórmula (33) es equivalente a $\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}5x\operatorname{sen}2x = 0$ o podemos escribir $\operatorname{sen}5x(\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}2x) = 0$. Entonces la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\operatorname{sen}5x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{5}$ y la segunda se reduce a $2\cos3x\operatorname{sen}x = 0$, donde $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ o $x = \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x = \pi k$.

204. $1 + \cos x - \cos 2x = \cos 3x$ la ecuación dada es equivalente a $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x = 0$ o $\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x) = 0$, y se reduce a las dos siguientes

(1) $\operatorname{sen}x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x = 0$.

De la primera tenemos: $x = \pi k$ y la segunda: se reduce a $\operatorname{sen}x(1 + 2\cos x) = 0$, entonces las demás raíces son $x = \pi k$ y $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Respuesta: $x = \pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

205. $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}4x = 0$.

Al agrupar los términos y aplicando la fórmula (30) tenemos:

$2\operatorname{sen}2x\cos x + 2\operatorname{sen}3x\cos x = 0$ o podemos escribir $\cos x(\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x) = 0$ y la ecuación se reduce a dos siguientes:

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y la segunda: es equivalente a $2\operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$, que a su vez se reduce a $\operatorname{sen}\frac{5x}{2} = 0$ y $\cos\frac{x}{2} = 0$, donde $x = \frac{2\pi k}{5}$ y $x = \pi + 2\pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{2\pi k}{5}$, $x = \pi + 2\pi k$.

206. $\cos\frac{x}{2} + \cos x + \cos\frac{3}{2}x + \cos 2x = 0$.

Al agrupar los términos y aplicando la fórmula (32) tenemos: $2\cos\frac{5x}{4}\cos\frac{3x}{4} + 2\cos\frac{5x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$ y la ecuación equivalente a $\cos\frac{5x}{4}(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}) = 0$. La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos\frac{5x}{4} = 0$ y

(2) $\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4} = 0$

De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5}$ al aplicar la fórmula (32) a la segunda: ecuación tenemos: $2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = 0$, que a su vez se reduce a dos siguientes:

$\cos\frac{x}{2} = 0$ y $\cos\frac{x}{4} = 0$, donde $x = \pi + 2\pi k$ y $x = 2\pi + 4\pi k$.

Respuesta: $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi k}{5}$, $x = \pi + 2\pi k$, $x = 2\pi + 4\pi k$.

207. $\operatorname{sen}8x - \operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}2x$.

Al agrupar los términos y aplicando la fórmula (31) tenemos:

$2\cos 7x\cos x + 2\cos 3x\cos x = 0$

o podemos escribir

$\cos x(\cos 7x + \cos 3x) = 0$ y la ecuación se reduce a dos siguientes

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $\cos 7x + \cos 3x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, al aplicar la fórmula (32) la segunda ecuación se reduce a $2\cos 5x\cos 2x = 0$, donde $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$ y $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

208. $\cos 6x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}6x = \cos 2x$.

Al agrupar los términos y aplicar las formulas (33) y (30) tenemos: $-2\operatorname{sen}4x\cos 2x + 2\operatorname{sen}4x\cos 2x = 0$. La ecuación resultante tiene sentido para todas las x.

Respuesta: $x \in R$

209. $\cos 6x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}6x = \cos 2x$.

Agrupando términos y aplicando las fórmulas (33) y (30) tenemos: $-2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}2x + 2\operatorname{sen}4x\cos 2x = 0$ o la ecuaciones equivalente a $\operatorname{sen}4x(-\operatorname{sen}2x + \cos 2x) = 0$. La ecuación se reduce a las dos siguientes ecuaciones :

(1) $\operatorname{sen}4x = 0$ y

(2) $-\operatorname{sen}2x + \cos 2x = 0$

De la primera obtenemos: $4x = \pi k$ o $x = \frac{\pi k}{4}$ y la segunda se reduce a $\operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}2x = 0$ o tenemos: $\cos(2x + \frac{\pi}{4})\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 0$ o $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$.

Respuestas: $x = \frac{\pi k}{4}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

210. $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 5x$.

Agrupando los términos y aplicando las formulas (33) y (30) tenemos: $2\cos 3x\cos x - 2\cos 3x \operatorname{sen} 2x = 0$, la ecuación dada es equivalente a $\cos 3x(\cos - \operatorname{sen} 2x) = 0$ o a tres ecuaciones siguientes:

(1) $\cos 3x = 0$

(2) $\cos x = 0$

(3) $1 - 2\operatorname{sen} x = 0$

De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, de la segunda $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y de la tercera $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,
$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

211. $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$.

Aplicando a ambos lados la fórmula (37) tenemos: $\frac{\cos 6x + \cos 20x}{2} = \frac{\cos 20x + \cos 18x}{2}$ y la ecuación se reduce a: $\cos 6x - \cos 18x = 0$. Aplicando la fórmula (33) tenemos: $2\operatorname{sen} 12x \operatorname{sen} 6x = 0$ y la ecuación dada se reduce a

(1) $\operatorname{sen} 12x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen} 6x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{12}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{6}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{12}$, $x = \frac{\pi k}{6}$.

212. $\operatorname{sen} 11x \cos 6x = \operatorname{sen} 9x \cos 4x$.

Aplicando la fórmula (38) a ambos lados tenemos: $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 17x}{2} = \frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 13x}{2}$, y la ecuación se reduce a: $\operatorname{sen} 17x - \operatorname{sen} 13x = 0$. Aplicando la fórmula (31) tenemos: $2\cos 15x \operatorname{sen} 2x = 0$ y la ecuación dada se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos 15x = 0$

(2) $\operatorname{sen} 2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{15}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{2}$.

213. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 6x = \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 3x$.

Aplicando la fórmula (36) a los dos lados tenemos: $\frac{\cos 5x - \cos 7x}{2} = \frac{\cos 5x - \cos 11x}{2}$ y la ecuación resultante es equivalente a $\cos 11x - \cos 7x = 0$, al aplicar la fórmula (33) tenemos: $2\operatorname{sen} 9x \operatorname{sen} 2x = 0$ y la ecuación se reduce a dos siguientes:

(1) $\operatorname{sen} 9x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen} 2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{9}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{2}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{9}$, $x = \frac{\pi k}{2}$.

214. $\cos 3x \cos 5x = \cos 4x \cos 6x$.

Aplicando la fórmula (37) tenemos: $\frac{\cos 2x + \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x + \cos 10x}{2}$ y al simplificar queda: $\cos 10x - \cos 8x = 0$, aplicando la fórmula (33): $2\operatorname{sen} 9x \operatorname{sen} x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes ecuaciones:

(1) $\operatorname{sen} 9x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen} x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{9}$ y de la segunda: $x = \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{9}$, $x = \pi k$.

215. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x$.

Aplicando la fórmula (36) a ambos lados tenemos: $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 12x}{2}$, o la ecuación equivalente a $\cos 12x - \cos 4x = 0$, según la fórmula (33) $2\operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 4x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes ecuaciones :

(1) $\operatorname{sen} 8x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen} 4x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{8}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{4}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{8}$, $x = \frac{\pi k}{4}$.

216. $\operatorname{sen}2x\cos4x = \operatorname{sen}6x\cos8x$.

Aplicando la fórmula (38) tenemos: $\frac{\operatorname{sen}(-2x)+\operatorname{sen}6x}{2} = \frac{\operatorname{sen}(-2x)+\cos14x}{2}$ y la ecuación es equivalente a $x\cos 14x - \operatorname{sen}6x = 0$. Observamos que $\operatorname{sen}6x = -\cos(6x + \frac{\pi}{2})$. Entonces tenemos: la siguiente ecuación: $\cos 14x + \cos(6x + \frac{\pi}{2}) = 0$, aplicando la fórmula (32): $2\cos(10x + \frac{\pi}{4})\cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos(10x + \frac{\pi}{4}) = 0$ y

(2) $\cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 0$

De la primera tenemos: $10x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi k}{10}$ y de la segunda: $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi k}{10}$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$.

217. $\operatorname{sen}5x\cos3x = \operatorname{sen}9x\cos7x$.

Aplicando la fórmula (38) a los dos lados tenemos: $\frac{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}8x}{2} = \frac{\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}16x}{2}$, simplificando quieda $\operatorname{sen}16x - \operatorname{sen}8x = 0$.

Aplicando la fórmula (31) tenemos: $2\cos12x\operatorname{sen}4x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos12x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}4x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{4}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12}$, $x = \frac{\pi k}{4}$.

218. $\cos3x\cos5x = \cos x\cos7x$.

Aplicando la fórmula (37) a los dos lados tenemos: $\frac{\cos2x+\cos8x}{2} = \frac{\cos8x+\cos6x}{2}$, simplificando queda $\cos 6x - \cos 2x = 0$, aplicando la fórmula (33) $2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}2x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\operatorname{sen}4x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}(2x) = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{4}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{2}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{4}$, $x = \frac{\pi k}{2}$.

219. $\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}5x$.

Aplicando la fórmula (36) a los dos lados tenemos: $\frac{\cos2x-\cos6x}{2} = \frac{\cos4x-\cos6x}{2}$ al simplificar queda: $\cos 4x - \cos2x = 0$.

Aplicando la fórmula (33) tenemos: $2\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}x = 0$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\operatorname{sen}3x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \pi k$.

220. $\operatorname{sen}x\cos 5x = \operatorname{sen}2x\cos 4x$.

Aplicando la fórmula (38) tenemos: $\frac{\operatorname{sen}(-4x)+\operatorname{sen}6x}{2} = \frac{\operatorname{sen}(-2x)+\operatorname{sen}6x}{2}$, al simplificar queda $\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}2x = 0$. Aplicando la fórmula (31): $2\cos3x\operatorname{sen}x = 0$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos3x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen}x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x = \pi k$.

221. $\cos5x + \cos7x = \cos(\pi + 6x)$.

Observamos que $\cos(\pi + 6x) = -\cos6x$ y $\cos5x + \cos7x = 2\cos 6x\cos x$. Entonces la ecuación dada se reduce a $2\cos6x\cos x = -\cos6x$. Factorizando: $\cos6x$, tenemos: $\cos6x(2\cos x + 1) = 0$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos6x = 0$ y

(2) $2\cos x + 1 = 0$

De la primera tenemos:
$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$ y de la segunda:
$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Respuesta : $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$,
$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

222. $\text{sen}3x + \text{sen}5x = \text{sen}4x$.

Según la fórmula (30) $\text{sen}3x + \text{sen}5x = 2\text{sen}4x\cos x$. Entonces tenemos:

$2\text{sen}4x\cos x = \text{sen}4x$.

La ecuación resultante es equivalente a: $\text{sen}4x(2\cos x - 1) = 0$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\text{sen}4x = 0$ y

(2) $2\cos x - 1 = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{4}$ y de la segunda: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{4}, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

223. $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 4x) + \cos 2x = 3\cos 3x$.

Observamos que $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 4x) = \cos 4x$, entonces tenemos: $\cos 4x + \cos 2x = 3\cos 3x$.

Aplicando la fórmula (32) al término izquierdo tenemos: $2\cos 3x\cos x = 3\cos 3x$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos 3x = 0$ y

(2) $2\cos - 3 = 0$

De la primera tenemos: que $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ y la segunda ecuación no tiene solución.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

224. $\text{sen}3x\text{sen}4x - \cos x = 0$.

Según la fórmula (36) tenemos: $\frac{\cos x - \cos 7x}{2} - \cos x = 0$, y la ecuación se reduce a: $\frac{\cos 7x}{2} + \frac{\cos x}{2} = 0$. Aplicando la fórmula (32): $\cos 4x\cos 3x = 0$. La ecuación se reduce a:

(1) $\cos 4x = 0$ y

(2) $\cos 3x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

225. $\text{sen}x\cos 5x = \text{sen}6x$.

Aplicando la fórmula (38) a $\text{sen}x\cos 5x$ tenemos: $\frac{\text{sen}(-4x) + \text{sen}6x}{2} = \text{sen}6x$ y la ecuación se reduce a: $\text{sen}6x + \text{sen}4x = 0$. Según la fórmula (30): $2\text{sen}5x\cos x = 0$. La ecuación se reduce a:

(1) $\text{sen}5x = 0$ y

(2) $\cos x = 0$

De la primera tenemos: $x_1 = \frac{\pi k}{5}$ y de la segunda: $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x_1 = \frac{\pi k}{5}; x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$

226. $\text{sen}3x = \cos x - \text{sen}x$.

Al pasar $-\text{sen}x$ al lado izquierdo y aplicar la fórmula (30) tenemos: $2\text{sen}2x\cos x = \cos x$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $2\text{sen}2x - 1 = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{5}$ y de la segunda: $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{5}; x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$

227. $\cos(\frac{\pi}{2} + 5x) + \text{sen}x = 2\cos 3x$.

Observamos que $\cos(\frac{\pi}{2} + 5x) = -\text{sen}5x$. Entonces tenemos: $-\text{sen}5x + \text{sen}x = 2\cos 3x$. La ecuación se reduce a:

(1) $\cos 3x = 0$ y

(2) $1 + \text{sen}2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

228. $\text{sen}2x\text{sen}3x + \cos 5x = 0$.

Al aplicar la fórmula (36) a $\text{sen}2x\text{sen}3x$ tenemos la siguiente ecuación:

$\frac{\cos x - \cos 5x}{2} + \cos 5x = 0$

La ecuación se reduce a: $\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 5x}{2} = 0$

Al aplicar la fórmula (32) tenemos:

$\cos 3x\cos 2x = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\cos 3x = 0$ y

(2) $\cos 2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

229. $\cos x \cos 5x = \cos 6x$.

Al aplicar la fórmula (37) al lado izquierdo tenemos que:

$\frac{\cos 4x + \cos 6x}{2} = \cos 6x$

La ecuación se reduce a: $\frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 6x}{2} = 0$

Al aplicar la fórmula (33) tenemos:

$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\operatorname{sen} 5x = 0$ y

(2) $\operatorname{sen} x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{5}$ y de la segunda: $x = \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{5}$; $x = \pi k$

230. $\operatorname{sen} 2x \cos 8x + \operatorname{sen} 6x = 0$.

Al aplicar la fórmula (38) a $\operatorname{sen} 2x \cos 8x$ tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}(-6x) + \operatorname{sen} 10x}{2} + \operatorname{sen} 6x = 0$

La ecuación se reduce a:

$\frac{\operatorname{sen} 10x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{2} = 0$

Al aplicar la fórmula (30): $\operatorname{sen} 8x \cos 2x = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\operatorname{sen} 8x = 0$ y

(2) $\cos 2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{8}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{8}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

231. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 4x = 2$

Al aplicar la fórmula (25): $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ a todos los términos en el lado derecho tenemos:

$(\cos 4x + \cos 6x) + \cos 8x + \cos 2x) = 0$

Al simplificar la ecuación y agrupar términos tenemos:

$2\cos 5x \cos x + 2\cos 5x \cos 3x = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\cos 5x = 0$ y

(2) $\cos x + \cos 3x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k$

232. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

Aplicando la fórmula (25) $\cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ a cada término del lado derecho tenemos:

$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$

Simplificando la ecuación y arupando los términos obtenemos:

$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$

Aplicando la fórmula (32) $2\cos 5x \cos 3x + 2\cos 5x \cos x = 0$, dividiendo entre 2, factorizando $\cos x$ y aplicando la fórmula (32) a $\cos 3x + \cos x$ tenemos: $2\cos 5x \cos 2x \cos x = 0$. La ecuación se reduce a las tres siguientes:

(1) $\cos 5x = 0$,

(2) $\cos 2x = 0$ y

(3) $\cos x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y de la tercera $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

233. $\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 4x = \operatorname{sen}^2 6x + \operatorname{sen}^2 8x$

Aplicando la fórmula (25)

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ tenemos:

$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 12x}{2} + \frac{1 - \cos 16x}{2}$

Agrupando los términos y aplicando la fórmula (33) tenemos:

$2\operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 6x + 2\operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 2x = 0$

Al factorizar $\operatorname{sen} 10x$, dividiendo entre 2 tenemos: y aplicando la fórmula (30) tenemos:

$2\operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 4x \cos 2x = 0$.

La ecuación se reduce a:
(1) $\text{sen}10x = 0$,
(2) $\text{sen}4x = 0$ y
(3) $\cos 2x = 0$
De la primera tenemos:
$x = \frac{\pi k}{10}$; de la segunda: $x = \frac{\pi k}{4}$ y de la tercera: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$
Respuesta: $x = \frac{\pi k}{10}$; $x = \frac{\pi k}{4}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

234. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 x = \cos^2 \frac{3}{2}x + \cos^2 2x$
Aplicando la fórmula (25)
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ tenemos:
$\frac{1 - \cos x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos 3x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2}$
Simplificando la ecuación y aplicando la fórmula (32) tenemos:
$2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2}$
La ecuación se reduce a:
$\cos \frac{x}{2}(\cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{3x}{2}) = 0$
Aplicando la fórmula (33) a
$\cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{3x}{2}$ tenemos:
$\cos \frac{x}{2} \text{sen} \frac{5x}{2} \text{sen} x = 0$
La ecuación se reduce a:
(1) $\cos \frac{x}{2} = 0$;
(2) $\text{sen} \frac{5x}{2} = 0$ y
(3) $\text{sen} x = 0$
De la primera tenemos: $x = \pi + 2\pi k$; de la segunda: $x = \frac{2\pi k}{5}$ y de la tercera $x = \pi k$
Respuesta: $x = \pi + 2\pi k$; $x = \frac{2\pi k}{5}$; $x = \pi k$

235. $\cos^2 2x + \cos^2 4x = \text{sen}^2 6x + \text{sen}^2 8x$.
Aplicando la fórmula $\cos^{2x} = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ a $\text{sen}^2 6x + \text{sen}^2 8x$ tenemos:
$\frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 12x}{2} + \frac{1 - \cos 16x}{2}$
Simplificando la ecuación y agrupando los términos tenemos:
$(\cos 12x + \cos 8x) + (\cos 16x + \cos 4x) = 0$
Aplicando la fórmula (32) tenemos:
$2\cos 10x \cos 2x + 2\cos 10x \cos 6x = 0$
Factorizando $\cos 10x$, dividiendo entre 2 y aplicando la fórmula (32) tenemos:
$2\cos 10x \cos 4x \cos 2x = 0$
Aplicando la fórmula (33) a
$\cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{3x}{2}$ tenemos:
$\cos \frac{x}{2} \text{sen} 5x \text{sen} 2x = 0$
La ecuación se reduce a:
(1) $\cos 10x = 0$;
(2) $\cos 4x = 0$ y
(3) $\cos 2x = 0$
De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$, de la segunda: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ y de la tercera: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

236. $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 2x + \text{sen}^2 3x = \frac{3}{2}$.
Aplicando la fórmula (25) tenemos:
$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 32$
La ecuación se reduce a:
$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$
Según la fórmula (32) $\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x \cos 2x$
Entonces la ecuación se reduce a:
$\cos 4x + 2\cos 4x \cos 2x = 0$
Factorizando $\cos 4x$ tenemos:
$\cos 4x(1 + 2\cos 2x) = 0$
La ecuación se reduce a
(1) $\cos 4x = 0$ y
(2) $1 + 2\cos 2x = 0$
De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ y de la segunda: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$
Respuesta: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

237. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$.
Aplicando la fórmula (25)
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ tenemos:
$\frac{1 + \cos x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 3x}{2} = \frac{3}{2}$
La ecuación se reduce a $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. Observamos que $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$, entonces la ecuación se reduce a $\cos x + 2\cos 2x \cos x = 0$. Factorizando $\cos x$ observamos que la ecuación es equivalente a:
(1) $\cos x = 0$ y
(2) $(1 + 2\cos 2x) = 0$
De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y de la segunda: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

238. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x = \frac{1}{2}$. Aplicando la fórmula (25) tenemos:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación se reduce a $\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x = 0$ Al aplicar la fórmula (32) a $\cos 2x + \cos 6x$ tenemos lo siguiente:

$\cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0$

Factorizando $\cos 4x$ observamos que la ecuación se reduce a

(1) $\cos 4x = 0$ y

(2) $(1 + 2\cos 2x) = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ y de la segunda: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

239. $$\frac{\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que $\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot 2x$

$$\begin{cases} \cot 2x = 0 \\ \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases}$$

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x \neq \pi k - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Observamos que el sistema dado no tiene solución.

Respuesta: $\emptyset$.

240. $(1 - \cos 2x)\cot x = 0$.

Observamos que

$1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen} 2x\ 2\operatorname{sen}^2 x\cot x = 0$.

La ecuación se reduce a dos siguientes:

(1) $\operatorname{sen} x = 0$ y

(2) $\cot x = 0$

De la primera tenemos: $x = \pi k$ y de la segunda ecuación $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: Aplicando la fórmula (33) tenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

241. $\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 0$.

La ecuación es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k \\ x \neq 2\pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos que $x = \pi + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pi + 2\pi k$

242. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x} = 0$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos que $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

243. $\frac{\tan 3(x + \pi)}{\tan x} = 0$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan 3(x+\pi) = 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que $\tan 3(x + \pi) = \tan 3x$. Entonces tenemos:

$$\begin{cases} \tan 3x = 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3} \\ x \neq \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$ y $x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

244. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)}{\operatorname{sen} x} = 0$$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0 \\ \operatorname{sen}x \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = -\operatorname{sen}3x$

$$\begin{cases} -\operatorname{sen}3x = 0 \\ \operatorname{sen}x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3} \\ x \neq \pi k \end{cases}$$

De la las dos ecuaciones tenemos que

$x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi k$ y $x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

245. $\frac{\operatorname{sen}2x}{1 + \cos 2x} = 0.$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}2x = 0 \\ 1 + \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos soluciónes tenemos: $x = \pi k$

Respuesta: $x = \pi k$

246. $\frac{\operatorname{sen}2(x + \pi)}{\cos x} = 0$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}2(x + \pi) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que $\operatorname{sen}2(x + \pi) = -\operatorname{sen}2x$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}2x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos: $x = \pi k$

Respuesta: $x = \pi k$

247. $(1 - \cos 4x)\cot 2x = 0.$

La ecuación se reduce a las dos siguientes: (1) $1 - \cos4x = 0$ y (2) $\cot2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

248. $\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}x} = 0.$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - \operatorname{sen}x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

249. $\tan x + \tan 3x = 0.$

Aplicando la fórmula (34) tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}4x}{\cos x\cos3x} = 0$. La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones, tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

250. $\cot 3x + \cot x = 0.$

Aplicando la fórmula

$\cot x + \cot y = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$ tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}3x\cos x} = 0$

La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \\ \operatorname{sen}3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ x \neq \frac{\pi k}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

251. $\tan x = \tan 9x.$

Aplicando la fórmula (35) tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}8x}{\cos9x\cos x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}8x = 0 \\ \cos 9x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{8} \\ x \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{9} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$

252. $\cot x = \cot 4x$.

Aplicando la fórmula

$\cot x - \cot y = \frac{\operatorname{sen}(y - x)}{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y}$ tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}4x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}3x = 0 \\ \operatorname{sen}x \neq 0 \\ \operatorname{sen}4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{3} \\ x \neq \pi k \\ x \neq \dfrac{\pi k}{4} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

253. $\tan 3x = \tan x$.

Aplicando la fórmula (35) tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 3x \cos x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}2x = 0 \\ \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \pi k$

Respuesta: $x = \pi k$

254. $\cot 5x + \cot x = 0$.

Aplicando la fórmula

$\cot x + \cot y = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y}$ tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}6x}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}5x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}8x = 0 \\ \operatorname{sen}6x \neq 0 \\ \operatorname{sen}2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{8} \\ x \neq \dfrac{\pi k}{6} \\ x \neq \dfrac{\pi k}{2} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \frac{\pi k}{6}$ y $x \neq \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{6}$ y $x \pm \pi k$

255. $\cot 6x + \cot 2x = 0$.

Aplicando la fórmula

$\cot x + \cot y = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y}$ tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}8x}{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}6x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}8x = 0 \\ \operatorname{sen}6x \neq 0 \\ \operatorname{sen}2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{8} \\ x \neq \dfrac{\pi k}{6} \\ x \neq \dfrac{\pi k}{2} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \frac{\pi k}{8}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{8}$

256. $\tan 5x = \tan x$.

Aplicando la fórmula (35) tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}4x}{\cos 5x \cos x} = 0$ La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{4} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones, tenemos: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ y $x \neq \pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ y $x \neq \pi k$

257. $\tan 7x + \tan x = 0$.

Aplicando la fórmula (34) tenemos:

$\frac{\operatorname{sen}8x}{\cos x \cos 7x} = 0$. La ecuación se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \text{sen}6x = 0 \\ \text{sen}2x \neq 0 \\ \text{sen}8x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{6} \\ x \neq \frac{\pi k}{2} \\ x \neq \frac{\pi k}{8} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones, tenemos: $x = \frac{\pi k}{8}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{8}$

258. $\cot 2x = \cot 8x$.

Aplicando la fórmula

$\cot x - \cot y = \frac{\text{sen}(y - x)}{\text{sen}x\text{sen}y}$ tenemos:

$\frac{\text{sen}6x}{\text{sen}2x\text{sen}8x} = 0$

La ecuación se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \text{sen}6x = 0 \\ \text{sen}2x \neq 0 \\ \text{sen}8x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{6} \\ x \neq \frac{\pi k}{2} \\ x \neq \frac{\pi k}{8} \end{cases}$$

Tomando en cuenta las tres ecuaciones tenemos: $x = \frac{\pi k}{6}$ y $x \neq \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{6}$ y $x \neq \frac{\pi k}{2}$

259. $2\tan^3 x - 2\tan^2 x + 3\tan x - 3 = 0$.

Denotemos $\tan x$ por y; $\tan x = y$

$2y^3 - 2y^2 + 3y - 3 = 0$

Factorizando tenemos:

$2y^2(y - 1) + 3(y - 1) = 0$ y

$(y - 1)(2y^2 + 3) = 0$

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $y - 1 = 0$ y

(2) $2y^2 + 3 = 0$

De la primera tenemos: $y = 1$ y de la segunda: $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, entonces $\tan x = 1$ y $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}} + \pi k$ y

$x = \arctan(-\sqrt{\frac{3}{2}}) + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}} + \pi k$ y $x = \arctan(-\sqrt{\frac{3}{2}}) + \pi k$.

260. $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan x - 2 = 0$.

Al aplicar la fórmula (32) obtenemos:

$\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ y la ecuación se reduce a $\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$

Denotando $\tan x = u$ tenemos:

$u^2 - 4u + 1 = 0$. Las raíces son:

$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Entonces

$\tan x = 2 \pm \sqrt{3}$ y

$x = \pm\arctan(2 \pm \sqrt{3}) + \pi k$

Respuesta: $x = \pm \arctan(2 \pm \sqrt{3}) + \pi k$

261. $8\tan^2\frac{x}{2} = 1 + \sec x$.

Como $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ tenemos:

$\frac{8(1 - \cos x)}{1 + \cos x} = 1 + \frac{1}{\cos x}$

La ecuación resultante se reduce a

$(3\cos x - 1)^2 = 0$

Entonces $\cos x = \frac{1}{3}$ y $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$

262. $\cot x + \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = 2$.

Tomando en cuenta que $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}x}$ tenemos:

$\frac{\cos x}{\text{sen}x} + \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = 2$ y la ecuación se reduce a $1 + \frac{\cos x}{\text{sen}x(1 + \cos x)} = 2$

Simplificando en $1 + \cos x$, suponiendo que $1 + \cos x \neq 0$, obtenemos:

$\frac{1}{\text{sen}x} = 2$ o $\text{sen}x = 2$, donde

$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi k$

263. $\text{sen}3x - \text{sen}7x = \sqrt{3}\,\text{sen}2x$.

Aplicando la fórmula (31) tenemos: $2\cos 5x\text{sen}(-2x) = \sqrt{3}\,\text{sen}2x$

La ecuación se reduce a:

$\sqrt{3}\,\text{sen}2x + 2\cos 5x\text{sen}2x = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\text{sen}2x = 0$ y

(2) $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

264. $\text{sen}x + \tan x = 4\cos x + 4$.

Tomando en cuenta que $\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$

tenemos:

$\tan x(\cos x + 1) = 4(\cos x + 1)$, y la ecuación se reduce a:

$(cox + 1)(\tan x - 4) = 0$

Tenemos dos ecuaciones:

(1) $\cos x + 1 = 0$ y

(2) $\tan x - 4 = 0$

De la primera: $x = \pi k + 2\pi k$ y de la segunda: $x = \arctan 4 + \pi k$

Respuesta: $x = \pi k + 2\pi k$;

$x = \arctan 4 + \pi k$

265. $\cos 3x + \tan 5x = \text{sen}7x$.

Tomando en cuenta que $\tan 5x = \frac{\text{sen}5x}{\cos 5x}$ y $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$ tenemos:

$\cos 3x \frac{\text{sen}5x}{\cos 5x} = \text{sen}7x$

La ecuación se reduce a

$\cos 3x \text{sen}5x = \text{sen}7x\cos 5$

Aplicando la fórmula (38) tenemos:

$\frac{\text{sen}2x + \text{sen}8x}{2} = \frac{\text{sen}2x + \text{sen}12x}{2}$

La ecuación se reduce a

$\text{sen}12x - \text{sen}8x = 0$

Aplicando la fórmula (31) tenemos:

$2\cos 10x\text{sen}2x = 0$ y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos 10x = 0$ y

(2) $\text{sen}2x = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$, y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$; $x = \frac{\pi k}{2}$

266. $1 - \cos^2 2x = \text{sen}3x - \cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

La ecuación se reduce a

$\text{sen}^2 2x = \text{sen}3x + \text{sen}x$

Tomando en cuenta que $\text{sen}^2 2x = 2\text{sen}2x\text{-}\cos x$ y pasando los términos al primer miembro obtenemos:

$\text{sen}2x(\text{sen}2x - 2\cos x) = 0$ o $2\text{sen}2x\cos x(\text{sen}x - 1) = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\text{sen}2x = 0$

(2) $\cos x = 0$ y

(3) $\text{sen}x = 1$

De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi k}{2}$; de la segunda: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; y de la tercera: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{2}$

267. $1 - \cos(\pi - x) + \text{sen}\frac{\pi + k}{2} = 0$.

Tomando en cuenta que $\cos(\pi - x) = -\cos x$ y $\text{sen}\frac{\pi + k}{2} = \cos\frac{x}{2}$

Tenemos: $1 + \cos x + \cos\frac{x}{2} = 0$

Tomando en cuenta que la fórmula (25), tenemos: $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

La ecuación se reduce a:

(1) $\cos\frac{x}{2} = 0$ y

(2) $2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$

De la primera tenemos: $x = \pi + 2\pi k$ y de la segunda: $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi$

Respuesta: $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi$

268. $\cos 3x + \text{sen}x\text{sen}2x = 0$.

Aplicando la fórmula (36) tenemos:

$5\text{sen}x\text{sen}2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$

La ecuación se reduce a $\cos 3x + \cos x = 0$

Según la fórmula (32) tenemos:

$2\cos 2x\cos x = 0$

La ecuación se reduce a

(1) $\cos 2x = 0$ y

(2) $\cos x = 0$

De la primera ecuación tenemos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

269. $(1 + \cos 4x)\text{sen}x = \cos^2 2x$.

Según la fórmula (25) $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$

Entonces: $2\cos^2 2x\text{sen}x - \cos^2 2x = 0$

Al factorizar $\cos^2 2x$ obtenemos: $\cos^2 2x\text{-}(2\text{sen}x - 1) = 0$, y la ecuación se reduce a:

(1) $\cos^2 x = 0$ y

(2) $2\text{sen}x - 1 = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y de la segunda: $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

270. $\text{sen}3x + \text{sen}x = 4\text{sen}^2x$.
Tomando en cuenta la fórmula (30) y pasando los miembros al primer miembro tenemos:
$2\text{sen}2x\cos x - 4\text{sen}^2x = 0$
Tomando en cuenta que $2\text{sen}2x\cos x = 4\text{sen}x\cos^2x$, fórmula (24), tenemos
$4\text{sen}x\cos^2x - 4\text{sen}^2x = 0$
Al factorizar $4\text{sen}x$ obtenemos:
$4\text{sen}x(\cos^2x - \text{sen}x) = 0$
La ecuación se reduce a:
(1) $\text{sen}x = 0$ y
(2) $\cos^2x - \text{sen}x = 0$
De la primera tenemos: $x_1 = \pi k$. La segunda ecuación se reduce a $\text{sen}^2x + \text{sen}x - 1 = 0$ y observamos que no tiene raíces.
Respuesta: $x = \pi k$

271. $\tan 3x + \cos 6x = 1$.
Tomando en cuenta que
$\tan 3x = \frac{\text{sen}3x}{\cos 3x}$
Tenemos: $\frac{\text{sen}3x}{\cos 3x} + \cos 6x = 1$
Al multiplicar la ecuación por $\cos 3x$, $\cos 3x \neq 0$ tenemos:
$\text{sen}3x + \cos 3x \cos 6x = \cos 3x$
Según la fórmula (37)
$\cos 3x \cos 6x = \frac{\cos 3x + \cos 9x}{2}$, entonces
$\frac{\text{sen}3x + \cos 3x + \cos 9x}{2} = \cos 3x$ o
$2\text{sen}3x + \cos 9x - \cos 3x = 0$
Tomando en cuenta la fórmula (35), tenemos: $2\text{sen}3x - 2\text{sen}6x\text{sen}3x = 0$
La ecuación se reduce a las dos siguientes
(1) $\text{sen}3x = 0$ y
(2) $\text{sen}6x = 1$
De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{3}$ y de la segunda: $x = \frac{\pi k}{6}$
Respuesta: $x = \frac{\pi k}{6}$

272. $5\cos 2x = 4\text{sen}x$.
Usando la fórmula (25), tenemos que:
$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2x$ Entonces la ecuación se reduce a
$10\text{sen}^2x4\text{sen}x - 5 = 0$
Al resolver la ecuación cuadrática obtenemos:
$x = (-1)^n \text{arcsen} \frac{-2 \pm \sqrt{5}4}{10} + \pi k$
Respuesta: $x = (-1)^n \text{arcsen} \frac{-2 \pm \sqrt{5}4}{10} + \pi k$

273. $\cos 3x = 2\text{sen}(\frac{3}{2}\pi + x)$.
Aplicando $\text{sen}(32 + x) = -\cos x$, la ecuación se reduce a $\cos 3x + \cos x = 0$
Según la fórmula (32), tenemos:
$2\cos 2x\cos x = 0$
La ecuación se reduce a las siguientes
(1) $\cos 2x = 0$ y
(2) $\cos x = 0$
De la primera tenemos: $x = \pi 4 + \frac{\pi k}{2}$, y de la segunda: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

274. $\text{sen}4x = 2\cos 2x - 1$.
Tomando en cuenta que
$\text{sen}4x = 2\text{sen}2x\cos 2x$ y $2\cos^2x - 1 = \cos 2x$ y pasando los términos al primer miembro obtenemos:
$2\text{sen}2x\cos 2x - \cos 2x = 0$ o
$\cos 2x(2\text{sen}2x - 1) = 0$
La ecuación se reduce a:
(1) $\cos 2x = 0$ y
(2) $2\text{sen}2x - 1 = 0$
De la primera tenemos: que: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$;
y de la segunda:
$\text{sen}2x = \frac{1}{2}$ o $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$
Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

275. $\text{sen}6x + \text{sen}2x = \frac{1}{2}\tan 2x$.
Según la fórmula (30) tenemos: $\text{sen}6x + \text{sen}2x = 2\text{sen}4x\cos 2x$, y según la definicion: $\tan 2x = \frac{\text{sen}2x}{\cos 2x}$, entonces la ecuación dada es equivalente a: $2\text{sen}4x\cos 2x = \frac{\text{sen}2x}{2\cos 2x}$, y multiplicando por $2\cos 2x$, $\cos 2x \neq 0$ obtenemos: $4\text{sen}4x\cos^2 2x = \text{sen}2x$
Tomando en cuenta que
$\text{sen}4x = 2\text{sen}2x\cos 2x$, obtenemos:

$8\text{sen}2x\cos^3 2x = \text{sen}2x$ y la ecuación se reduce a $\text{sen}2x(8\cos^3 2x - 1) = 0$

Así tenemos

(1) $\text{sen}2x = 0$ y

(2) $8\cos^3 2x - 1 = 0$

De la primera: $x = \frac{\pi k}{2}$, y de la segunda: $\cos 2x = \frac{1}{2}$ o $x = + - \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{2}, x = + - \frac{\pi}{6} + \pi k$

276. $\cot x - \cos 2x = 1$.

Tomando en cuenta que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ y $1 = \cos^2 x + \text{sen}^2 x$, obtenemos:

$\cot x = 2\cos 2x$

Aplicando $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$ y multiplicando la ecuación por $\text{sen} x$, $\text{sen} x \neq 0$, tenemos: $\cos x = 2\cos^2 x \,\text{sen} x$

La ecuación se reduce a:

$\cos x(2\cos x\,\text{sen} x - 1) = 0$

Tenemos las ecuaciones siguientes:

(1) $\cos x = 0$ y

(2) $2\cos x\,\text{sen} x - 1 = 0$

De la primera $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, la segunda se reduce a: $\text{sen}2x = 1$ o $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

277. $\text{sen}3x = 2\text{sen}x$.

Sabiendo que $\text{sen}3x - \text{sen}x = 2\cos 2x\,\text{sen}x$, tenemos: $2\cos 2x\,\text{sen}x = \text{sen}x$

La ecuación se reduce a:

$\text{sen}x(2\cos 2x - 1) = 0$, tenemos las dos ecuaciones siguientes:

(1) $\text{sen}x = 0$ y

(2) $2\cos 2x - 1 = 0$

De la primera: $x = \pi k$; y de la segunda: $\cos 2x = \frac{1}{2}$ o $x = + - \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \pi k, x = + - \frac{\pi}{6} + \pi k$

278. $\text{sen}3x \cos 3x = \text{sen}2x$.

Tomando en cuenta que $\text{sen}3x\cos 3x = \frac{1}{2}\text{sen}6x$ tenemos: $\text{sen}6x - 2\text{sen}2x = 0$, aplicando $\text{sen}6x - \text{sen}2x = 2\cos 4x\,\text{sen}2x$ tenemos: $2\cos 4x\,\text{sen}2x - 2\text{sen}2x = 0$ y la ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\text{sen}2x = 0$ y

(2) $\cos 4x - 1 = 0$

De la primera tenemos: $x = \frac{\pi k}{2}$, y de la segunda: $\cos 4x = 1$ o $x = \frac{\pi k}{2}$

Respuesta: $x = \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi k}{2}$

279. $2\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$.

La ecuación se reduce las dos siguientes:

(1) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y

(2) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Las raíces son:

$x + \frac{\pi}{4} = + - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ o $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ y $x = 2\pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ y $x = 2\pi k$

280. $2\text{sen}^2(x - \frac{\pi}{4}) = 1$.

La ecuación se reduce a:

(1) $\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y

(2) $\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Las raíces son:

$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ y

$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

281. $4\text{sen}^2 x = 3$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y

(2) $\text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Las raíces son:

$x = (-1)^{\pi} \frac{\pi}{3} + \pi k$ y

$x = (-1)^{\pi+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^{\pi} \frac{\pi}{3} + \pi k$,

$x = (-1)^{\pi+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$

282. $3\tan^{2x} = 1$.

La ecuación se reduce a:

(1) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y

(2) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Las raíces son: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

283. $2\cos^2 \frac{2}{5}x = 1$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos \frac{2}{5}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y

(2) $\cos \frac{2}{5}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Las raíces son:

$\frac{2}{5}x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ o $x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$

Respuesta: $\frac{2}{5}x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$

284. $\tan^2 2x = 3$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\tan 2x = \sqrt{3}$ y

(2) $\tan 2x = -\sqrt{3}$

Las raíces son:

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ o $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

Respuesta: $2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$

285. $\tan^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$.

La ecuación se reduce a

(1) $\tan (x + \frac{\pi}{4}) = 1$ y

(2) $\tan (x + \frac{\pi}{4}) = -1$

Las raíces son :

$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ o $x = \pi k$ y

$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = \pi k, x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$

286. $\cot^2 3x = 1$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cot 3x = 1$ y

(2) $\cot 3x = -1$

Las raíces son :

$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ y $3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ o

$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$

287. $4\cos^2 x = 1$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos x = \frac{1}{2}$ y

(2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Las raíces son :$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

288. $4\operatorname{sen}2x = 1$.

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ y

(2) $\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$

Las raíces son: $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ y

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ y

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$

289. $2\cos 2x - 7\cos x + 3 = 0$.

Al denotar $\cos x = u$, consideremos al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 - 7u + 3 = 0 \\ -1 \le u \le 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones, tenemos:

$u = -\frac{1}{2}$ (la raíz $\frac{11}{4}$ no es válida), entonces $\cos x = -\frac{1}{2}$ o $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

290. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Al denotar $\cos x = u$ consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 - 5u + 2 = 0 \\ -1 \le u \le 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones, tenemos:

$u = \frac{1}{2}$ (la raíz $u = 2$ no es válida). Entonces $\cos x = \frac{1}{2}$ o $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

291. $\operatorname{sen}2x + 6\operatorname{sen}x + 5 = 0$.

Al denotar $\operatorname{sen}x$ por u, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u^2 + 6u + 5 = 0 \\ -1 \le u \le 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos:

$u = -1$ (la raíz $u = -5$ no es válida), entonces $\operatorname{sen}x = -1$ o $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

292. $\tan^2 x - 6\tan x + 5 = 0.$

Al denotar $\tan x$ por u, tenemos:

$u^2 - 6u + 5 = 0$

Las raíces son $u = 1$ y $u = 5$

Entonces, $\tan x = 1$ y $\tan x = 5$ o

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ y $x = \arctan 5 + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ y $x = \arctan 5 + \pi k$

293. $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0.$

Denotando $\cos x$ por u, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 + u - 3 = 0 \\ -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuacione, tenemos: $u = 1$ (la raíz $u = -\frac{3}{2}$ no es válida)

Entonces: $\cos x = 1$ o $x = 2\pi k$

Respuesta: $x = 2\pi k$

294. $2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x + 2 = 0.$

Denotando $\operatorname{sen} x$ por u, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 + 5u + 2 = 0 \\ -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones, tenemos:

$u = -\frac{1}{2}$ (la raíz $u = -2$ no es válida), entonces: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$

295. $2\operatorname{sen}^2 x - 9\operatorname{sen} x - 5 = 0.$

Denotando $\operatorname{sen} x$ por u, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2u^2 - 9u - 5 = 0 \\ -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones tenemos:

$u = -\frac{1}{2}$ (la raíz $u = 5$ no es válida)

Entonces: $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ o

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$

296. $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0.$

Denotando $\tan x$ por u, tenemos el siguiente sistema:

$u^2 - 3u - 4 = 0$

Las raíces son: $u = 4$ y $u = -1$

Entonces, $\tan x = 4$ y $\tan x = -1$ o $x = \arctan 4 + \pi k$ o $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

Respuesta: $x = \arctan 4 + \pi k$ o

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

297. $3\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x + 4 = 0.$

La raíz es $\operatorname{sen} x = 1$ (la raíz $\frac{4}{3}$ no es válida)

Entonces, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

298. $2\cot^2 x + \cot x - 1 = 0.$

Las raíces son: $\cot x = -1$ y $\cot x = \frac{1}{2}$

Entonces, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ y

$x = \operatorname{arccot}\frac{1}{2} + \pi k$

Respuesta: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$

$x = \operatorname{arccot}\frac{1}{2} + \pi k$

299. $\cos\frac{x}{4} - \operatorname{sen}\frac{x}{8} = 0.$

Tomando en cuenta que:

$\cos\frac{x}{4} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{8}$, tenemos:

$1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{8} - \operatorname{sen}\frac{x}{8} = 0$

Las raices son: $\operatorname{sen}\frac{x}{8} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{x}{8} = -1$

Entonces obtenemos:

$x = (-1)^k\frac{4\pi}{3} + 8\pi k$ y $x = -4\pi + 16\pi k$

Respuesta: $x = = (-1)^k\frac{4\pi}{3} + 8\pi k$ y

$x = -4\pi + 16\pi k$

300. $\operatorname{sen}\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3} = 0.$

Tomando en cuenta que $\cos\frac{x}{3} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{6}$, tenemos: $\operatorname{sen}\frac{x}{6} + 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{6} = 0$

Las raices son: $\operatorname{sen}\frac{x}{6} = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$

Entonces tenemos:

$x = 3\pi + 12\pi k$ y $x = (-1)^{k+1}\pi + 6\pi k$

Respuesta: $x = 3\pi + 12\pi k$ y

$x = (-1)^{k+1}\pi + 6\pi k$

301. $3(1 - \operatorname{sen} x) = 1 + \cos 2x$.

Tomando en cuenta que

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, tenemos:

$3(1 - \operatorname{sen} x) = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

Las raíces son: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} x = 1$

Entonces tenemos: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ y

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

Respuesta: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ y

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

302. $\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 2$.

Tomando en cuenta que $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, tenemos: $1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x = 2$

Las raíces son: $\operatorname{sen} x = 1$ y $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, entonces tenemos: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ y

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ y

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

303. $52\operatorname{sen}^2 x + 100\cos x = 89$.

Tomando en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, tenemos: $52(1 - \cos^2 x) + 100\cos x = 89$

La ecuación se reduce a:

$52\cos^2 x - 100\cos x + 37 = 0$.

La raíz es: $\cos x = \frac{1}{2}$ (la raíz $\frac{37}{26}$ no es válida)

Respuesta: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

304. $\cos 4x + 2\cos 2x = 1$.

Tomando en cuenta que

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ y $\cos^2 x = 1 + \frac{\cos 2x}{2}$, utilizando la fórmula (25) tenemos:

$2\cos^2 2x - 1 + \frac{2(1 + \cos 2x)}{2} = 1$

La ecuación se reduce a:

$2\cos^2 2x + \cos^2 x - 1 = 0$

Las raíces son:

(1) $\cos 2x = -1$ y

(2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

De la primera ecuación tenemos:

$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ o $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

305. $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0.25$.

Tomando en cuenta la fórmula (25) tenemos: $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. La ecuación se reduce a:

$1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0.25$.

Tenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \frac{3}{4} = 0$

La raíz es: $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ (la raíz $\frac{3}{2}$ no es válida), entonces tenemos que:

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$

306. $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x - 4 = 0$.

Tomando en cuenta la fórmula (25):

$\cos^2 x = -1 - \operatorname{sen}^2 x$, tenemos:

$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 5\operatorname{sen} x - 4 = 0$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación cuadrática: $2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

La raíz es $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ (la raíz 2 no es válida).

Entonces tenemos que: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

Respuesta: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

307. $6\cot^2 x - 2\cos^2 x = 0$.

Tomando en cuenta que: $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ tenemos: $6\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - 2\cos^2 x = 0$

Multiplicando la ecuación por: $\operatorname{sen}^2 x$, donde $\operatorname{sen} x \neq 0$ o $x \neq \pi k$ tenemos: $6\cos^2 x - 2\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x = 0$

La ecuación se reduce a las dos siguientes:

(1) $\cos 2 = 0$ y

(2) $3 - \operatorname{sen}^2 x = 0$

De la primera ecuación tenemos:

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ y la segunda ecuación no tiene solución.

Respuesta: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

308. $\cos 2x - 5\operatorname{sen} x - 3 = 0$.

Tomando en cuenta la fórmula (25) tenemos: $1 - 2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x - 3 = 0$

La ecuación se reduce a:

$2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

Las raíces son (1) $\operatorname{sen} x = -2$ y

(2) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

La primera ecuación no tiene sentido y de la segunda tenemos: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$
Respuesta: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$

309. $12\cos^4 2x - 5\operatorname{sen}^4 2x + 5 = 0$.
Tomando en cuenta que
$\operatorname{sen}^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ y
$\operatorname{sen}^4 2x = (1 - \cos^2 2x)^2 = 1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x$ tenemos: $12\cos^4 2x - 5(1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x) + 5 = 0$
La ecuación se reduce a:
$7\cos^4 2x + 10\cos^2 2x = 0$
Al factorizar $\cos^2 2x$ obtenemos:
$\cos^2 2x(7\cos^2 2x + 10) = 0$
La ecuación se reduce a
(1) $\cos^2 2x = 0$ y
(2) $7\cos^2 2x + 40 = 0$
De la primera tenemos:
$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ o $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ y la segunda ecuación no tiene solución.
Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

310. Tenemos $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$.

311. $\dfrac{m^2 - 1}{2}$

312. $\dfrac{m\,(3 - m^2)}{2}$

313. $2 - m^2$

314. $\dfrac{1 - m^4 + 2m^2}{2}$

315. $\alpha = 30°$ y $\beta = 0°$ o $\alpha = 90°$ y $\beta = 60°$

316. $\alpha = 52°30'$ $\beta = 7°30'$

320. $\infty \in \left\langle -2, \frac{1}{4} \right\rangle$

321. $x \in \left\langle 2k\pi + \dfrac{7}{6}\pi; \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$ $k \in Z$

322. $x \neq \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi;$ $k \in Z$

323. $x \neq -\dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi;$ $k \in Z$

324. $x \neq \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi$ y $x \neq -\dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi;$ $k \in Z$

325. $x \in (2k\pi - \dfrac{2}{3}\pi; \ \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi);$ $k \in Z$

326. $x \in (2k\pi - \dfrac{2}{3}\pi; \ -\dfrac{1}{3}\pi + 2k\pi)$ o

$x \in (2k\pi + \dfrac{1}{3}\pi;$

$\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi);$ $k \in Z$

327. $x \in (k\pi - \dfrac{1}{4}\pi; \ \dfrac{1}{2}\pi + k\pi);$ $k \in Z$

328. $x \in (k\pi; \ \dfrac{1}{4}\pi + k\pi);$ $k \in Z$

329. $x \in (k\pi + \dfrac{3}{4}\pi; \ \pi + k\pi)$ o

$x \in (k\pi; \ \dfrac{1}{4}\pi + k\pi);$

$k \in Z$

330. $x = 2k\pi;$ $k \in Z$

331. $x \in (2k\pi - \dfrac{1}{2}\pi; \ \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi)$ o $x = k\pi;$

$k \in Z$

332. $x \in (\dfrac{1}{4}\pi + k\pi; \ \dfrac{3}{4}\pi + k\pi);$ $k \in Z$

333. $x \in \langle -\dfrac{1}{4}\pi + k\pi; \ \dfrac{1}{4}\pi + k\pi \rangle;$ $k \in Z$

337. $\operatorname{sen}2x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

338. $\cos 2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

358. 4.33 metros ;

359. 15 metros ;

360. 3.4 metros ;

361. 1.99 metros ;

362. 62.1 metros ;

363. 19, 178

364. 1.2118 km/h ;

365. $\frac{\pi}{6}$;

366. 129.9 metros ;

367. No, la separacion de las dos secciones es de 26.79 metros. ;

368. 23.42 ;

369. 193.44 metros ;

370. $4\sqrt{7}$ metros ;

371. 111.41 metros ;

372. 94.75 metros;

373. 64.4 metros;

374. 4.1 metros;

375. 303.4 metros;

376. 654 metros;

377. Los pueblos están a 6.86 y 4.59 Km, la altura del avion es de 956 metros;

378. 2.34 Km;

379. $K = \frac{1}{2}bc\,senA = \frac{1}{2}(\frac{a\,senB}{senA})(\frac{a\,senC}{senA})senA = \frac{a^2\,senB\,senC}{2senA}$

380. $2(ab + c^2)$

381. La altura Bk del paralelogramo ABCD es igual a $2ON = 2p$.

Como $\measuredangle BAk = \alpha$, $AB = \frac{2p}{sen\alpha}$.

Análogamente, $AD = \frac{2m}{sen\alpha}$.

se halla $S = AD \cdot Bk = \frac{4mp}{sen\alpha}$

Las diagonales se obtienen por la ley de los cosenos

$$BD = \frac{2\sqrt{p^2+m^2-2mp\cos\alpha}}{sen\alpha}$$

$$AC = \frac{2\sqrt{p^2+m^2+2mp\cos\alpha}}{sen\alpha}$$

382. del triángulo ABC tenemos:

$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B$

y como $\cos B = \cos(180 - A) = -\cos A$, entonces

$m^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ del triángulo ADC hallamos $m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos D$

Igualando esta expresion a la anterior, obtenemos:

$$2bc\cos A + 2ad\cos D = a^2 - b^2 + d^2 - c^2 \quad (1)$$

De la misma manera, considerando los triángulos ABC y CBD, obtenemos:

$$2ac\cos A + 2bd\cos D = a^2 - b^2 - (d^2 - c^2) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) dan $\cos A$ y $\cos D$, y entonces hallamos m^2 y n^2. Se procede así: se multiplica (1) por b y (2) por a y después se resta la primera ecuación de la segunda.

Se obtiene, $2(a^2 - b^2)c\cos A = (a^2 - b^2)(a - b) - (d^2 - c^2)(a + b)$

esto es $2c\cos A = a - b - \frac{d^2-c^2}{a-b}$

luego $m^2 = b^2 + c^2 + (2c\cos A)b = C^2 + ab - \frac{(d^2-c^2)b}{a-b} = \frac{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}{a-b}$

Análogamente se encuentra

$2d\cos D = a - b + \frac{d^2-c^2}{a-b}$

y así $n^2 = b^2 + d^2 + (2d\cos D)b = \frac{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}{a-b}$

Capítulo 7

3. a. $\log\frac{a}{c} = \log a - \log c$

b. $\ln\frac{xy^2}{z} = \ln x + 2\ln y - \ln z$

c. $\ln(abc) = \ln a + \ln b + \ln c$

d. $\ln\frac{a^2-1}{b^2} = \ln\left(a^2-1\right) - 2\ln b =$

$\ln(a-1) + \ln(a+1) - 2\ln b$

e. $\log a(a-2)^3 = \log a + 3\log(a-2)$

f. $\log_3 3a\sqrt{b} = 1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 b$

4. $3^x = e^{x-2}$. Al aplicar ln en ambos términos tenemos: $x\ln 3 = x - 2$ o $x = \frac{2}{1-\ln 3}$

5. $5^{x+1} = 5e^{2-x}$. Al aplicar ln en ambos términos tenemos: $(x+1)\ln 5 = \ln 5 + 2 - x$ o $x = \frac{2}{\ln 5 + 1}$

6. $2e^{3x} = 4e^{5x}$. Al aplicar ln en ambos términos tenemos: $\ln 2 + 3x = \ln 4 + 5x$ o

$x = \frac{\ln 2 - \ln 4}{2} = \frac{\ln 2 - 2\ln 2}{2} = -\frac{\ln 2}{2}$

7. $5^x = e^{x+4}$. La ecuación es equivalente a $x\ln 5 = x + 4$ o $x = \frac{4}{\ln 5 - 1}$

8. $9^x = 2e^x$. La ecuación es equivalente a $x\ln 9 = x + \ln 2$ o $x = \frac{\ln 2}{\ln 9 - 1} = \frac{\ln 2}{2\ln 3 - 1}$

9. $3^{x+4} = e^{5x}$. La ecuación es equivalente a $(x+4)\ln 3 = 5x$ o $x = \frac{4\ln 3}{5 - \ln 3}$

10. $\log_5 25 = 2$

$5^2 = 25$

11. $\log_3 1 = 0$

$3^0 = 1$

12. $\log_{0.5} 0.125 = 3$

$0.5^3 = 0.125$

13. $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

14. $e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}$

15. $3 \cdot 10^{\log a^3} = 3a^3$

16. $\log\left(10^{3ab}\right) = 3ab$

17. $\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln ab^2 = -1 + \ln a + 2\ln b$

18. $\log 10\sqrt{b} = 1 + \frac{1}{3}\log b$

19. $3\ln\left(AB^2\right) - \ln\frac{B}{A^2} =$

$3\ln A + 6\ln B - \ln B + 2\ln A = 5(\ln A + \ln B)$

20. a. $x\epsilon(-\infty, 3)$

b. $x\epsilon(-\infty, 0)$

c. $x\epsilon(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d. $x\epsilon(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

e. $x\epsilon(-2, 2)$

21. $a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23$

22. $a^2 + a^{-2} = (a - a^{-1})^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$

23. $a^2 + 4a^{-2} = (a + 2a^{-1})^2 - 4 = 5^2 - 4 = 5$

24. $a^2 + 9a^{-2} = (a - 3a^{-1})^2 + 6 = 5^2 + 6 = 31$

25. $a^2 + a^{-2} = (a - a^{-1})^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$

26. $a^2 + a^{-2} = (a - a^{-1})^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$

27. $27a^3 + 64a^{-3} = (3a)^3 + (4a^{-1})^3 =$

$(3a + 4a^{-1})(9a^2 - 12 + 16a^{-2}) =$

$2[(3a + 4a^{-1})^2 - 24] =$

$2(2^2 - 24) = -40$

28. $8a^{-3} - 125a^3 = (2a^{-1})^3 - (5a)^3 =$

$(2a^{-1} - 5a)(4a^{-2} + 10 + 25a^2) =$

$-(5a - 2a^{-1})[(5a - 2a^{-1})^2 + 30] =$

$-2(2^2 + 30) = -68$

29. $5^x + 4 \cdot 5^{-x} = \sqrt{(5x + 4.5^{-x})^2} =$

$\sqrt{5^{2x} + 8 + 16 \cdot 25^{-x}} = \sqrt{89 + 8} = \sqrt{97}$

30. $a^4 + a^{-4} = (a^2 + a^{-2})^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$

31. $a^2 + a^{-2} = \sqrt{(a^2 + a^{-2})^2} =$

$\sqrt{(a^2 - a^{-2})^2 + 4} = \sqrt{2^2 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

32. $2^x + 2^{-x} = \sqrt{(2^x - 2^{-x})^2 + 4} = \sqrt{4^2 + 4} =$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

33. $3^x + 3^{-x} = \sqrt{(3^x - 3^{-x})^2 + 4} =$

$\sqrt{5^2 + 4} = \sqrt{29}$

34. $a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})(a^2 - 1 + a^{-2}) =$

$(a + a^{-1})[(a + a^{-1})^2 - 3] = 2(2^2 - 3) = 2$

35. $4^x - 4^{-x} = 2^{2x} - 2^{-2x} =$

$(2^x - 2^{-x})(2^x + 2^{-x}) =$

$(2^x - 2^{-x})\sqrt{(2^x - 2^{-x})^2 + 4} =$

$2\sqrt{2^2 + 4} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

36. a. $\log_2 3 + \log_{36} 5$. Tomando en cuenta que:

$\frac{1}{\log_2 6} = a$ tenemos:

$\frac{1}{a} = \log_2 6 = \log_2 3 \cdot 2 = \log_2 3 + \log_2 2 =$

$\log_2 3 + 1$, entonces: $\log_2 3 = \frac{1}{a} - 1$

Por otra parte, $\log_{36} 5 = \log_{6^2} 5 = \frac{1}{2} b,$

entonces $\log_2 3 + \log_{36} 5 = \frac{1}{a} - 1 + \frac{b}{2}$

b. $\log_3 2 - \log_{\frac{1}{6}} 5$. Tenemos: $\frac{1}{a} = \log_2 6 =$

$\log_2 3 \cdot 2 = \log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 3 + 1 =$

$\frac{1}{\log_3 2} + 1$. Entonces: $\frac{1}{\log_3 2} = \frac{1}{a} - 1$ o

$\log_3 2 = \frac{1}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{a}{1 - a}$

Por otro lado: $-\log_{\frac{1}{6}} 5 = \log_{6^{-1}} 5^{-1} =$

$\log_6 5 = b$

Entonces, tenemos: $\log_3 2 - \log_{\frac{1}{6}} 5 =$

$\frac{a}{1 - a} + b$

c. $\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{b}{\log_6 3} = b \log_3 2 \cdot 3 =$

$b(\log_3 2 + 1).$

Del ejercicio anterior tenemos:

$\log_3 2 = \frac{a}{1 - a}$, de modo que

$\log_3 5 = b(\frac{a}{1 - a} + 1) = \frac{b}{1 - a}$

37. $\log_4 20 = \log_4 2 \cdot 10 = \log_4 2 + \log_4 10 =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{\log 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} = \frac{a + 1}{2a}$

38. $\log_{20} 8 = \frac{\log 8}{\log 20} = \frac{3 \log 2}{1 + \log 2}$ tenemos:

$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - a$

Entonces: $\log_{20} 8 = \frac{3(1 - a)}{1 + (1 - a)} =$

$\frac{3(1 - a)}{2 - a}$

39. $\log 56 = \frac{\log_2 56}{\log_2 10} = \frac{\log_2 14 \cdot 4}{\log_2 10} =$

$\frac{\log_2 14 + \log_2 2^2}{\frac{1}{\log 2}} =$

$\frac{\log_2 2 \cdot 7 + 2}{\frac{1}{a}} = \frac{1 + \log_2 7 + 2}{\frac{1}{a}} = (3 + b)a$

40. $\log 108 = \frac{\log_2 108}{\log_2 10} = \frac{\log_2 36 \cdot 3}{\frac{1}{\log_{10} 2}} =$

$\frac{\log_2 6^2 + \log_2 3}{\frac{1}{a}} = \frac{2 \log_2 2 \cdot 3 + 6}{\frac{1}{a}} =$

$\frac{2(\log_2 2 + \log_2 3) + b}{\frac{1}{a}} = \frac{2(1 + b) + b}{\frac{1}{a}} = a(2 + 3b)$

41. Tenemos: $3\log_b ab^{\frac{1}{3}} - 2\log_b ab =$

$3\log_b a + 1 - 2\log_b a - 2 = \log_b a - 1$

Entonces, tenemos $\log_b a - 1 = 1$ o $\log_b a = 0$

42. Tenemos: $\log_c ab^2 = \log_c a + 2\log_c b = \dfrac{\log_b a}{\log_b c} + 8 =$

$\dfrac{5}{4} + 8 = \dfrac{37}{4}$

43. Tenemos: $\log_a \sqrt[4]{\dfrac{ab}{c}} =$

$\dfrac{1}{4}\log_a a + \dfrac{1}{4}\log_a b - \dfrac{1}{4}\log_a c =$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\log_b a} - \dfrac{3}{4}\log_a c^{\frac{1}{3}} =$

$\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\log_b a - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{65}{32}$

44. Tenemos: $\log_{ac} = b = \dfrac{1}{\log_b ac} = -\log_b ac =$

$-\log_b a - \log_b c = -3 - 4 = -7$

45. Tenemos: $\log_{ac} = \log_a b + \log_c b = 2 + 3 = 5$

46. Tenemos: $4\log_{\sqrt[3]{a^2}} b + 2\log_{a^2} b^2 =$

$\dfrac{3}{2} \cdot 4\log_a b + 2\log_a b = (6+2)\log_a b = 8\log_a b$

Según los datos $8\log_a b = 18$, por lo que

$\log_a b = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

47. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}} =$

$\sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

48. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} =$

$3^{4\log_3 5} + 3^{3\log_3 6} + 3^{4\log_9 7} = 5^4 + 6^3 + \sqrt{7}^4 = 890$

49. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2\dfrac{1}{8} =$

$-\log_2 2^{-3} = 3$

50. $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = -\log_3\log_3 3^{\frac{1}{9}} =$

$-\log_3\dfrac{1}{9} = -\log_3 3^{-2} = 2$

51. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25}49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16}25}} \cdot 5^{\log_5 3}} =$

$\dfrac{(2^3+7)(2^4-3^3)}{3+4\cdot 3} = -11$

52. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36} =$

$5^2 + \dfrac{10}{10^{\log 2}} - 3^{\log_3 6} = 25 + 5 - 6 = 24$

53. $\log_2 1.6 + \log_2 10 - 2^{\log_2\sqrt{3}\cdot\log_2 4} =$

$\log_2 0.4 \cdot 4 + \log_2 5.2 - 4\sqrt{3} =$

$\log_2\dfrac{2}{5} + \log_2 2^2 + \log_2 5 + \log_2 2 - 4\sqrt{3} =$

$\log_2 2 - \log_2 5 + 2 + \log_2 5 + 1 - 4\sqrt{3} =$

$4 - 4\sqrt{3} = 4(1 - \sqrt{3})$

54. Usando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$\log_3\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\log_3 5$

$\log_7 81 = \log_7 3^4 = 4 = \log_7 3$

$\log_5 35 - 1 = \log_5\dfrac{35}{5} = \log 7$

Entonces, tenemos lo siguiente:

$7\log_5\sqrt{5} \cdot \log_7 81 \cdot (\log_5 35 - 1) =$

$14\log_3 5 \cdot \log_7 3 \cdot \log_5 7 =$

$14\dfrac{\log 5}{\log 3}\dfrac{\log 3}{\log 7}\dfrac{\log 7}{\log 5} = 14$

55. $(\sqrt{5}^{\log_5 4} + \log_2\dfrac{1}{4} - \log_4 2)\log_{\sqrt{3}} 9 =$

$\left(5^{\frac{\log_5 4}{2}} + \log_2 2^{-2} - \dfrac{1}{2}\log_2 2\right)\log_3 9^2 =$

$\left(\sqrt{4} - 2 - \dfrac{1}{2}\right)4 = \left(\sqrt{4} - \dfrac{5}{2}\right)4 =$

$2(2\sqrt{4} - 5)$

56. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}} =$

$-\log_2\dfrac{1}{8} = -\log_2 2^{-3} = 3$

57. $\log_3 81\log_2\dfrac{1}{4} + \sqrt{10}^{\log 9} =$

$$\log_3 3^4 \log_2 2^{-2} + 10^{\frac{1}{2}\log 3^2} = -8 + 1 = -7.$$

58. $x = \frac{5}{6}$

59. $x = 175$

60. $x = \sqrt{5}$

61. $x = 9$

62. $x = 6$

63. $x = 16$

64. $x_1 = 2, x_2 = 4$

65. $x_1 = \dfrac{1}{27}, x_2 = 3$

66. $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

67. $x = 6$

68. $x = -3$

69. $x_1 = -1, x_2 = 2$

70. $x_1 = 0, x_2 = 1$

71. $x = 0$

72. $x = 1$

73. $x = 1$

74. $x_1 = 0, x_2 = 1$

75. $x = 0$

76. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ T, así que $\log_3 \log_2 x = 1$, donde $\log_2 x = 3$ o $x = 8$

Respuesta: $x = 8$

77. $\log_a\{1 + \log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)]\} = 0.$

Tenemos $1 + \log_b\left[1 + \log_c(1 + \log_p x)\right] = 1;$

$\log_b\left[1 + \log_c(1 + \log_p x)\right] = 0$, entonces

$1 + \log_c(1 + \log_p x) = 1; \log_c(1 + \log_p x) = 0;$

$1 + \log_p x = 1; \log_p x = 0; x = 1$

Respuesta: 1

78. $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

Tome en cuenta que $1 + 3\log_2 x > 0$, ya que un número negativo no tiene logaritmo en base 4.

Respuesta: $x = 2$

79. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6.$ La ecuación dada se reduce al sistema siguiente:

$$\begin{cases} (x+14)(x+2) = 2^6 \\ x + 14 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 2$

80. $\log_a y + \log_a(y + 5) + \log_a 0.02 = 0.$ La ecuación dada es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 0.02y(y+5) = 1 \\ y > 0 \\ y + 5 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $y = 5$

81. $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3.$ La ecuación dada es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 35 - x^3 = (5 - x)^3 \\ 35 - x^3 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

82. $\log(x^2 - 12x + 20) = \log(4x - 8).$ La ecuación dada es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 20 = 4x - 8 \\ x^2 - 12x + 20 > 0 \\ 4x - 8 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 14$

83. $\log(3x - 9) = \log(x^2 - 9x + 18).$ La ecuación dada es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x - 9 = x^2 - 9x + 18 \\ 3x - 9 > 0 \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \end{cases}$$

84. $\log(x^2 - 9x + 18) = \log(2x - 9) + \log 2$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 18 = 2(2x - 9) \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \\ 2x - 9 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 9$

85. $2 \cdot \log_{25}(x - 3) - 1 = \log_5(x - 7)$. Tomando en cuenta que $2 \cdot \log_{25}(x - 3) = \log_5(x - 3)$, consideramos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 3}{x - 7} = 5 \\ x - 3 > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 8$

86. $\log_{12}(x - 7) = 1 - \log_{12}(x - 3)$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} (x - 7)(x - 3) = 12 \\ x - 7 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 9$

87. $\log(x^2 - 12x + 11) = \log(3x - 25)$. La ecuación dada es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 11 = 3x - 25 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \\ 3x - 25 > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 12$

88. $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$. La ecuación dada es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6x + 1 = (x + 1)^2 \\ x + 1 > 0,\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_1 = 1, x_2 = 4$

89. $\dfrac{1}{2}\log_{x+2}(2x + 4) = 1$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4 = (x + 2)^2 \\ x + 2 > 0,\ x + 2 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 0$

90. $\log_{x-2}(4 + 6x) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 4 + 6x = (x - 2)^2 \\ x - 2 > 0,\ x - 2 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 10$

91. $\log_{x-1}(3x + 1) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 1 = (x - 1)^2 \\ x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 4$

92. $\log_{x+1}(4x + 1) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 4x + 1 = (x + 1)^2 \\ x + 1 > 0,\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 2$

93. $\dfrac{1}{2}\log_{x+4}(16 - 2x) = 1$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 16 - 2x = (x + 4)^2 \\ x + 4 > 0,\ x + 4 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 0$

94. $\log_{x-3}(9 + 6x) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 9 + 6x = (x-3)^2 \\ x-3 > 0,\ x-3 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 12$

95. $\log_{x-3}(9-2x) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema: $\begin{cases} 9-2x = (x-3)^2 \\ x-3 > 0,\ x-3 \neq 1 \end{cases}$

Observamos que el sistema no tiene solución.

Respuesta: $\varnothing$

96. $\log_{x-1}(2x+1) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema: $\begin{cases} 2x+1 = (x-1)^2 \\ x-1 > 0,\ x-1 \neq 1 \end{cases}$

Respuesta: $x = 4$

97. $\log_{x+1}(1+4x) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema: $\begin{cases} 1+4x = (x+1)^2 \\ x+1 > 0,\ x+1 \neq 1 \end{cases}$

Respuesta: $x = 2$

98. $\log_x(6+x-x^2) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema: $\begin{cases} 6+x-x^2 = x^2 \\ x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$

Respuesta: $x = 2$

99. $\log_{2x-6}(3x^2-17x+26) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x^2-17x+26 = (2x-6)^2 \\ 2x-6 > 0,\ 2x-6 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 5$

100. $\log_{x-1}(5x-x^2-2) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-x^2-2 = (x-1)^2 \\ x-1 > 0,\ x-1 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 3$

101. $\log_{x-4}(2x^2-11x-2) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x^2-11x-2 = (x-4)^2 \\ x-4 > 0, \quad x-4 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 6$

102. $\log_{x-1}(4+3x-x^2) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 = (x-1)^2 \\ x-1 > 0, \quad x \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 3$

103. $\log_{2x-2}(2x^2+3x-1) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x^2+3x-1 = (2x-2)^2 \\ 2x-2 > 0, \quad 2x-2 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 5$

104. $\log_{x+1}(3-x-x^2) = 2$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3-x-x^2 = (x+1)^2 \\ x+1 > 0, \quad x+1 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = \dfrac{1}{2}$

105. $\log_{x+1}(x^2-5x-6) = 1$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x^2-5x-6 = x+1 \\ x+1 > 0, \quad x+1 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 7$

106. $\log_{x-2}(x^2-4x+2) = 1$. La ecuación es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x^2-4x+2 = x-2 \\ x-2 > 0, \quad x-2 \neq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 4$

107. $\log_4^2(x+1) = 1$. La ecuación es equivalente a los dos sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} \log_4(x+1) = 1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log_4(x+1) = -1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Del primer sistema tenemos $x_1 = 3$ y del segundo sistema $x_2 = -\dfrac{3}{4}$

Respuesta: $x_1 = 3,\ x_2 = -\dfrac{3}{4}$

108. $|\log x^2| = 4$. La ecuación dada es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

a) $\log x^2 = 4$ **b)** $\log x^2 = -4$

De la primera ecuación tenemos $x^2 = 10^4$ o $x_{1,2} = \pm 10$ y de la segunda ecuación tenemos $x^2 = \dfrac{1}{10^2}$ o $x_{3,4} = \pm\dfrac{1}{10}$

Respuesta: $x_1 = 10,\ x_2 = -10,$

$$x_3 = \frac{1}{10},\ x_4 = -\frac{1}{10}$$

109. $\log(x+1) \cdot \log(x+1)^2 = 8$. La ecuación es equivalente a $2\log^2(x+1) = 8$ o a los dos sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} \log(x+1) = 2 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log(x+1) = -2 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Del primer sistema tenemos $x_1 = 99$ y del segundo sistema $x_2 = -\dfrac{99}{100}$

Respuesta: $x_1 = 99,\ x_2 = -\dfrac{99}{100}$

110. $\log(1-x) \cdot \log(1-x)^{-2} + 8 = 0$. La ecuación es equivalente a la ecuación siguiente: $-2\log^2(1-x) + 8 = 0$ o $\log^2(1-x) = 4$; entonces, tenemos los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} 1-x = 10^2 \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 1-x = 10^{-2} \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

Del primer sistema tenemos $x = -99$ y del segundo sistema $x = \dfrac{99}{100}$

Respuesta: $x_1 = -99,\quad x_2 = \dfrac{99}{100}$

111. $|\log(x-2)| = 1$. La ecuación es equivalente a los dos sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} x-2 = 10 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-2 = 10^{-1} \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

Del primer sistema tenemos $x = 12$ y del segundo sistema $x = \dfrac{21}{10}$

Respuesta: $x_1 = 12,\quad x_2 = \dfrac{21}{10}$

112. $\log^2 x^2 = 4$. La ecuación dada es equivalente a las dos siguientes:

a) $\log x^2 = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$

De la primera tenemos $x^2 = 10^2$ o $x = \pm 10$ y de la segunda $x^2 = 10^{-2}$ o $x = \pm\dfrac{1}{10}$

Respuesta: $x_1 = 10,\ x_2 = -10,$

$$x_3 = \frac{1}{10},\ x_4 = -\frac{1}{10}$$

113. $|\log^2 x| = 1$. La ecuación es equivalente a los dos sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} \log x = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log x = -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_1 = 10,\ x_2 = \frac{1}{10}$

114. $1 - \log_4^2(x-1)^2 = 0$. La ecuación es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

a) $\log_4(x-1)^2 = 1$ **b)** $\log_4(x-1)^2 = -1$

De la primera tenemos: $(x-1)^2 = 4$ o

$x_1 = 3,\ x_2 = -1$ y de la segunda

$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$ o $x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x_1 = 3,\ x_2 = -1,$
$x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = \frac{1}{2}$

115. $\log(2-x)^2 = \dfrac{3}{\log(2-x)}$. La ecuación es equivalente a $\log^2(2-x) = \frac{3}{2}$,

así que tenemos los dos sistemas siguientes:

a)

$$\begin{cases} 2-x = 10^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2-x = 10^{-\sqrt{\frac{3}{2}}} \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_1 = 2 - 10^{\sqrt{\frac{3}{2}}},\ x_2 = 2 - 10^{-\sqrt{\frac{3}{2}}}$

116. $\frac{1}{4}\log(3-x)^4 - \dfrac{4}{\log(3-x)} = 0.$

La ecuación dada es equivalente a

$\log^2(3-x)^4 = 16,\quad \log(3-x) \neq 0,$ de modo que tenemos los sistemas siguientes:

a)

$$\begin{cases} (3-x)^4 = 10^4 \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (3-x)^4 = 10^{-4} \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

Del primer sistema tenemos $x = -7$

(la raíz $x = 13$ no es válida) y

del segundo sistema $x = \frac{29}{10}$

(la raíz $x = \frac{31}{10}$ no es válida)

Respuesta: $x_1 = -7,\quad x_2 = \frac{29}{10}$

117. $3 \cdot \log^2 x - 2 \cdot \log x^2 + 1 = 0$. La ecuación es equivalente a $3\log^2 x - 4\log x + 1 = 0$.

Al resolver la ecuación cuadrática tenemos:

a) $\log x = 1$ **b)** $\log x = \frac{1}{3}$

Entonces $x_1 = 10$ o $x_2 = \sqrt[3]{10}$

Respuesta: $x_1 = 10,\ x_2 = \sqrt[3]{10}$

118. $3 \cdot \log_2^2 x + \log_2 x^4 + 1 = 0$. La ecuación es equivalente a $3\log_2^2 x + 4\log_2 x + 1 = 0$

Al resolver la ecuación cuadrática tenemos:

a) $\log_2 x = -1$ **b)** $\log_2 x = -\frac{1}{3}$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 2^{-1}$ y

de la segunda $x_2 = 2^{-\frac{1}{3}}$

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

119. $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$. Al resolver la ecuación tenemos:

a) $\log_5 x = -2$ **b)** $\log_5 x = 1$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 5^{-2}$ y

de la segunda $x_2 = 5$

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{25},\ x_2 = 5$

120. $3 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática tenemos:

a) $\log_2 x = 1$ **b)** $\log_2 x = -\frac{2}{3}$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 2$ y

de la segunda $x_2 = 2^{-\frac{2}{3}}$

Respuesta: $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

121. $2 \cdot \log_4^2 x - \log_4 x^5 + 2 = 0$. La ecuación es equivalente a $2\log_4^2 x - 5\log_4 x + 2 = 0$,

por lo que

a) $\log_4 x = 2$ **b)** $\log_4 x = \frac{1}{2}$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 4^2$ y

de la segunda $x_2 = 4^{\frac{1}{2}}$

Respuesta: $x_1 = 16,\ x_2 = 2$

122. $\log_6^2 x - \log_6 x^2 + 2 = 0$. La ecuación

es equivalente a $\log_6^2 x - 2\log_6 x + 2 = 0$

y la ecuación dada no tiene solución.

Respuesta: $\varnothing$

123. $2\log_4^2 x - \log_4 x^5 - 3 = 0$. La ecuación

es equivalente a $2\log_4^2 x - 5\log_4 x - 3 = 0$

Al resolver la ecuación tenemos:

a) $\log_4 x = 3$ **b)** $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 3^4$ y

de la segunda $x_2 = 4^{-\frac{1}{2}}$

Respuesta: $x_1 = 81,\ x_2 = \frac{1}{2}$

124. $2\log_4^2 x + 2\log_4 4x - 2 = 0$. Tomando

en cuenta que $\log_4 4x = \log_4 4 + \log_4 x =$

$1 + \log_4 x$ tenemos:

$2\log_4^2 x + 2(1 + \log_4 x) - 2 = 0$ o

$2\log_4^2 x + 2\log_4 x = 0$

y la ecuación resultante es equivalente

a las dos siguientes:

a) $\log_4 x = 0$ **b)** $\log_4 x = -1$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 1$ y

de la segunda $x_2 = 4^{-1}$

Respuesta: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{4}$

125. $\log_2^2 x + 4\log_4 2x = 1$. Tomando en cuenta que

$\log_4 2x = \log_4 2 + \log_4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x$ tenemos:

$\log_2^2 x + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x\right) = 1$ o

$\log_2^2 x + 2\log_4 x + 1 = 0$

y la ecuación dada es equivalente a

$\log_2 x = -1$ o $x = 2^{-1}$

Respuesta: $x = \frac{1}{2}$

126. $3\log^2 x - \log x = 1$. La ecuación

es equivalente a $6\log^2 x - \log x - 1 = 0$,

así que tenemos dos ecuaciones:

a) $\log x^2 = \frac{1}{2}$ **b)** $\log x^2 = -\frac{1}{3}$

De la primera ecuación tenemos

$x^2 = \sqrt{10}$ o $x = \pm 10^{\frac{1}{4}}$ y

de la segunda $x^2 = 10^{-\frac{1}{3}}$ o $x = \pm 10^{-\frac{1}{6}}$

Respuesta: $x_1 = \sqrt[4]{10},\ x_2 = -\sqrt[4]{10}$,

$x_3 = \frac{1}{\sqrt[6]{10}},\ x_4 = -\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$

127. $3\log^2 x^2 - \log x = 1$. Tomando en cuenta que

$\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$ tenemos

$\log_3^2 x - (1 + \log_3 x) = -1$ o $\log_3^2 x - \log_3 x = 0$

Entonces, la ecuación se reduce a las siguientes:

a) $\log_3 x = 0$ **b)** $\log_3 x = 1$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 1$ y

de la segunda $x_2 = 3$

Respuesta: $x_1 = 1,\ x_2 = 3$

128. $3\log_5^2 x = 3 - 2\log_5 5x$. Tomando en cuenta que

$\log_5 5x = \log_5 5 + \log_5 x = 1 + \log_5 x$

tenemos:

$3\log_5^2 x = 3 - 2(1 + \log_5 x)$ o

$3\log_5^2 x + 2\log_5 x - 1 = 0$

y la ecuación dada es equivalente a las dos siguientes:

a) $\log_5 x = -1$ **b)** $\log_5 x = \frac{1}{3}$

De la primera tenemos $x_1 = \frac{1}{5}$ y

de la segunda $x_2 = \sqrt{5}$

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \sqrt{5}$

129. $\log^2 x^2 + 2\log 10x - 4 = 0$. Tomando en cuenta que $\log 10x = \log 10 + \log x = 1 + \log x$ y $\log^2 x^2 = (\log x^2)^2 = 4\log^2 x$ tenemos: $4\log^2 x + 2(1+\log x) - 4 = 0$ y la ecuación dada es equivalente a: $4\log^2 x + 2\log x - 2 = 0$

Entonces, tenemos las ecuaciones siguientes:

a) $\log x = -1$ **b)** $\log x = \frac{1}{2}$

De la primera tenemos $x_1 = \frac{1}{10}$ y de la segunda $x_2 = \sqrt{10}$

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$

130. $\log^2 x^2 - 3\log x - 1 = 0$. La ecuación dada es equivalente a: $4\log^2 x - 3\log x - 1 = 0$, con lo que tenemos las ecuaciones siguientes:

a) $\log x = 1$ **b)** $\log x = -\frac{1}{4}$

De la primera tenemos $x_1 = 10$ y de la segunda $x_2 = 10^{-\frac{1}{4}}$

Respuesta: $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

131. $4\log_3^2 x - 7\log_3 3x + 7 = 0$. Tomando en cuenta que $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$, tenemos $4\log_3^2 x - 7(1 + \log_3 x) + 7 = 0$ o $4\log_3^2 x - 7\log_3 x = 0$ y la ecuación es equivalente a las ecuaciones siguientes:

a) $\log_3 x = 0$ **b)** $4\log_3 x = 7$

De la primera tenemos $x_1 = 1$ y de la segunda $x_2 = 3^{\frac{7}{4}}$

Respuesta: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[4]{3^7}$

132. $x^{\log x} = 1000x^2$. Aplicando log en ambos lados y tomando en cuenta que $x > 0$ tenemos

$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$ o

$\log^2 x = \log 1000 + \log x^2$

Entonces, tenemos $\log^2 x - 2\log x - 3 = 0$, donde

a) $\log x = -1$ **b)** $\log x = 3$

Respuesta: $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 1000$

133. $2^{x^2} = 16$. Tenemos $2^{x^2} = 2^4$ o $x^2 = 4$, $x = \pm 2$

Respuesta: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

134. $4^x = \frac{1}{64}$. Tenemos $4^x = 4^{-3}$ o $x = -3$

Respuesta: $x = -3$

135. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$. Tenemos

$2^{x^2-x-3} = 2^{-1}$ o $x^2 - x - x = -1$

Respuesta: $x_1 = -1, x_2 = 2$

136. $(2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 2 = 0$. Al denotar

$2^x = u$, $u > 0$ tenemos

$u^2 - 3u + 2 = 0$, donde $u_1 = 2$, $u_2 = 1$

Entonces, $2^x = 2$ o $x = 1$ y $2^x = 1$ o $x = 0$

Respuesta: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$

137. $9^x + 4\cdot 3^x - 5 = 0$. Al denotar

$3^x = u$, $u > 0$ tenemos

$u^2 + 4u - 5 = 0$, donde $u = 1$

(la raíz $u = -5$ no es válida).

Entonces, $3^x = 1$ o $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

138. $7^{x+1} - 7^{x-1} = 48$. La ecuación es equivalente a:

$7\cdot 7^x - \frac{7^x}{7} = 48$ o $7^x = 7$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

139. $15\cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^x = 27$.

La ecuación es equivalente a:

$5\cdot 3^x + 3\cdot 3^x + 3^x = 27$ o

$3^x = 3$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

140. $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$. Al denotar $9^x = u^2$ y $3^x = u$, donde $u > 0$ tenemos:

$u^2 - 4u + 3 = 0$

Tenemos $u = 1$ o $u = 3$

Entonces, $3^x = 1$ o $3^x = 3$

Respuesta: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

141. $9 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^x + 1 = 0$. Tenemos $9^x + 2 \cdot 3^x + 1 = 0$. Al denotar $9^x = u^2$ y $3^x = u$ obtenemos: $u^2 + 2u + 1 = 0$, donde $u = -1$. Tomando en cuenta que $3^x > 0$ concluimos que la ecuación dada no tiene solución.

Respuesta: $\varnothing$

142. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$. La ecuación es equivalente a: $49 \cdot 7^x + \dfrac{4 \cdot 7^x}{7} = 347$ o $7^x = 7$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

143. $4^{x-1} + 3 \cdot 4^{x+1} = 196$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{4^x}{4} + 12 \cdot 4^x = 196$ o $4^x = 16$, $x = 2$

Respuesta: $x = 2$

144. $3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x+1} = 138$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{3^{2x}}{3} + 15 \cdot 3^{2x} = 138$ o $3^{2x} = 9$, $3^{2x} = 3^2$, $2x = 2$

Respuesta: $x = 1$

145. $4^{-x+1} - 3 \cdot 4^{-x-1} = 52$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{4}{4^x} - \dfrac{3}{4 \cdot 4^x} = 52$ o $\dfrac{1}{4^x} = 16$, $4^{-x} = 4^2$, $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

146. $5^{1-x} + 3 \cdot 5^{2-x} = 80$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{5}{5^x} + \dfrac{75}{5^x} = 80$ o $\dfrac{80}{5^x} = 80$, $5^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

147. $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^{2x-3} = 72$. La ecuación es equivalente a: $2 \cdot 2^{2x} - \dfrac{7 \cdot 2^{2x}}{8} = 72$ o $2^{2x} = 64$, $2^{2x} = 2^8$, $2x = 8$, $x = 4$

Respuesta: $x = 4$

148. $3^{-x} + 2 \cdot 3^{1-x} = 21$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{1}{3^x} + \dfrac{6}{3^x} = 21$ o $3^x = \dfrac{1}{3}$, $x = -1$

Respuesta: $x = -1$

149. $5^{x+2} - 7 \cdot 5^{x-1} = 118$. La ecuación es equivalente a: $25 \cdot 5^x - \dfrac{7 \cdot 5^x}{5} = 118$ o $5^x = 5$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

150. $2^{3-x} + 5 \cdot 2^{1-x} = 144$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{8}{2^x} + \dfrac{10}{2^x} = 144$ o $2^x = \dfrac{1}{8}$, $2^x = 2^{-3}$, $x = -3$

Respuesta: $x = -3$

151. $6^{x+1} + 4 \cdot 6^{x-1} = 40$. La ecuación es equivalente a: $6 \cdot 6^x + \dfrac{2 \cdot 6^x}{3} = 40$ o $6^x = 6$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

152. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-3} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}$. La ecuación es equivalente a:

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-3x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$ o podemos escribir $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$, $9 - x = \dfrac{x}{2}$, $x = 6$

Respuesta: $x = 6$

153. $\left(\dfrac{5}{12}\right)^x \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{x-1} = (0,3)^{-1}$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{5^x}{6^x \cdot 2^x} \cdot \dfrac{6 \cdot 6^x}{5 \cdot 5^x} = \dfrac{10}{3}$ o $\dfrac{1}{2^x} = 4$, $2^{-x} = 2^2$, $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

154. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^{x-1} = \dfrac{40}{3}$. La ecuación es equivalente a: $\dfrac{5^x}{3^x} \cdot \dfrac{10 \cdot 3^x}{32^x \cdot 5^x} = \dfrac{40}{3}$ o $\dfrac{1}{2^x} = 4$, $2^{-x} = 2^2$, $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

155. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+1} = \dfrac{5}{2}$

La ecuación es equivalente a:

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2x-2} = \dfrac{5}{2}$ o

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} = \frac{5}{2}$, $x - 2 = 1$, $x = 3$

Respuesta: $x = 3$

156. $2^{x+2} \cdot 3^{x-2} = 16 \cdot 36^{x-2}$. La ecuación es equivalente a: $\frac{4 \cdot 2^x \cdot 3^x}{9} = 16 \cdot 6^{2x-4}$, tomando en cuenta que $2^x \cdot 3^x = 6^x$ tenemos:

$\frac{4}{9} \cdot 6^x = 16 \cdot 6^{2x-4}$ o $6^x = 36$, $x = 2$

Respuesta: $x = 2$

157. $\left(\frac{7}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{x-1} = \frac{14}{3}$. La ecuación dada es equivalente a: $\frac{7^x}{2^x \cdot 6^x} \cdot \frac{7 \cdot 6^x}{6 \cdot 7^x} = \frac{14}{3}$

o $\frac{1}{2^x} = 2$, $x = -1$

Respuesta: $x = -1$

158. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$. La ecuación es equivalente a:

$3^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot 2^{2x}$ o $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$

Al denotar $\left(\frac{3}{2}\right)^x = u$, $u > 0$ tenemos

$u^2 + u - 2 = 0$, donde $u = 1$

(la raíz $u = -2$ no es válida).

Entonces $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

159. $9 \cdot 4^{x-1} + 8 \cdot 9^{x-1} = 3 \cdot 6^x$. La ecuación es equivalente a: $\frac{9}{4} \cdot 4^x + \frac{8}{9} \cdot 9^x = 3 \cdot 6^x$ o

al dividir entre 6^x tenemos:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = 3$. Al denotar

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = u$, $u > 0$ tenemos $u + \frac{2}{u} = 3$.

Al resolver la ecuación tenemos dos raíces $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Entonces, tenemos

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 2$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 2$ y de la segunda $x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} + 2$

Respuesta: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} + 2$

160. $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$. Al dividir entre 3^x tenemos $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ o

$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Al denotar $2^x = u$, $u > 0$ tenemos $u^2 - 6u + 8 = 0$, donde las raíces son $u_1 = 2$, $u_2 = 4$. Entonces,

$2^x = 2$ o $x_1 = 1$ y $2^x = 4$ o $x_2 = 2$

Respuesta: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

161. $7 \cdot 9^x + 4 \cdot 21^x - 3 \cdot 49^x = 0$. Al dividir entre 49^x tenemos

$7\left(\frac{3}{7}\right)^{2x} + 4\left(\frac{3}{7}\right)^x - 3 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática resultante

obtenemos: $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7}$

(la raíz -1 no es válida). Entonces, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

162. $7 \cdot 25^x + 2 \cdot 35^x - 5 \cdot 49^x = 0$.

Al dividir entre 49^x tenemos

$7\left(\frac{5}{7}\right)^{2x} + 2\left(\frac{5}{7}\right)^x - 5 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática resultante obtenemos:

$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{5}{7}$ (la raíz -1 no es válida).

Entonces, $x = -1$

Respuesta: $x = -1$

163. $4 \cdot 09^x + 12^x = 3 \cdot 4^{2x}$. Al dividir entre 4^{2x}

tenemos: $4\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 3 = 0$.

Al resolver la ecuación cuadrática resultante obtenemos: $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$ o $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

164. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. Al dividir entre 81^x tenemos

$3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 = 5\left(\frac{4}{9}\right)^x$. Al resolver la ecuación obtenemos:

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ b) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 0$ y de la segunda $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

165. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

Al dividir entre 6^x tenemos

$81\left(\frac{3}{2}\right)^x + 45 - 36\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ o

$81\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 45\left(\frac{3}{2}\right)^x - 36 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática resultante obtenemos:

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$ (la raíz -1 no es válida) $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

166. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x = 17 \cdot 2^{2x+2}$. La ecuación dada se reduce a: $45 \cdot 6^x = 20 \cdot 4^x$ o

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$, $x = -2$.

Respuesta: $x = -2$

167. $8^x + 12^x = 2 \cdot 27^x$. Al dividir entre 27^x obtenemos $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 2$ o

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

168. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$. Al dividir entre 27^x obtenemos

$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$ o

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

169. $9^x + 6^x = 15 \cdot 2^{2x-2}$. Al dividir la ecuación entre 9^x tenemos

$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{15}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$ o

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x = \frac{1}{2}$

170. $3 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$. La ecuación dada se reduce a:

$3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 2$ o

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}$, $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

171. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

La ecuación es equivalente a:

$4^x \cdot 9^x - \frac{6^{3x}}{3} + \frac{4^{2x} \cdot 9^{2x}}{36} = 0$ o

$6^{2x} - \frac{6^{3x}}{3} + \frac{6^{4x}}{36} = 0$. Al dividir entre 6^{2x} tenemos

$1 - \frac{6^x}{3} + \frac{6^{2x}}{36} = 0$, donde $6^x = 6$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

172. $3^{3x} + 2 \cdot 48^x = 3 \cdot 64^x$. Al dividir entre 64^x obtenemos

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^x = 3$ o $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

173. $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$. La ecuación dada es equivalente a:

$\frac{2^x}{2} - 3^x = \frac{3^x}{3} - 4 \cdot 2^x$ o $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $x = 3$

Respuesta: $x = 3$

174. $2^{x-1} - 5^x = 5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x+1}$. La ecuación dada es equivalente a:

$\frac{2^x}{2} - 5^x = \frac{5^x}{25} - 6 \cdot 2^x$ o $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^2$, $x = 2$

Respuesta: $x = 2$

175. $5^{x+1} - 4^{x-1} = 5^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1}$.

La ecuación dada es equivalente a:

$5 \cdot 5^x - \frac{4^x}{4} = \frac{5^x}{5} + \frac{23}{4} \cdot 4^x$ o

$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{4}{5}$, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

176. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2$. La ecuación es equivalente a: $\frac{3}{5} \cdot 5^{2x} - \frac{2}{5} \cdot 5^x = \frac{1}{5}$ o

$5^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

177. $6^{x+1} + 5^{x+2} = 6^{x+2} - 5^{x+1}$. La ecuación es equivalente a:

$6 \cdot 6^x + 25 \cdot 5^x = 36 \cdot 6^x - 5 \cdot 5^x$ o

$\left(\frac{6}{5}\right)^x = 1$, $x = 0$

Respuesta: $x = 0$

178. $4^x + 9^{x+1} = 2 \cdot 4^{x+1} - \frac{3}{2}9^x$. La ecuación es equivalente a:

$4^x - 9 \cdot 9^x = 8 \cdot 4^x - \frac{3}{2} \cdot 9$ o

$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3}$, $2x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

Respuesta: $x = -\frac{1}{2}$

179. $7^{x-5} + 3^{x-4} = 7^{x-4} - 3^{x-4}$. La ecuación dada es equivalente a:

$\left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^5$ o $x = 5$

Respuesta: $x = 5$

180. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$. La ecuación dada es equivalente a:

$4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$ o

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$, $2^x = 8$, $x = 3$

Respuesta: $x = 3$

181. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$. La ecuación dada es equivalente a:

$\frac{3^{2x^2}}{9} - \frac{4 \cdot 3^{x^2}}{3} + 3 = 0$, con lo que obtenemos las ecuaciones siguientes:

a) $3^{x^2} = 9$ **b)** $3^{x^2} = 3$

De la primera ecuación tenemos

$x^2 = 2$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ y

de la segunda $x^2 = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$

Respuesta: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

182. $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$. La ecuación es equivalente a: $3^{2\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

Al denotar $3^{\sqrt{x-5}} = u$, $u > 0$ tenemos $u^2 - 27 = 6u$ o $u = 9$ (la raíz -3 no es válida) o $3^{\sqrt{x-5}} = 9$, $\sqrt{x-5} = 2$, $x = 9$

Respuesta: $x = 9$

183. $3^{2x+2} + 5 \cdot 6^x - 2^{2x+2} = 0$. La ecuación dada es equivalente a:

$9 \cdot 9^x + 5 \cdot 6^x - 4 \cdot 4^x = 0$

Al dividir entre 9^x tenemos

$9 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 0$ o $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

(la raíz -1 no es válida); entonces, $x = -2$

Respuesta: $x = -2$

184. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. Al dividir la ecuación entre 81^x tenemos

$3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 = 5\left(\frac{4}{9}\right)^x$ o $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$,

$x = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x = \frac{1}{2}$

185. $4^{x+3} + 9^{x+3} - 12 \cdot 6^{x+2} = 0$. La ecuación dada es equivalente a: $64 \cdot 4^x + 729 \cdot 9^x - 432 \cdot 6^x = 0$. Al dividir entre 9^x obtenemos

$64\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 729 - 432\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ o

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$; entonces, $x = -3$

Respuesta: $x = -3$

186. $4 \cdot 25^x - 21 \cdot 10^x - 25 \cdot 4^x = 0$. Al dividir entre 25^x obtenemos

$4 - 21\left(\frac{2}{5}\right)^x - 25\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = 0$ o

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{4}{25}$; entonces, $x = 2$

Respuesta: $x = 2$

187. $16 \cdot 9^{x-2} + 7 \cdot 12^{x-2} - 9 \cdot 16^{x-2} = 0$

La ecuación dada es equivalente a:

$\frac{16}{81} \cdot 9^x + \frac{7}{144} \cdot 12^x - \frac{9}{256} \cdot 16^x = 0$

Al dividir entre 16^x obtenemos

$\frac{16}{81}\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \frac{7}{144}\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{9}{256} = 0$ o

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$; entonces, $x = 4$

Respuesta: $x = 4$

188. $x^{1+\log x} = 10x$. La ecuación dada es equivalente a:

$x \cdot x^{\log x} = 10x$ o tomando en cuenta que

$x^{\log x} = x^{\frac{1}{\log_x 10}} = \frac{x}{10}$ tenemos

$\frac{x^2}{10} = 10$, $x^2 = 100$, $x = 10$

(la raíz -10 no es válida).

Respuesta: $x = 10$

189. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$. La ecuación dada es equivalente a $\log_5 \sqrt{x}^{\log_5 x - 1} = \log_5 5$ o $(\log_5 x - 1)\log_5 \sqrt{x} = 1$ $\frac{1}{2}\log_5^2 x - \frac{1}{2}\log_5 x = 1$. Al denotar $\log_5 x = u$ y $\log_5^2 x = u^2$ tenemos $\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u = 1$, donde las raíces son $u_1 = 2$, $u_2 = -1$.

Entonces, $\log_5 x = 2$ o $\log_5 x = -1$,

$x_1 = 25$, $x_2 = \frac{1}{5}$

Respuesta: $x_1 = 25$, $x_2 = \frac{1}{5}$

190. $x^{\log x^4 - 5\log x} = 0.0001$. La ecuación dada es equivalente a:

$\log x^{\log x^4 - 5\log x} = \log 0.0001$. Al tomar en cuenta que $\log x^4 - 5\log x = 4\log x - 5\log x = -\log x$ y $\log 0.0001 = -4$ tenemos:

$\log x^{-\log x} = -4$ o $\log^2 x = 4$, $\log x = \pm 2$,

donde $x_1 = 100$, $x_2 = 10^{-2}$

Respuesta: $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$

191. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$. La ecuación es equivalente a:

$\log_4 x^{\log_4 x - 2} = \log_4 2^{3(\log_4 x - 1)}$ o

$(\log_4 x - 2)\log_4 x = (3\log_4 x - 3)\log_4 2$,

$\log_4^2 x - \frac{7}{2}\log_4 x + \frac{3}{2} = 0$, donde $\log_4 x = 3$

o $\log_4 x = \frac{1}{2}$. Entonces, tenemos $x_1 = 4^3$,

$x_2 = 4^{\frac{1}{2}}$

Respuesta: $x_1 = 64$, $x_2 = 2$

192. $27x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}$. La ecuación es equivalente a: $\log_{27} 27x^{\log_{27} x} = \log_{27} x^{\frac{10}{3}}$ o $1 + \log_{27}^2 x = \frac{10}{3}\log_{27} x$. Al resolver la ecuación cuadrática obtenemos:

$\log_{27}x = 3$ o $\log_{27}x = -\frac{1}{3}$.

Entonces, $x_1 = 27^3$, $x_2 = 27^{-\frac{1}{3}}$

Respuesta: $x_1 = 19\,683$, $x_2 = \frac{1}{3}$

193. $10^{\log^2 x} + x^{\log x} = 2$. Tomando en cuenta que $10^{\log^2 x} = (10^{\log x})^{\log x} = x^{\log x}$ tenemos $2x^{\log x} = 2$ o $x^{\log x} = 1$. La última ecuación es equivalente a:

$\log x^{\log x} = \log 1$ o $\log^2 x = 0$, $x = 1$.

Respuesta: $x = 1$

194. $6 \cdot 10^{\log^2 x} + 4x^{\log x} = 10^5$. Tomando en cuenta que $10^{\log^2 x} = (10^{\log x})^{\log x} = x^{\log x}$ tenemos $6x^{\log x} + 4x^{\log x} = 10^5$; $10x^{\log x} = 10^5$; $x^{\log x} = 10^4$. Aplicando en ambos términos el logaritmo base 10 tenemos:

$\log\left(x^{\log x}\right) = \log 10^4$ o $\log^2 x = 4$,

$\log x = \pm 2$. Las raíces son $x_1 = 100$,

$x_2 = \frac{1}{100}$

Respuesta: $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$

195. $4x^{\log_2 x} - 2^{1+\log_2^2 x} = 12$. Tomando en cuenta que $2^{1+\log_2^2 x} = 2(2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = 2x^{\log_2 x}$ tenemos la siguiente ecuación:

$6x^{\log_2 x} = 12$ o $x^{\log_2 x} = 2$ o al aplicar $\log_2$ tenemos $\log_2^2 x = 1$, donde $\log_2 x = \pm 1$;

entonces, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

196. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 0$. Tomando en cuenta que $5^{\log_5^2 x} = (5^{\log_5 x})^{\log_5 x} = x^{\log_5 x}$ tenemos la siguiente ecuación:

$2x^{\log_5 x} = 10$ o $x^{\log_5 x} = 5$ o al aplicar $\log_5$ en ambos términos obtenemos:

$\log_5^2 x = 1$, $\log_5 x = \pm 1$; entonces, $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{5}$

Respuesta: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{5}$

197. $4^{1+\log_4^2 x} - 3x^{\log_4 x} = 1$. Tomando en cuenta que $4^{1+\log_4^2 x} = 4(4^{\log_4 x})^{\log_4 x} = 4x^{\log_4 x}$ tenemos la siguiente ecuación: $x^{\log_4 x} = 1$ o al aplicar $\log_4$ en ambos términos tenemos $\log_4^2 x = 0$, donde $\log_4 x = 0$;

entonces, $x = 1$

Respuesta: $x = 1$

198. $3 \cdot 2^{\log_2^2 x} - x^{\log_2 x} = 4$. Tomando en cuenta que $2^{\log_2^2 x} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = x^{\log_2 x}$ tenemos la siguiente ecuación: $2x^{\log_2 x} = 4$ o al aplicar $\log_2$ en ambos términos tenemos $\log_2^2 x = 1$, donde $\log_2 x = \pm 1$;

entonces, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

199. $3x^{\log_2 x} - 2^{\log_2^2 x} = 1024$. Tomando en cuenta que $2^{\log_2^2 x} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = x^{\log_2 x}$ tenemos la siguiente ecuación: $2x^{\log_2 x} = 1024$ o $x^{\log_2 x} = 512$. Al aplicar $\log_2$ en ambos términos tenemos $\log_2^2 x = 9$ y la ecuación se reduce a las siguientes:

a) $\log_2 x = 3$ **b)** $\log_2 x = -3$

De la primera ecuación tenemos $x_1 = 2^3$ y de la segunda $x_2 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Respuesta: $x_1 = 8$, $x_2 = \frac{1}{8}$

200. $\log_2(25^{x+3}-1) = 2+\log_2(5^{x+3}+1)$

Tomando en cuenta que

$\log_2(25^{x+3}-1) = \log_2(5^{2(x+3)}-1) =$

$\log_2(5^{x+3}-1)\log_2(5^{x+3}+1) =$

$\log_2(5^{x+3}-1)+\log_2(5^{x+3}+1)$ la

ecuación dada se reduce a:

$\log_2(5^{x+3}-1) = 2$ o $5^{x+3}-1=4$;

$5^{x+3} = 5$

Entonces, $x+3 = 1$, $x=-2$

Respuesta: $x=-2$

201. $x \in (0, 4)$

202. $x \in (4, +\infty)$

203. $x \in [6, +\infty)$

204. $x \in (0, 7)$

205. $x \in (1, +\infty)$

206. $x \in (0, 9)$

207. $x \in (3, +\infty)$

208. $x \in (0, 5)$

209. $x \in (0, 0.5]$

210. $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

211. $\log_{0,1}(3-x)>1+\log_{0,1}20$. La desigualdad dada es equivalente a: $\log_{0,1}\frac{3-x}{20}>1$.

Como la base es $0<0.1<1$ la desigualdad se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{3-x}{20}<0.1\\ 3-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x<3\end{cases}$$

Respuesta: $x \in (1, 3)$

212. $\log_2(\log(x-1))>0$. Como la base es $2>1$, la desigualdad dada se reduce a $\log(x-1)>1$ y tomando en cuenta que la base $10>0$ podemos considerar el sistema siguiente:

$$\begin{cases}x-1>10\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>11\\ x>1\end{cases}$$

Respuesta: $(11, +\infty)$

213. $\log(2-\log_2 x) > 0$. La desigualdad es equivalente a $2-\log_2 x > 1$ o $\log_2 x < 1$. Tomando en cuenta que $x>0$, tenemos $0<x<2$

Respuesta: $(0, 2)$

214. $\log(\log(x^2+1)) \geq 1$. La desigualdad es equivalente a $\log(x^2+1)\geq 1$ o tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x^2+1\geq 10^{10}\\ x^2+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq -\sqrt{10^{10}-1}, \quad x\geq\sqrt{10^{10}-1}\\ x\leq -1, \quad x\geq 1\end{cases}$$

Respuesta:

$(-\infty, -\sqrt{10^{10}-1}\,] \cup [\,\sqrt{10^{10}-1}, +\infty)$

215. $\log \operatorname{sen} x \leq 0$. La desigualdad es equivalente al sistema: $\begin{cases}\operatorname{sen} x\leq 1\\ \operatorname{sen} x>0\end{cases}$

Respuesta: $(2k\pi,\ \pi+2k\pi]$, $k \in Z$

216. $x \in (-\infty, -2)$

217. $x \in (0.5, +\infty)$

218. $(0, +\infty)$

219. $x \in [2, +\infty)$

220. $x \in (-\infty, 4]$

221. $x \in (-3, +\infty)$

222. $x \in (-\infty, -2)$

223. $x \in (-\infty, 2)$

224. $x \in (-\infty, 1)$

225. $x \in (-\infty, -1]$

226. $x \in (0, 1)$

227. $x \in [1, +\infty)$

228. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0$. Multiplicamos ambos lados de la desigualdad dada por $x^2 + 2x + 5$ considerando que $x^2 + 2x + 5$ siempre es positivo. Entonces, tenemos: $\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81 < 0$ o $3^{-(8+x)} < 3^4$; como la base es $3 > 1$, tenemos $-8 - x < 4$ o $x > -12$

Respuesta: $(-12, +\infty)$

229. $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$. Reescribimos la desigualdad dada como: $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > x^0$ y consideramos dos casos:

a) $0 < x < 1$ **b)** $1 < x < 3$; $3 < x < \infty$, con lo que tenemos los siguientes sistemas de desigualdades:

a) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x-1}{3.x} < 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 1 < x < 3 \\ 3 < x < \infty \\ \dfrac{2x-1}{3-x} > 0 \end{cases}$

Aplicando el método de intervalos se obtiene la respuesta:

$\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 3)$

230. $(0, +\infty)$

231. $(-\infty, 1 - \log_2 3)$

232. $(0, 1)$

233. $(0, +\infty)$

234. $(1, +\infty)$

235. $(4, 6)$

236.. $(2, 3)$

237. $(2, 3)$

238. $[0, 0.5]$

239. $(2, +\infty)$

240. $\begin{cases} 2^x = 16 \\ \log(x^2 - 5x + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^4 \\ x^2 - 5x + 5 = 1 \end{cases}$

Respuesta: $x = 4$

241. $\begin{cases} 3^{x^2+x-2} = 1 \\ \log(2 - x) + \log x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (2 - x)x = 1 \end{cases}$

Respuesta: $x = 1$

242. $\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^{x-1} + 5 = 0 \\ \log(120 - 4x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^{x-1} + 5 = 0 \\ 120 - 4x = 100 \end{cases}$

Respuesta: $x = 5$

243. $\begin{cases} 2^{\log x} = 4 \\ (\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \log x = 2 \\ \log^2 x - 3\log x + 2 = 0 \end{cases}$

Respuesta: $x = 2$

244. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$

Tomando en cuenta que $x > 0$, $x \neq 1$ y $y > 0$ y $y \neq 1$, tenemos: $x = 5$, $y = 5$

Respuesta: (5, 5)

245. $\begin{cases} 10^{1+\log(x+y)} = 50 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 2 - \log 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1 + \log(x+y) = \log 5 + 1 \\ 5(x-y)(x+y) = 100 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + y = 5 \\ (x-y)(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4.5 \\ y = 0.5 \end{cases}$

Respuesta: (4.5, 0.5)

246. $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 - \log 5 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 1.2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ (x+y)(x-y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

Tomando en cuenta que $x + y > 0$ y $x - y > 0$, tenemos: $x = 4$, $y_1 = 2$, $y_2 = -2$

Respuesta: (4, 2); (4, −2)

247. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} xy = 36 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

Respuesta: (2, 18); (18, 2)

248. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \log(y+x)^2 - \log x = 2\log 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3^{2x+y} = 81 \\ \dfrac{(y+x)^2}{x} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ \dfrac{(y+x)^2}{x} = 9 \end{cases}$

Respuesta: (1, 2); (16, −28)

249. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2 \\ xy = 27 \end{cases}$

La primera ecuación es equivalente a $\dfrac{1}{\log_y x} + \log_x y = \dfrac{5}{2}$.

Al denotar $\log_y x = u$ y resolviendo la ecuación cuadrática $2u^2 - 5u + 2 = 0$, obtenemos $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$. Entonces, tenemos dos sistemas:

a) $\begin{cases} \log_x y = 2 \\ xy = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_x y = \dfrac{1}{2} \\ xy = 27 \end{cases}$

Respuesta: (9, 3); (3, 9)

250. $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \dfrac{xy}{3} = 16 \end{cases}$

Respuesta: (6, 8); (8, 6)

251. $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 1 + \log 4 \\ \log x \log y = \log 4 \end{cases}$

Al denotar $\log x = u$ y $\log y = v$, tenemos:

$\begin{cases} u + v = 1 + \log 4 \\ uv = \log 4 \end{cases}$

donde $u_1 = 1$, $v_1 = \log 4$ o $u_2 = \log 4$, $v_2 = 1$

Respuesta: (10, 4); (4, 10)

252. Encontremos t tal que

$900\,000(1.028)^t = 1\,500\,000$, esto es.

$(1.028)^t = \dfrac{1\,500\,000}{900\,000}$

$(1.028)^t = 1.6667$

Aplicando logaritmos en ambos lados tenemos que $t\ln 1.028 = \ln 1.6667$, así $t = \frac{\ln 1.6667}{\ln 1.028} = 18.49$. Dieciocho años y medio después del 1 de enero de 1990 corresponde al 1 de julio del 2008, que es cuando la población alcanzará la cifra de 1 500 000.

253. Encontremos t tal que $3(1.04)^t = 8$, esto es, $(1.04)^t = \frac{8}{3}$; aplicando logaritmos en ambos lados tenemos $t\ln 1.04 = \ln \frac{8}{3}$, que al despejar t se obtiene $t = \frac{\ln \frac{8}{3}}{\ln 1.04} = 25.\ 008$.

254. Se tiene la siguiente ecuación:

$1\,246\,871\,951(1.0098)^t = K$, donde K es el número de habitantes que tendrá China para tener una densidad de 200 habitantes,

esto es, $\frac{K}{9596960} = 20$; así, $k = 1.9194x10^9$.

Despejando t tenemos: 1 246 871 951

$(1.0098)^t = 1.9194x10^9\ (1.0098)^t =$

$\frac{1.9194x10^9}{1\,246\,871\,951}\ (1.0098)^t = 1.5394.$

Aplicando logaritmos en ambos lados se obtiene $t\ln(1.0098) = \ln(1.5394)$ donde

$t = \frac{\ln(1.5394)}{\ln(1.0098)} = 44.23$, esto es,

aproximadamente en el año 2043.

255. Encontremos t tal que $712\,091(0.991)^t = \frac{2}{3} \cdot 712\,091$, esto es, $(0.991)^t = \frac{2}{3}$,

aplicando logaritmos en ambos lados

tenemos $t\ln(0.991) = \ln \frac{2}{3}$, así

$t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln(0.991)} = 44.84$, es decir,

aproximadamente 45 años.

256. Encontremos t tal que $34\,646(1.0427)^t = 50\,000$, esto es, $(1.0427)^t = \frac{50\,000}{34\,646}$;

aplicando logaritmos en ambos lados

tenemos $t\ln(1.0427) = \ln(1.4432)$, así

$t = \frac{\ln(1.4432)}{\ln(1.0427)} = 8.77$, esto es,

aproximadamente en el año 2005.

257. Después de t años el valor de la inversión es de $1000(1.08)^t$, así: $1000(1.08)^t = 5000$. Aplicando logaritmos en ambos lados tenemos $t\ln(1.08) = \ln \frac{5000}{1000}$, así

$t = \frac{\ln 5}{\ln(1.08)} = 20.91$. La inversión tendrá un valor de 5000 en 21 años.

258. Puesto que $A_n = 2940$ se tiene que

$2940 = 980\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^n$. Despejando n

tenemos: $\frac{2940}{980} = (1 + 0.3\ldots)^n$

$\ln 3 = n\ln 1.03$, $n = \frac{\ln 3}{\ln 1.03} = 37.1$. Son 37 periodos de interés, puesto que se compone semestralmente, es decir,

son 18 años y medio.

259. Utilizando la fórmula se tiene que

$2400 = 1200(1 + 0.08)^n$ y despejando n

$2 = (1 + 0.02)^n$, $\ln 2 = \ln(1.02)$,

$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1\ 02)} = 35$. La inversión se duplicará en 35 años.

260. Despejando K de la ecuación $60{,}000 = 40\,000e^{40K}$ se tiene que $\frac{60\,000}{40\,000} = e^{40K}$;

esto es, $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 40K$, luego $K = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{40} =$

$1.0137x10^{-2}$. Así, para saber cuándo habrá 80000 utilizamos la ecuación $80\,000 = 40\,000e^{1.0137x10^{-2}t}$ y despejamos t así:

$2 = e^{1.0137x10^{-2}t}$, $\ln 2 = 1.0137x10^{-2}t$,

$t = \frac{\ln 2}{1.0137x10^{-2}} = 68.37$, esto es,

aproximadamente 68 horas.

261. Supongamos que para $t = 0$, $P = 10000$, esto es, $P_0 = 10000$ y $P = 40000$ cuando $t = 2$, así: $40000 = 10000e^{K2}$; despejando K tenemos: $4 = e^{2K}$, $\ln 4 = 2K$, $K \approx 0.69$. Entonces, $P = 40\,000e^{0.69t}$ y cuando $t = 5$, $P = 40\,000e^{0.69(5)} \approx 320\,000$.

262. La vida media de 5730 nos permite determinar k, puesto que implica que $\frac{1}{2} = 1e^{k}(5730)$; así: $k = \frac{-\ln 2}{5730} = -0.000121$, por lo que

$y = 20e^{-0.000121(3000)} = 13.9$ gramos.

263. 11.96 gramos

264. 9.31 días

265. 6.47 gramos

266. 93.2 segundos

267. 4200 años

268. 251 veces, aproximadamente

269. 100 db

270. 3 meses, aproximadamente

Capítulo 8

1. a = 2

b = 3

2. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 15 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 17 & 22 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 14 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \\ 7 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -10 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -9 & -5 & -10 \\ -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

12. a 15.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{bmatrix}$$

16. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -11 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{(AB)C} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -11 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 39 & 2 & -81 \\ -42 & -6 & 70 \end{bmatrix}$$

de manera análoga: $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -24 & -7 & 24 \\ -21 & -3 & 35 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A(BC)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -24 & -7 & 24 \\ -21 & -3 & 35 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 39 & 2 & -81 \\ -42 & -6 & 70 \end{bmatrix}$$

18. $\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 18 & 15 & 35 \\ 9 & 21 & 13 \\ 10 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 7 & 16 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 12 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 \\ -20 & 10 & -1 \\ -36 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 17 & 39 & 41 \\ 14 & 20 & 42 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 30 & 32 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 32 & 32 \end{bmatrix}$

32. $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 57 & 106 \end{bmatrix}$

33. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y \\ -\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos x \cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$

34. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{bmatrix} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x & 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ -2 \operatorname{sen} x \cos x & \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -\operatorname{sen} 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

35. Por inducción sobre n si $n = 2$ (ejercicio anterior).

Supongamos que se tiene para $n = k$, mostrémoslo para $n = k + 1$, esto es:

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & \operatorname{sen} kx \\ -\operatorname{sen} kx & \cos kx \end{bmatrix} \text{ implica}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & \operatorname{sen}(k+1)x \\ -\operatorname{sen}(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \cos kx & \operatorname{sen} kx \\ -\operatorname{sen} kx & \cos kx \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos kx \cos x - \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} x & \cos kx \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} kx \cos x \\ -\operatorname{sen} kx \cos x - \cos kx \operatorname{sen} x & -\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} x + \cos kx \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(kx + x) & \operatorname{sen}(kx + x) \\ -\operatorname{sen}(kx + x) & \cos(kx + x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & \operatorname{sen}(k+1)x \\ -\operatorname{sen}(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$$

36. -10

37. 47

38. 4

39. 56

40. 274

41. 24

42. 60

43. 34

44. 28

45. 2

46. 32

47. -36

48. -260

49. -183

50. 24

51. -296

52. 138

53. $abcde$

54. $k^2 - 4k - 5$

55. 0

56. $-k^4 - k^3 + 18k^2 + 9k - 21$

57. 120

58. -120

59. 22

60. -12

61. 0

62. 6

63. 60

64. $a_{11}a_{22}$

65. $a_{11}a_{22}a_{33}$

67. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{9}{28} \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{28} \end{bmatrix}$

$\det(A) = -28$; $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{28}$

69. $\frac{23}{2}$

70. $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

74. $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

76. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

77. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

78. Sí

79. Sí

80. Sí

81. Sí

82. $b = 1$, $c = 2$, $a = 1$

83. si

84. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$

85. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{bmatrix}$

86. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

87. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

88. *no es invertible*

89. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

90. *no es invertible*

91. *no es invertible*

92. $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

93. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

94. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

95. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

96. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

97. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

98. No es invertible

99. $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

100. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

101. No es invertible

102. $\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{6}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$

103. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

104. No existe

105. $\begin{bmatrix} -9 & -15 & 10 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

106. a 108.

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es su propia inversa ($\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

109. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{pmatrix};$$

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -24 & -24 & -15 \\ -24 & -21 & -24 \\ -39 & -24 & -24 \end{pmatrix};$$

$$-7\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -14 \\ -21 & -7 & -7 \\ -14 & -21 & -7 \end{pmatrix};$$

$$11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \text{ luego}$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & -24 & -15 \\ -24 & -21 & -24 \\ -39 & -24 & -24 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -14 \\ -21 & -7 & -7 \\ -14 & -21 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación $A^3 - 3A^2 - 7A + 11I = 0$ tenemos

$A\left(A^2 - 3A - 7\right) = 11I$ esto es

$A\left[\left(\frac{1}{11}\right)\left(A^2 - 3A - 7\right)\right] = I$, por lo tanto

$A^{-1} = \left[\left(\frac{1}{11}\right)\left(A^2 - 3A - 7\right)\right]$

110. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^K \end{bmatrix}$$

$$A^{-K} = \begin{bmatrix} 2^K & 0 & 0 \\ 0 & 3^K & 0 \\ 0 & 0 & 4^K \end{bmatrix}$$

111. $x_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 3$

112. $x_1 = -5; \quad x_2 = 3$

113. $x_1 = 2; \quad x_2 = 5; \quad x_3 = -3$

114. $x_1 = \frac{49}{13}; \quad x_2 = -\frac{94}{13};$

$x_3 = \frac{21}{13}$

115. $x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2};$

$x_3 = \frac{1}{2}$

116. $x_1 = \frac{21}{29}; \quad x_2 = \frac{171}{29};$

$x_3 = -\frac{284}{29}; \quad x_4 = -\frac{182}{29}$

117. $x_1 = -\frac{-29}{10}; \quad x_2 = \frac{7}{4};$

$x_3 = -\frac{-7}{20}; \quad x_4 = \frac{7}{10}$

118. $x = 3.5, y = \frac{36}{27}$

119. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

120. $x = 4, y = -6$

121. $x = \frac{18}{5}, y = -\frac{214}{35}$

122. $x = 7.75,\ y = 1.75$

123. $x = -2,\ y = -4$

124. $x = 1,\ y = -1$

125. $y = 2.1129,\ x = 8.871$

126. $x = 4,\ y = 2$

127. $x = \frac{7}{5}y + \frac{4}{3},\ y = y$

128. $x = 2,\ y = -2,\ z = -1$

129. $x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ z = \frac{2}{3}$

130. $x = -9,\ y = -\frac{7}{3},\ z = 6$

131. $x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{7}{6},\ z = \frac{2}{3}$

Capítulo 9

1. c
2. b
3. d
4. e
5. f
6. a
7. 0
8. $-\frac{1}{3}$
9. $-\frac{10}{3}$
10. 2
11. $y = 4x + 2$
12. $y = -5$
13. $x = 3$
14. $y = 7$
15. $y = 2x + 2$
16. $y = -3x - 3$
17. $y =\ b$ para todo $b \in R$
18. $y = 3x - 1$
19. $x = 0$
20. $y = 0$
21. Si $x = 3$ entonces $y = 3(3) - 1$ esto es $y = 8$ el punto $(3,8)$ pertenece a la recta, ahí que el punto $(3,9)$ esta arriba de la recta
22. $k = -1$
23. La recta que pasa por el AB tiene pendiente $m = \dfrac{1+5}{-1+2} = 6$ así $y + 5 = 6(x + 2)$; esta recta es $y = 6x + 7$ y el punto $(-3,-1)$ satisface que $-1 = 6(-3) + 7$
24. Todos estan en la recta $y = 3x - 1$;
25. $(-3,-7)$;
26. $(2,-1)$;
27. $(2,1)$;
28. $(2,1)$
29. $y = -3x + 5$
30. $y = 3x - 5$
31. $y = -1$
32. $x = -2$
33. $y = x - 5$
34. $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$
35. $y = 4x - 11$
36. $y = \frac{1}{4}x + 1$
37. $y = 4x + 7$
38. $y = 2x + 14$
39. $(0,7); (\frac{7}{3},0)$
40. $(0,\frac{1}{2}); (-\frac{1}{103},0)$
41. $(0,2)$; en x no hay
42. $(0,0)$
43. $m = -3$
44. $m = -\frac{5}{2}$
45. $m = \frac{3}{2}$

46. $m = \frac{3}{5}$

47. $m = -\frac{1}{3}$

48. indefinida

49. perpendiculares

50. ninguno

51. perpendiculares

52. perpendiculares

53. paralelas

54. perpendiculares

55. $\frac{1}{2}$

56. $\frac{1}{2}$

57. -2

58. $y = \frac{1}{2}x$

59. $k = 6$

60. $k = -\frac{3}{2}$

61. *a.* $k = -\frac{3}{2}$

b. $k = -8$

c. $k = 2$

62. $C = 8000 + 70x$

63. $C = 250 + 8x$; $C = 250 + 8(100) = 1050$

64. $C = 80 + 30t$

65. $R = 1500 + 12.50x$

66. $C = 150 + 48x$

67. $C = 25 + 0.30x$;

$C = 25 + 0.30(50) = 40$

68. El costo de la primera agencia es $C = 25 + 60x$ y de la segunda $C = 30 + 50x$. Los costos serán iguales cuando x satisfaga la ecuación $25 + 60x = 30 + 50x$, es decir: $10x = 5$; $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, si se viaja menos de $\frac{1}{2}$ kilómetro conviene la primera; de lo contrario, conviene la segunda agencia.

69. El costo por unidad es $\frac{520}{20} = 26$; así, el costo de producir x artículos es $C = 800 + 26x$. Si $x = 30$, entonces $C = 1580$.

70. Sea t el número de horas que utilizará el jugador. En el primer club el costo es de $C = 1000 + 8t$ y en el segundo $C = 800 + 12t$. El costo será igual cuando t satisfaga la ecuación:

$$1000 + 8t = 800 + 12t$$
$$200 = 4t$$
$$t = 50$$

Por lo tanto, si juega menos de 50 horas, le conviene el segundo club y si juega más de 50 horas le conviene el primer club.

71. *a.* La ecuación de la recta que contiene los puntos (10, 95) y (25, 180) es $y - 95 = m(x - 10)$ donde $m = \frac{95 - 180}{10 - 25} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3}$

Por lo tanto, la ecuación de costos es

$$C = \frac{17}{3}x + \frac{115}{3}$$

b. Si $x = 20$, entonces $C = 151.67$.

c. El costo variable es $\frac{17}{3}$ y el costo fijo es $\frac{115}{3}$.

72. La recta que contiene los puntos (15, 50) y (21, 20) tiene pendiente $m = \frac{30 - 50}{21 - 15} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$ y la ecuación es $(y - 50) = -\frac{10}{3}(x - 15)$;

esto es, $y = -\frac{10}{3}x + 100$. Por lo tanto, si x es la cantidad demandada y y es el precio por unidad, la recta $y = -\frac{10}{3}x + 100$ representa la demanda. Si se requieren 27 unidades, entonces $y = -\frac{10}{2}(27) + 100 = 10$, por lo que \$10 debe ser el precio por unidad.

73. $q = -250P + 125\,000$

74. $c = -\frac{1}{2}q + \frac{175}{2}$; si $q = 35$, entonces $c = 70$

75. *a.* $c = 5x + 200$

b. costos fijos $= 200$; costos variables $= 5$

76. Los costos están dados por la ecuación $c = 8500 + 80x$, donde x es el número de unidades.

a. Para alcanzar un equilibrio, los ingresos deben ser iguales que los costos; esto es, si se vende a \$120 la unidad,

$$120x = 850 + 80x$$

$$40x = 850$$

donde $x \approx 22$ unidades.

b. La utilidad son los ingresos menos el costo; así, $u = 120x - (850 + 80x) = 40x - 850$; si $x = 100$, se obtiene una utilidad de \$3150.

c. $1250 = 40x - 850$; de aquí $x = 52.5$, esto es, aproximadamente 53 unidades.

77. Los costos de producir x unidades son $c = 300 + 0.80x$. Los ingresos al vender x unidades son $I = 1.40x$. La utilidad en $u = I - C = 1$. Al resolver $40x - (300 + 0.80x)$ resulta $0.40x - 300$. Para no tener ganancias ni pérdidas, $u = 0$, esto es, $0.40x - 300 = 0$, donde $x = 750$ unidades.

78. 2870 artículos

79. 7500 artículos

80. Tomando en cuenta la fórmula:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tenemos que

$a = 2,\ b = -3$ y $r = 9$.

Sustituyendo en la ecuación:

$$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 9^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 81$$

Elevando al cuadrado y combinando los términos, tenemos:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 68 = 0$$

81. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

82. $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

83. $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 9$

$$x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$$

84. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$;

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$$

85. Para encontrar el radio tomamos en cuenta la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$r = \sqrt{(1 - 3)^2 + [2 - (-1)]^2} = \sqrt{13}$$

Usando la ecuación general del círculo tenemos:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{13}\,)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$

86. Encontramos el radio tomando en cuenta la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$r = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{26}$$

Usando la ecuación general del círculo tenemos:

$$[x - (-3)]^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{26}\,)^2$$

o $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$

87. Según la fórmula de la distancia entre dos puntos, podemos encontrar el radio:

$r = \sqrt{(-1-2)^2 + [1-(-4)]^2} = \sqrt{34}$

Usando la ecuación general del círculo tenemos:

$[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{34})^2$

ó $\quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$

88. Tomando en cuenta la fórmula de la distancia entre dos puntos, podemos encontrar el radio:

$r = \sqrt{(3-9)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45}$

Aplicando la ecuación general del círculo tenemos:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{45})^2$$

o $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 20 = 0$

89. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0.$

La ecuación dada puede escribirse como:

$(x^2 + 2x) + (y^2 - 10y) = -25.$

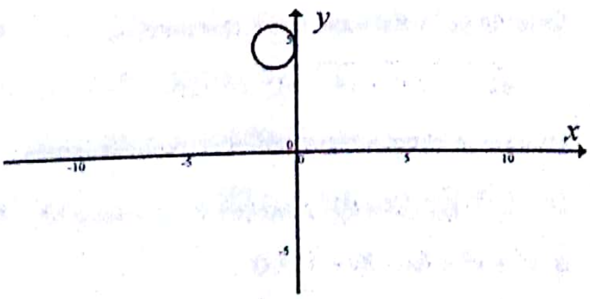
Completando los cuadrados de los términos entre paréntesis y sumando 1 y 25 en ambos lados de la ecuación, tenemos:

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) =$

$-25 + 25 + 1$

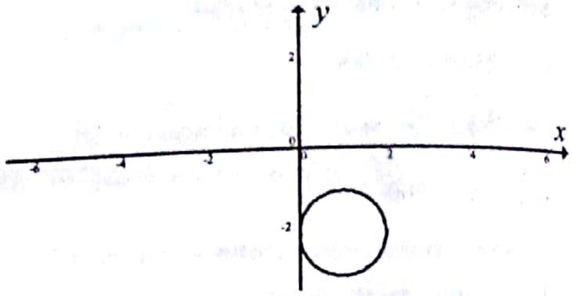
o $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 1$

Comparando esta ecuación con la ecuación general del círculo vemos que ésta es una ecuación de un círculo con su centro en $(-1, 5)$ y radio $= 1$.



90. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$. Completando los cuadrados tenemos:

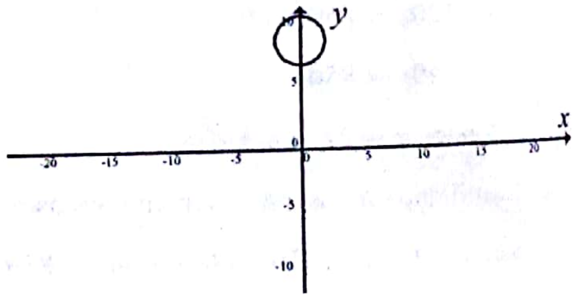
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(1,-2)$ y radio $= 1$.



91. $x^2 + y^2 - 18y + 77 = 0.$

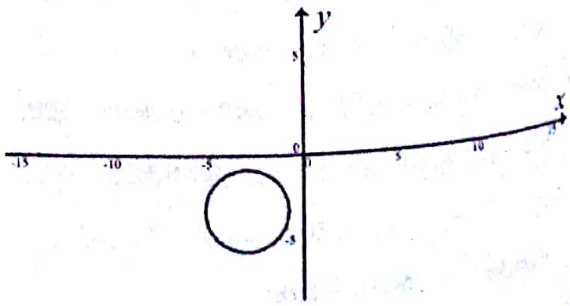
Completando los cuadrados tenemos:

$(x+0)^2 + (y-9)^2 = 4$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(0, 9)$ y radio $= 2$.



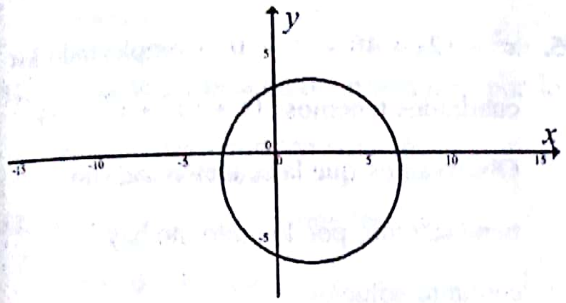
92. $x^2 + 6x + y^2 + 6y + 13 = 0$. Completando los cuadrados tenemos:

$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 5$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-3,-3)$ y radio $= \sqrt{5}$.

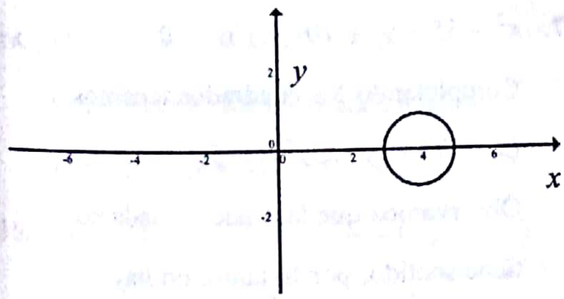


93. $x^2 - 4x - 20 + y^2 + 2y = 0$. Completando los cuadrados tenemos:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(2,-1)$ y radio $= 5$.

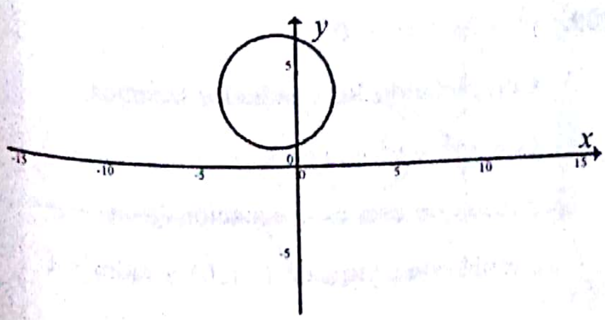


94. $x^2 - 8x + 15 + y^2 = 0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-4)^2 + y^2 = 1$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(4,0)$ y radio $= 1$.

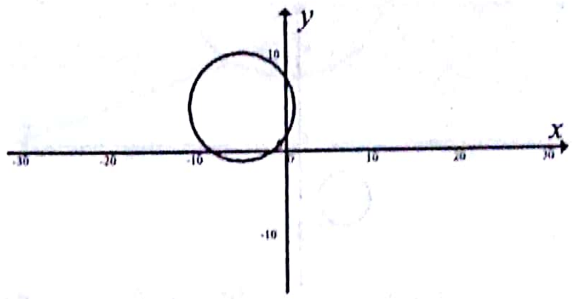


95. $y^2 + x^2 - 8y + 8 + 2x$. Completando los cuadrados tenemos:

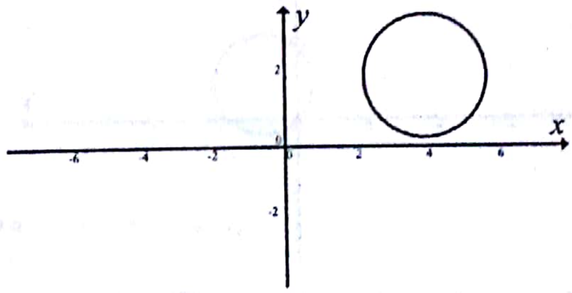
$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-1, 4)$ y radio $= 3$.



96. $x^2 + 10x + y^2 + 16 - 10y = 0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 36$ por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-5, 5)$ y radio $= 6$.

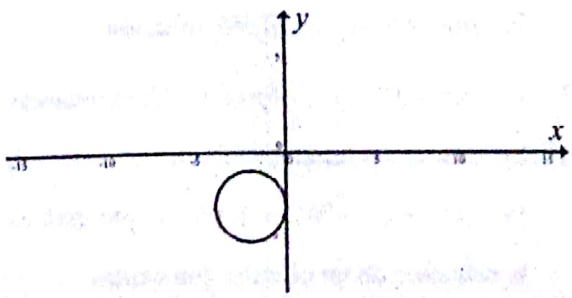


97. $x^2 + 17 - 8x + 4y + y^2 = 0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3$ por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(4, 2)$ y radio $= \sqrt{3}$.

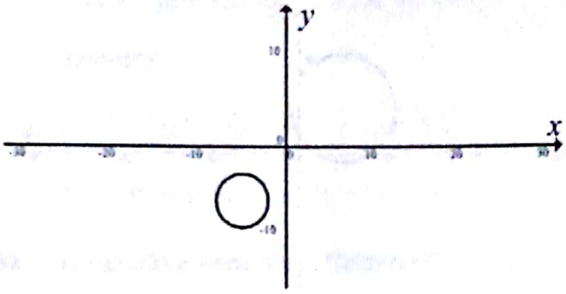


98. $y^2 + 6y + 9 + x^2 + 4x = 0$. Completando los cuadrados tenemos:

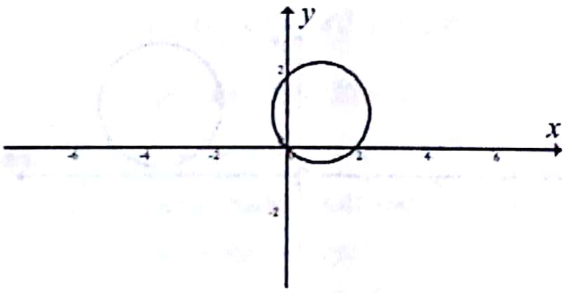
$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-2, -3)$ y radio $= 2$.



99. $x^2+y^2+10x+12y+42=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x+5)^2+(y+6)^2=9$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-5,-6)$ y radio $=3$.



100. $x^2+6x+5+y^2=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(y-1)^2+(x-1)^2=2$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(1,1)$ y radio $=\sqrt{2}$.



101. $x^2-2x+y^2+5+4y=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-1)^2+(y+2)^2=0$, por lo que éste es un punto con coordenadas $(1,-2)$.

102. $x^2-6x+20+y^2-6y=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-3)^2+(y-3)^2=-2$. Observamos que la ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto, no hay conjunto solución.

103. $x^2-2x+10+y^2-6y=1$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-1)^2+(y-3)^2=1$, por lo que está es la ecuación de un círculo con centro en $(1,3)$ y radio $=1$.

104. $y^2+x^2-4y=0$. Completando los cuadrados tenemos: $x^2+(y-2)^2=4$, por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(0,2)$ y radio $=2$.

105. $x^2+12x+40+y^2=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x+6)^2+y^2=-4$. Observamos que la ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto, no hay conjunto solución.

106. $x^2+y^2-6y+9=0$. Completando los cuadrados tenemos: $x^2+(y-3)^2=0$ por lo que éste es un punto con coordenadas $(0,3)$.

107. $x^2+55+y^2+10x-10y=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x+5)^2+(y-5)^2=-5$. Observamos que la ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto, no hay conjunto solución.

108. $x^2-4x+13+y^2+6y=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x-2)^2+(y+3)^2=0$ por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(2,-3)$.

109. $y^2+2x+x^2=0$. Completando los cuadrados tenemos: $(x+1)^2+y^2=1$ por lo que ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(-1,0)$ y radio $=1$.

110. $x^2 + 69 + y^2 - 4x - 16y = 0.$

Completando los cuadrados tenemos:

$(x-2)^2 + (y-8)^2 = -1$

Observamos que la ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto, no hay conjunto solución.

111. La ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto no hay conjunto solución.

112. $y^2 + x^2 + 2x = 0$. Completando los cuadrados tenemos : $(x+1)^2 + y^2 = 1$ por lo que está es la ecuación de un círculo con centro en $(-1, 0)$ y radio $= 1$.

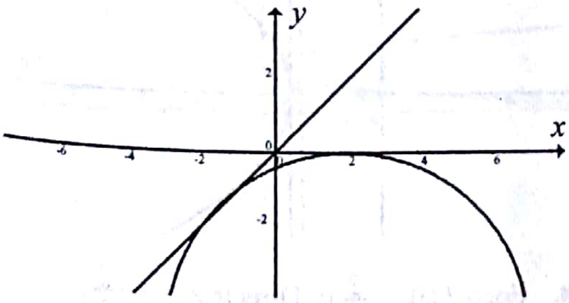
113. La ecuación dada no tiene sentido, por lo tanto no hay conjunto solución.

114. $x^2 + 10x + 41 + 8y + y^2 = 0.$

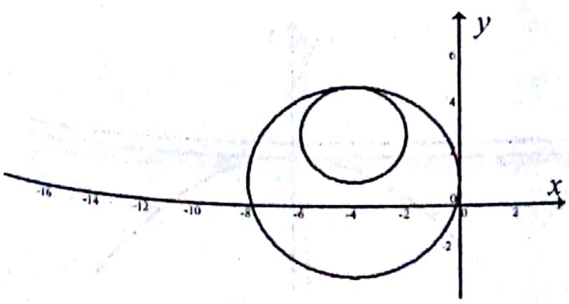
Completando los cuadrados tenemos:

$(x+5)^2 + (y+4)^2 = 0$

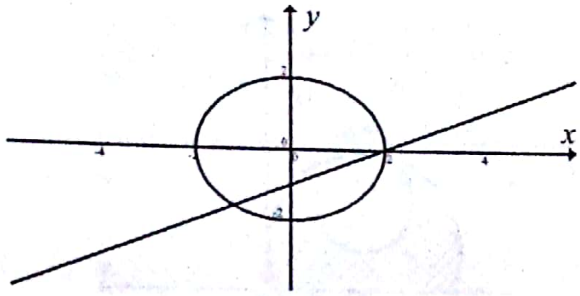
115. $\{x = -2,\ y = -2\},\ \{x = -1,\ y = -1\}$



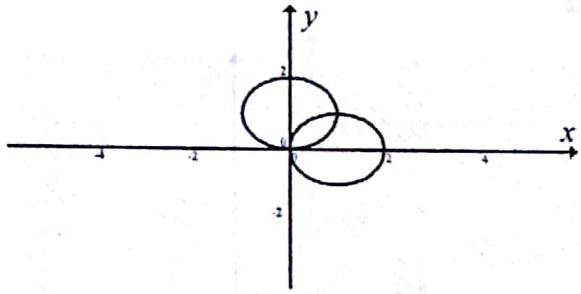
116. $\{y = 5,\ x = -4\}$



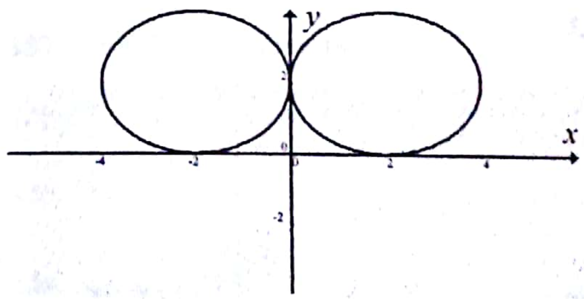
117. $\{y = 0,\ x = 2\},\ \{y = -\frac{8}{5},\ x = -\frac{6}{5}\}$



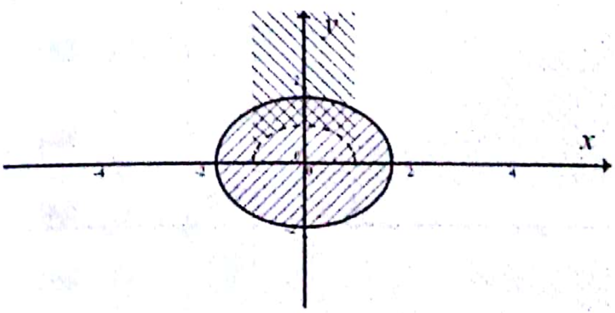
118. $\{y = 0,\ x = 0\},\ \{y = 1,\ x = 1\}$



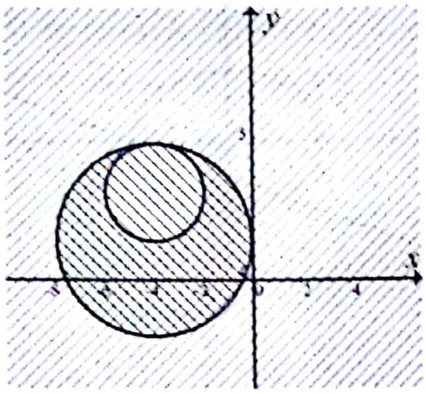
119. $\{y = 2,\ x = 0\}$



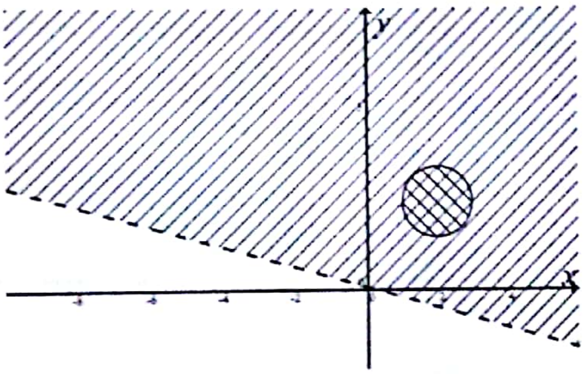
120.



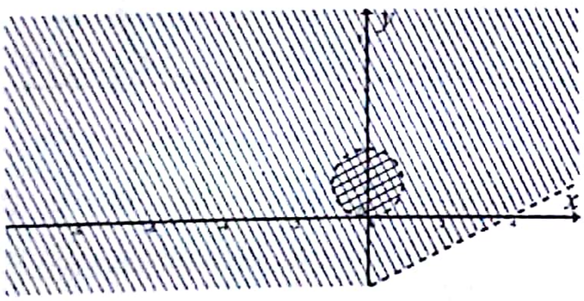
121.



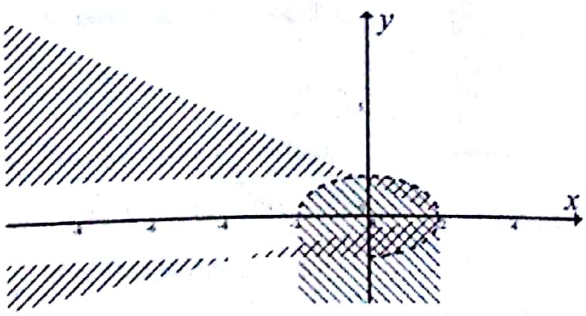
122.



123.

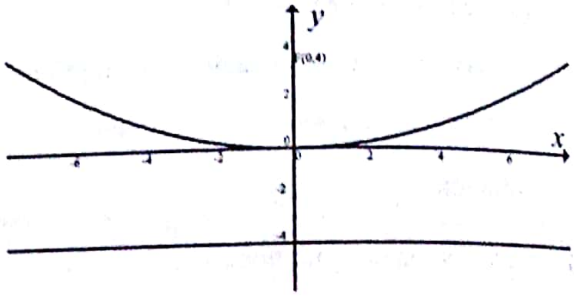


124.



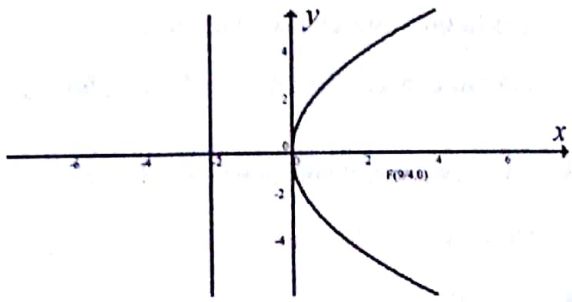
125. P = 4; Foco $F(0, 4)$; Directriz $y = -4$;

Vértice (0, 0)



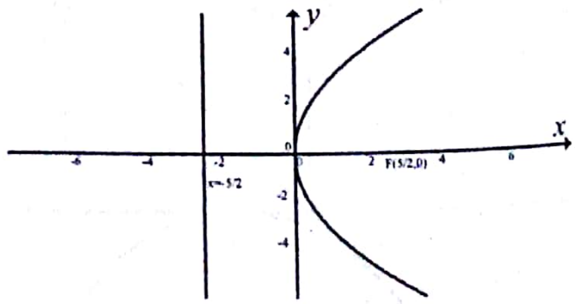
126. Foco $F(\frac{9}{4}, 0)$; Directriz $x = -\frac{9}{4}$;

Vértice (0, 0)



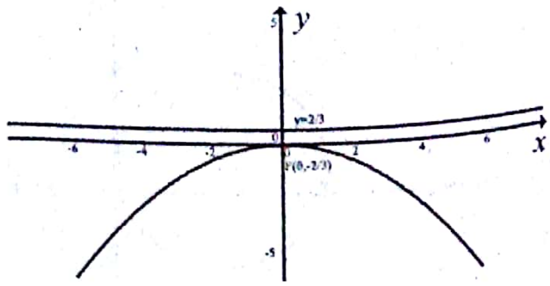
127. Foco $F(\frac{5}{2}, 0)$; Directriz $x = -\frac{5}{2}$;

Vértice (0, 0)



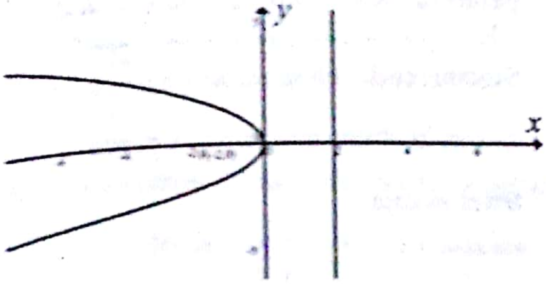
128. Foco $F(0, -\frac{2}{3})$; Directriz $y = \frac{2}{3}$;

Vértice (0, 0)

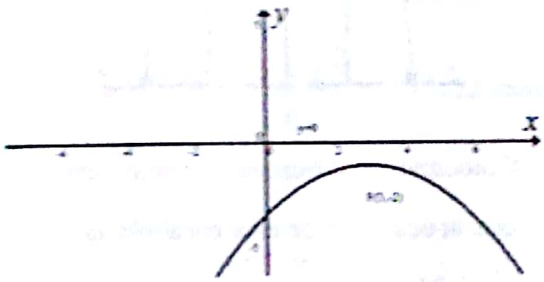


129. Foco $F(-2, 0)$; Directriz $x = 2$;

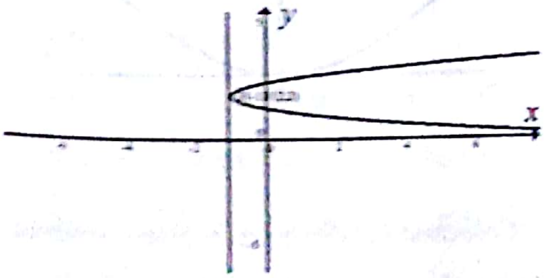
Vértice $(0, 0)$



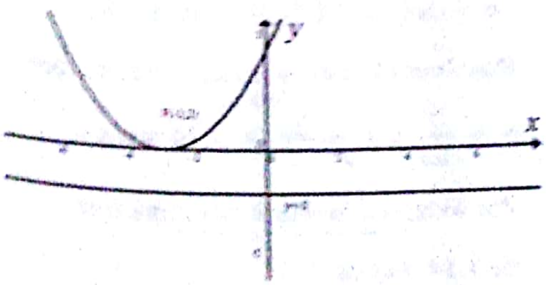
130. Foco $F(3, -2)$; Directriz $y = 0$



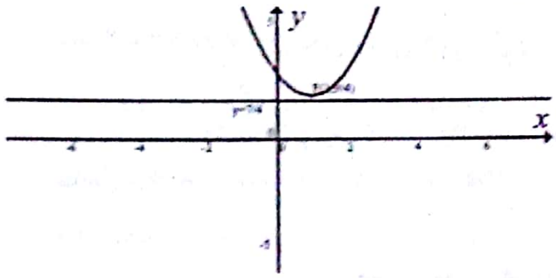
131. Foco $F(-\frac{11}{12}, 2)$; Directriz $y = -\frac{13}{12}$



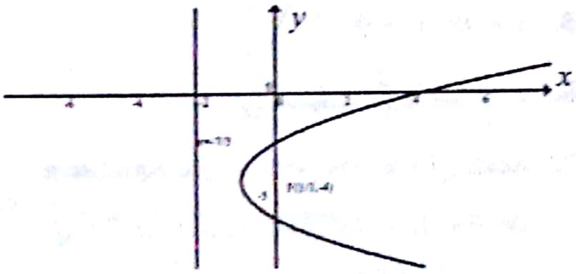
132. Foco $F(-3, 2)$; Directriz $y = -2$



133. Foco $F(1, \frac{9}{4})$; Directriz $y = \frac{7}{4}$



134. Foco $F(\frac{1}{3}, -4)$; Directriz $x = -\frac{7}{3}$



135. $x^2 = 12y$

136. $y^2 = 20x$

137. $(x-3)^2 = 16(y+1)$

138. $(y+1)^2 = 4(x-3)$

139. $(x+2)^2 = \frac{1}{12}(y+2)$

140. $(y-1)^2 = \frac{1}{3}x$

141. $(y-3)^2 = \frac{1}{4}x$

142. $(x+4)^2 = 16(y-2)$

143. $x^2 = \frac{1}{2}y$

144. $y^2 = 4x$

145. $(y-1)^2 = 32(x+4)$

146. $(x-1)^2 = 8(y-2)$

147. $(x-3)^2 = 4(4)(y+3)$

148. $(y-1)^2 = 4(8)(x+1)$

149. $(y+3)^2 = 4(-1)(x+3)$

150. $(x-0)^2 = 3\left(\frac{4}{3}\right)(y-2)$

151. $x^2 = -8y$

152. $y^2 = 4(x-1)$

153. $(x-1)^2 = -2y$

154. $(y+3)^2 = \frac{1}{2}(x+4)$

155. $x = 0;\ y = 0$

156. $x = 4pm;\ y = 4pm^2$

157. Sean $Q(x,y)$ los puntos que equidistan de P y de L; así, la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q a L.
La distancia de P a Q es $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ y la distancia de Q a L es $|x+3|$; por lo tanto,
$|x+3| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$
Al resolver obtenemos $y^2-6y-10x+4=0$ y esto es $(y-3)^2 = 10(x+\frac{1}{2})$ la parábola de vértice $V(-\frac{1}{2}, 3)$ y $P = \frac{5}{2}$.

158. $x^2+2x+4y-11 = 0$

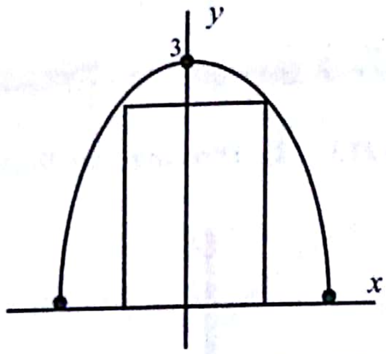
159. $y^2-4y-4x+16 = 0$

160. $(x+2)^2 = 8(y-1)$

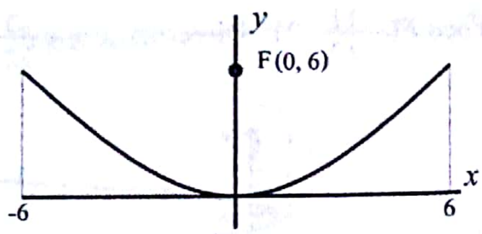
161. $x^2 = 3(y-2)$

162. El receptor está en el foco, cuya distancia al vértice es $P = \frac{1}{64}$

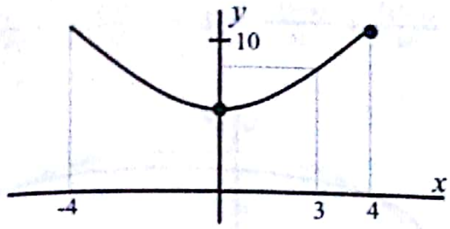
163. Si colocamos el dibujo en el plano, tenemos que la ecuación de esta parábola es $y = 3-3x^2$, si $x = \frac{1.5}{2}$.
Sustituyendo en la ecuación $y = 1.31$, que es la altura máxima que puede tener la caja.



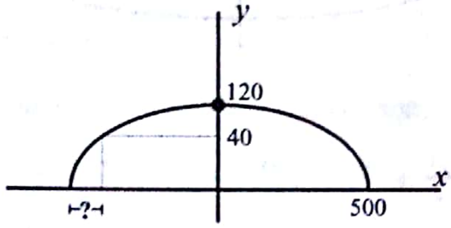
164. Colocando el dibujo en el plano, tenemos que la ecuación de esta parábola es $x^2 = 24y$ cuando $x = 6$, $y = 1.5$, que es la profundidad de la antena.



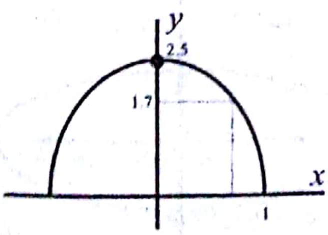
165. Colocando el dibujo en el plano, tenemos que ésta es una parábola de la forma $x^2 = 4p(y-k)$ y los puntos $(4,10)$ y $(3,7)$ pertenecen a ella; así que $16 = 4p(10-k)$ y $9 = 4p(8-k)$.
Resolviendo este sistema, tenemos que $p = \frac{7}{12}$ y $k = \frac{22}{7} \approxeq 3.14$ metros.
Por lo tanto, la altura del camión es de 3.14 metros.



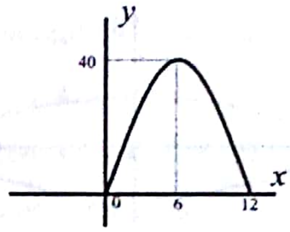
166. Colocando el dibujo en el plano, tenemos: Esta parábola cumple con la ecuación $y = -\frac{3}{6250}(x^2 - 250\,000)$ cuando $y = 80$; despejando x se tiene que $x = \pm\frac{500\sqrt{3}}{3}$. Así que la distancia pedida es $500 - \frac{500\sqrt{3}}{3} \cong 211.32$ metros.



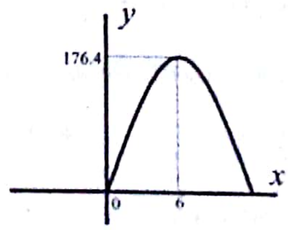
167. Colocando el dibujo en el plano, la parábola tiene la forma $4p(y - 2.5) = x^2$. El punto $(1, 1.7)$ pertenece a la parábola; por lo tanto, $4p(1.7 - 2.5) = 1$, por lo tanto, $p = -0.31$. La distancia pedida es el valor de x cuando $y = 0$ en la ecuación $4(-0.31)(y - 2.5) = x^2$, esto es, $x = 1.76$ metros.



168. Considere la ecuación $m = \frac{10}{9}n(12 - n)$. Completando los cuadrados obtenemos: $(n - 6)^2 = -\frac{9}{10}(m - 40)$, esto es, una parábola con vértice en $(6, 40)$. El número máximo de familias que usarán el producto es la coordenada y del vértice, esto es, 40.



169. Considerando la ecuación $h = -4.9t^2 + 58.8t$ y completando cuadrados obtenemos $(t - 6)^2 = -0.20(h - 176.4)$, esto es, una parábola con vértice $(6, 176.4)$. Por lo tanto, la altura máxima es 176.4 metros y la alcanza en 6 segundos.

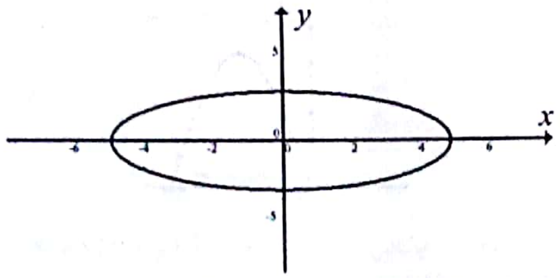


170. $q = 600$, $I = 36\,000$

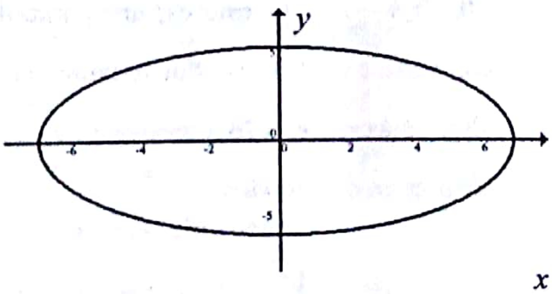
171. Sea x el número de incrementos de \$10 en el precio del libro; así, el precio del libro es de $180 + 10x$ y el número de ejemplares que se venderán es de $5000 - 200x$. La utilidad es

$(180 + 10x)(5000 - 200x) = 9000000 + 14000x - 2000x^2$. Esta es la ecuación de una parábola con vértice en $(3.5, 924500)$. Cuando $x = 3.5$ se tiene la utilidad máxima Esto es a un precio de $\$(180+35) = \$215$.

172. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

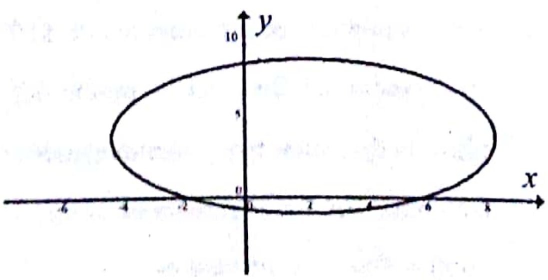


173. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$

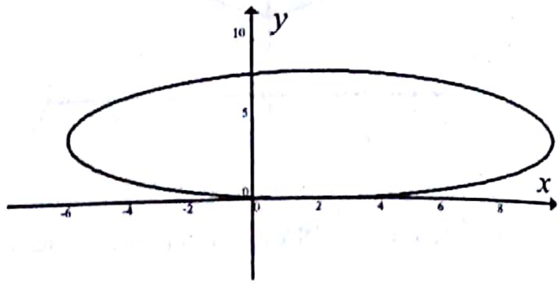


174. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

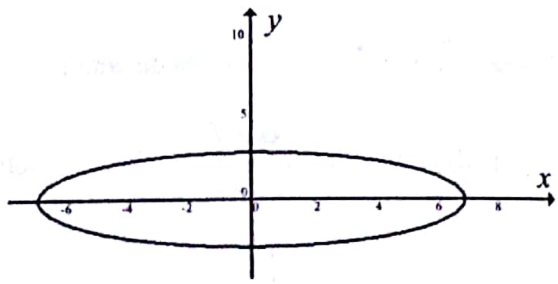
175. $\frac{(x-2)^2}{41} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$



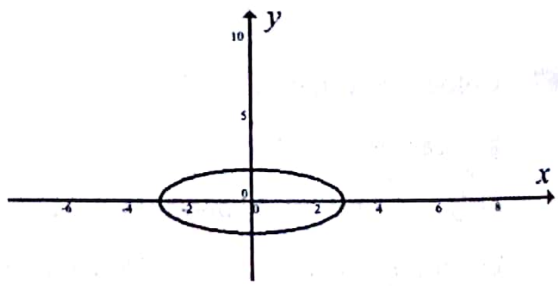
176. $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$



177. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

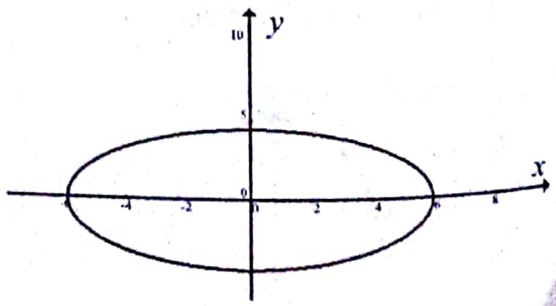


178. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

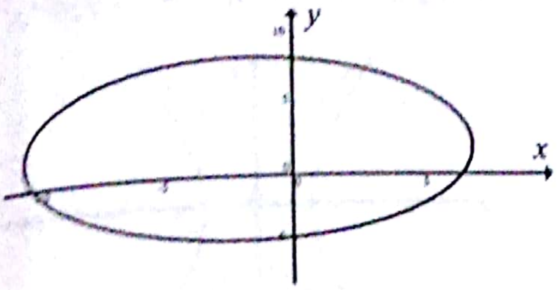


179. $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

180. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$



181. $\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$



182. El centro es $(0,0)$; los vértices son: $(\pm 2,0)$ y $(0,\pm 3)$; los focos son: $(0,\pm\sqrt{5})$.

183. El centro es $(0,0)$; los vértices son: $(\pm 5,0)$ y $(0,\pm 6)$; los focos son: $(0,\pm\sqrt{11})$

184. El centro es $(0,0)$; los vértices son: $(\pm 4,0)$ y $(0,\pm 3)$; los focos son: $(\pm\sqrt{7},0)$

185. El centro es $(1,2)$; los vértices son: $(5,2)$ y $(-3,2)$; los focos son: $(1+\sqrt{12},2),(1-\sqrt{12},2)$

186. El centro es $(-2,3)$; los vértices son: $(1,3),(-5,3),(-2,9),(-2,-3)$; los focos son: $(-2,3+3\sqrt{3})$, $(-2,3+3\sqrt{3})$

187. La ecuación se reduce a:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1$, que es una elipse con radio $(0,0)$; con vértices $(\pm 5,0)$ y $(0,\pm 1)$ y focos $(\pm 2\sqrt{6},0)$

188. La ecuación se reduce a:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, que es una elipse con radio $(0,0)$; con vértices $(\pm 3,0)$ y $(0,\pm 4)$ y focos $(0,\pm\sqrt{7})$.

189. La ecuación se reduce a:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, y que es una elipse con radio $(0,0)$; los vértices $(\pm 3,0)$ y $(0,\pm 1)$ y los focos $(\pm 2\sqrt{2},0)$

190. La ecuación se reduce a:

$\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{100} = 1$, y que es una elipse con centro $(-3,4)$; los vértices $(5,4),(-11,4),(-3,-6),(-3,14)$ y los focos $(-3,-2),(-3,10)$

191. La ecuación se reduce a:

$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = \frac{1}{2}$, y que es una elipse con centro $(2,3)$; los vértices $(5,3),(-1,3),(2,3-\sqrt{6}),(2,3+\sqrt{6})$ y los focos $(2\pm\sqrt{3},3)$

192. La ecuación dada es equivalente a:

$$4(x^2+5x)+4(y^2-8y)+89=0,$$
$$4(x+\tfrac{5}{2})^2+4(y^2-4)^2=0,$$
$$(x+\tfrac{5}{2})^2+(y-4)^2=0$$

Esto es la ecuación de un punto con centro $(-\frac{5}{2},4)$

193. La ecuación dada es equivalente a:

$$5x^2+3(y^2-y)=12,$$
$$5(x-0)^2+3(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{51}{4},$$
$$\frac{(x-0)^2}{3}+\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{5}=\frac{17}{20}$$

La ecuación dada representa una elipse con centro $(0,\frac{1}{2})$, vértices $(\pm 3;\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2}\pm\sqrt{5})$ y los focos $(0,\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{170}}{10})$

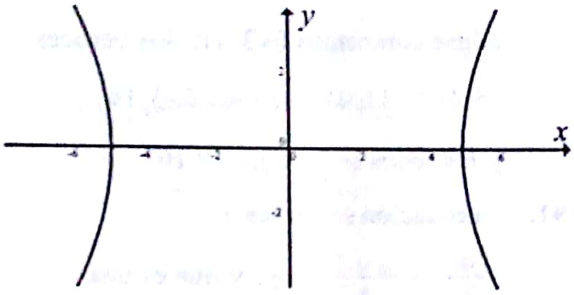
194. $h = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{5} \approx 6.98$

195. $\dfrac{x^2}{(300)^2} + \dfrac{y^2}{(50\pi)^2} = 1$

196. $\dfrac{x^2}{(6500)^2} + \dfrac{y^2}{(500\sqrt{165}\,)^2} = 1$

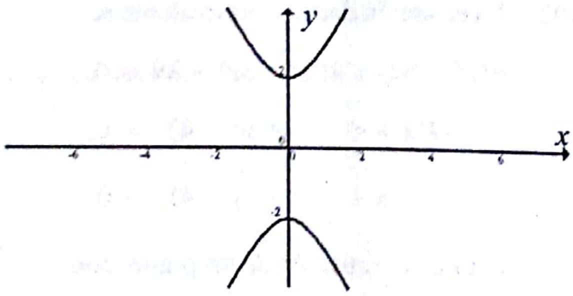
197. Vértices $(\pm 5, 0)$; focos $(\pm 7.8, 0)$;

asíntotas $y = \frac{6}{5}x, \quad y = -\frac{6}{5}x$



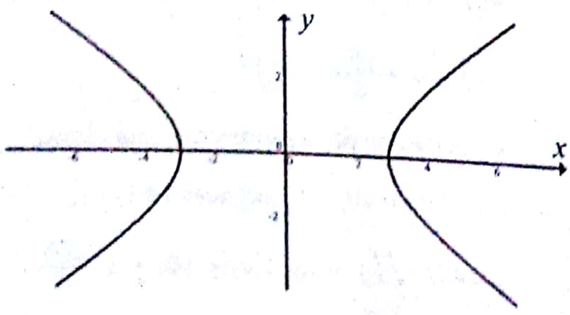
198. Vértices $(0, \pm 2)$; focos $(0, \pm\sqrt{5}\,)$;

asíntotas $y = 2x, \quad y = -2x$



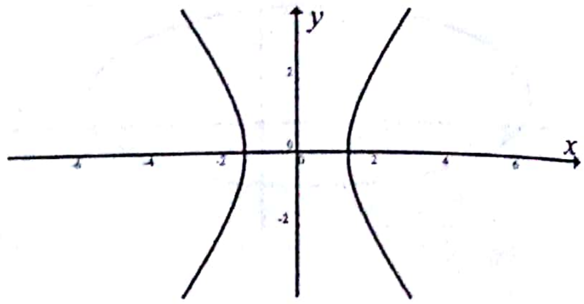
199. Vértices $(\pm 3, 0)$; focos $(\pm\sqrt{13}\,, 0)$;

asíntotas $y = \frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{2}{3}x$



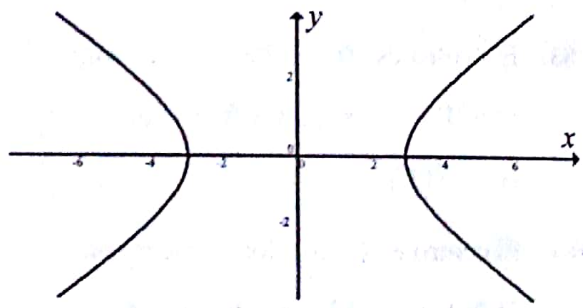
200. Vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$; focos $(\pm\sqrt{6}, 0)$;

asíntotas $y = \sqrt{2}x, \quad y = -\sqrt{2}x$



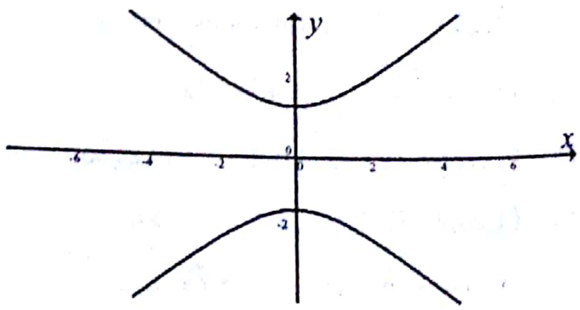
201. Vértices $(\pm 3, 0)$; focos $(\pm\sqrt{13}\,, 0)$;

asíntotas $y = \frac{2}{3}x, \quad y = -\frac{2}{3}x$



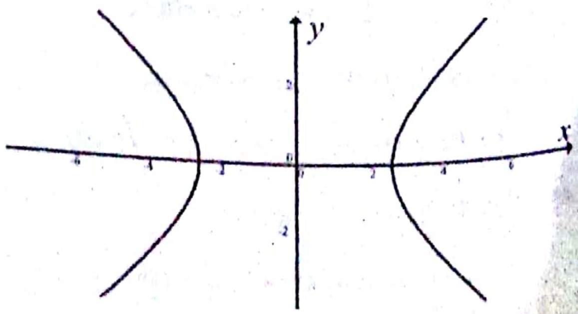
202. Vértices $(0, \pm\sqrt{2}\,)$; focos $(0, \pm\sqrt{5}\,)$;

asíntotas $y = \frac{3}{2}x, \quad y = -\frac{3}{2}x$

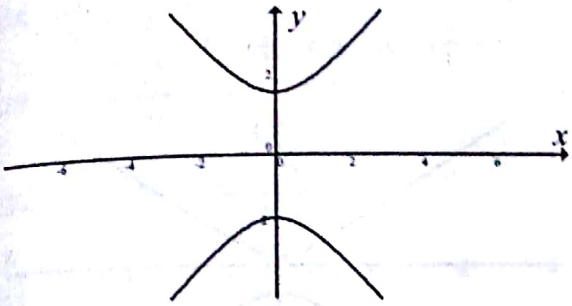


203. Vértices $(\pm\sqrt{7}, 0)$; focos $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$;

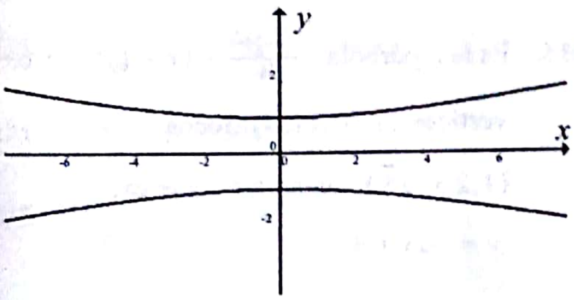
asíntotas $y = \frac{7}{5}x, \quad y = -\frac{7}{5}x$



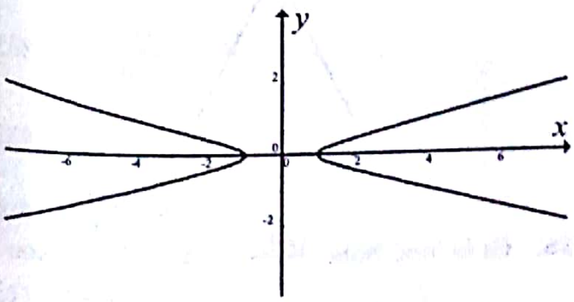
204. Vértices $(0, \pm\sqrt{3})$; focos $(0, \pm\sqrt{5})$;
asíntotas $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,x, \quad y = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$



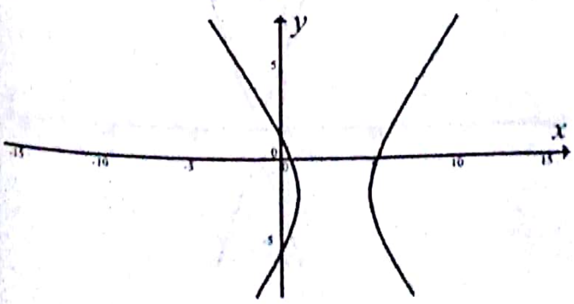
205. Vértices $(0, \pm 1)$; focos $(0, \pm\sqrt{6})$;
asíntotas $y = \frac{1}{5}x, \quad y = -\frac{1}{5}x$



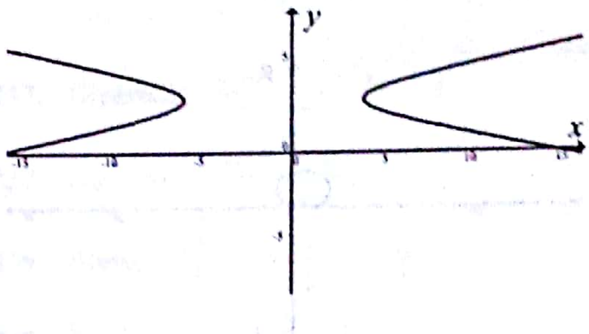
206. Vértices $(\pm 1, 0)$; focos $\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{4}, 10\right)$;
asíntotas $y = \frac{1}{16}x, \quad y = -\frac{1}{16}x$



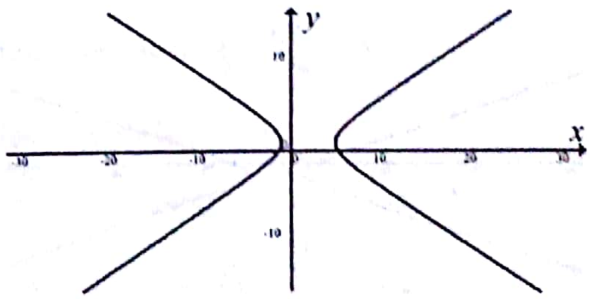
207. Vértices $(1,-2), (5,-2)$;
focos $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$;
asíntotas $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}, \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$



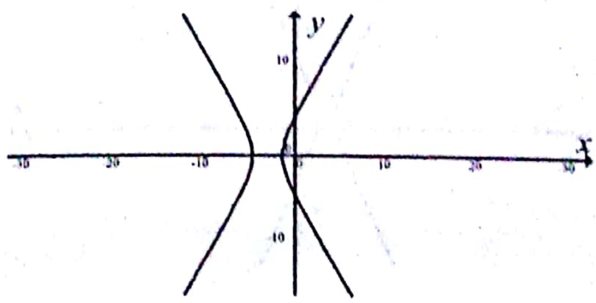
208. Vértices $(-6,3), (4,3)$; focos
$(-1 \pm \sqrt{6}, 3)$; asíntotas
$y = \frac{1}{5}x + \frac{16}{5}, \quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$



209. Vértices $(1,1), (5,1)$; focos
$(2 \pm \sqrt{13}, 1)$; asíntotas
$y = \frac{3}{2}x - 2, \quad y = -\frac{3}{2}x + 4$



210. Vértices $(-5,0), (-1,0)$; focos
$(-3 \pm 2\sqrt{3}, 0)$; asíntotas
$y = \sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}$

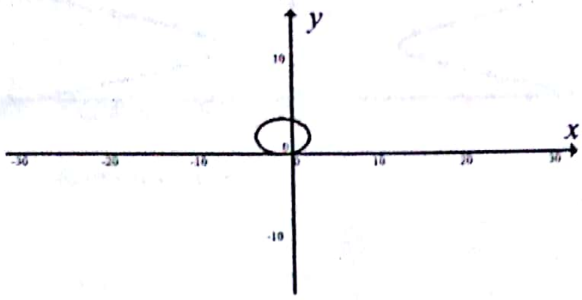


211. Es la hipérbola $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Vértices $(-4,2), (2,2)$; focos

$(-1 \pm \sqrt{13}, 2)$; asíntotas

$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$, $\quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

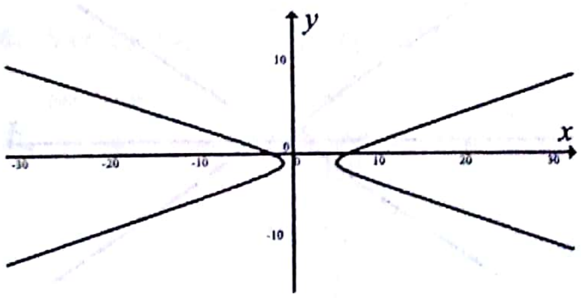


212. Es la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{9} - (y+1)^2 = 1$, con

vértices $(-1,-1), (5,-1)$; focos

$(2 \pm \sqrt{10}, -1)$; asíntotas

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$, $\quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



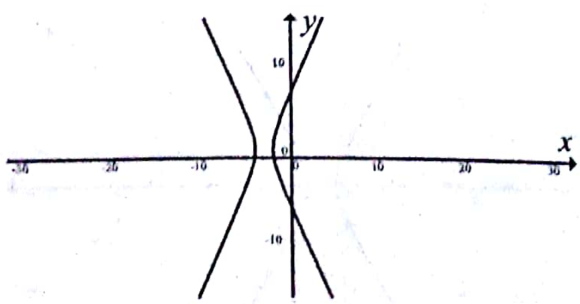
213. Es la hipérbola $(x+3)^2 - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$, con

vértices $(-4,1), (-2,1)$; focos

$(-3 \pm \sqrt{6}, 1)$; asíntotas

$y = \sqrt{5}x + 1 + 3\sqrt{5}$,

$y = -\sqrt{5}x + 1 - 3\sqrt{5}$

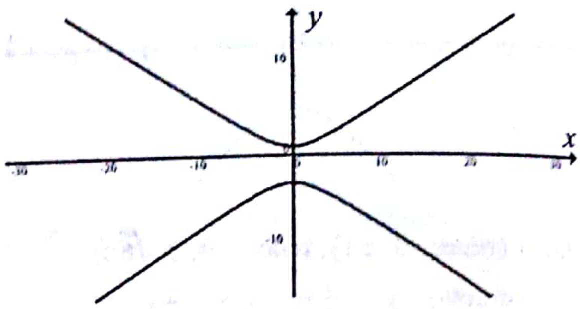


214. Es la hipérbola $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$, con

vértices $(0,-5), (0,3)$; focos

$(0, -1 \pm \sqrt{13})$; asíntotas

$y = \frac{2}{3}x - 1$, $\quad y = -\frac{2}{3}x - 1$

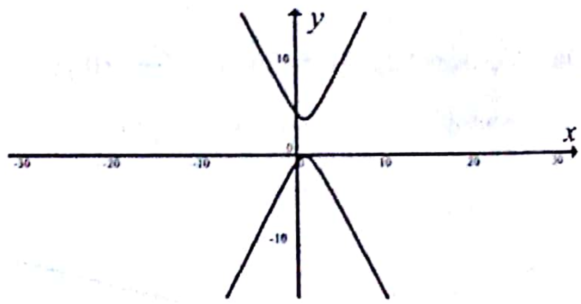


215. Es la hipérbola $\frac{(y-2)^2}{4} - (x-1)^2 = 1$, con

vértices $(1,0), (1,4)$; focos

$(1, 2 \pm \sqrt{5})$; asíntotas $\quad y = 2x$,

$y = -2x + 4$

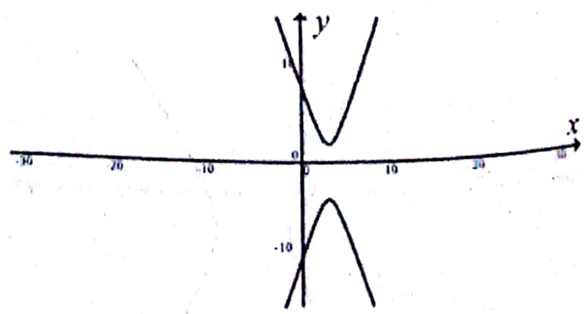


216. Es la hipérbola $\frac{(y+1)^2}{9} - (x-3)^2 = 1$, con

vértices $(3,2), (3,4)$; focos

$(3, -1 \pm \sqrt{10})$; asíntotas

$y = 3x - 10$, $\quad y = -3x + 8$



217. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

218. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

219. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

220. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

221. $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

222. $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$

223. $\frac{(x-3)^2}{49} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$

224. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$

225. $\frac{(y+1)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

226. $(x-2)^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

227. $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{49} = 1$

228. $\frac{(x+2)^2}{49} - \frac{(y-3)^2}{121} = 1$

229. $5\sqrt{3}$

230. $\left(\sqrt{\frac{17}{3}}, 5\right)$

231. Parábola: $(x-1)^2 = \frac{1}{2}(y-7)$

232. Círculo: $(x-3)^2 + \left(y+\frac{9}{2}\right)^2 = 9$

233. Hipérbola: $\frac{(x+4)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{1} = 1$

234. Elipse: $\frac{(x+3)^2}{1} + \frac{(y-8)^2}{4} = 4$

235. Hipérbola: $\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

236. Elipse: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

237. Hipérbola: $\frac{(x+6)^2}{10} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$

238. Hipérbola: $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y+2)^2}{3} = \frac{3}{2}$

239. Elipse: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = \frac{11}{9}$

240. Parábola: $(x-1)^2 = \frac{1}{3}(y-1)$

241. Parábola: $(x+4)^2 = -6(y+2)$

242. Hipérbola: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

243. Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

244. Círculo: $x^2 + y^2 = 16$

245. Hipérbola: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

246. Parábola: $y^2 = 8x$

247. Parábola: $(y-6)^2 = -\frac{2}{3}(x+5)$.

248. $\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right)$,
$\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right)$

249. $\left(\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right)$

250. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{7} = 1$

240. Parábola: $(x+4)^2 = -6(y+2)$

241. Hipérbola: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

242. Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

243. Círculo: $x^2 + y^2 = 16$

244. Hipérbola: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

245. Parábola: $y^2 = 8x$

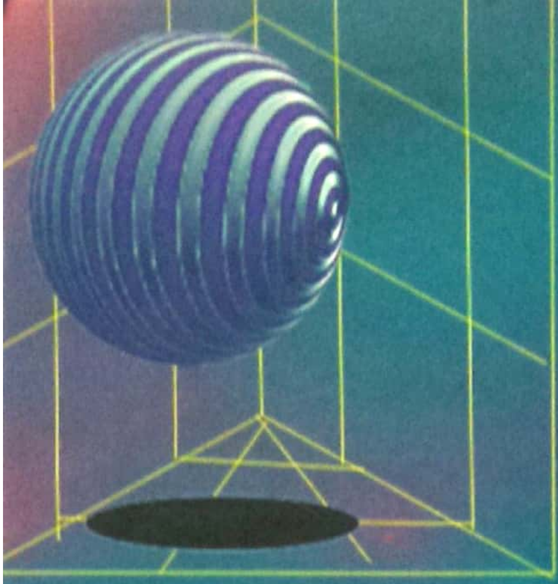
246. Parábola: $(y-6)^2 = -\frac{2}{3}(x+5)$

247. $\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3},\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right),$
$\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3},\ \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right)$

248. $\left(\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}\right)$

249. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{7} = 1$

Se terminó de imprimir
en julio de 2001 en
Reproflo, S.A. de C.V.
Calle Chipiona No. 115
Col. Cerro de la Estrella
09880, México, D.F.



MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. (525)281-2906
editor@thomsonlearning.com.mx
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Tel./Fax (5411)4777-0960
thomson@pop.ba.net
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787)758-7580
thomson@coqui.net
Hato Rey, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
clithomson@andinet.com
Bogotá, COLOMBIA

THOMSON LEARNING

ISBN 970-686-076-2

9 789706 860767