Lógica
Lógica de Predicados

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 1 - Lógica

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Elementos de la lógica de predicados
     - Dominio
     - Individuos
     - Propiedades
     - Relaciones
   - Variables
   - Representando conjuntos

2. Formalización de la lógica de predicados
   - Formalizando individuos: constantes
   - Formalizando propiedades y relaciones: predicados
   - Cuantificadores
     - Cuantificador Universal
     - Cuantificador Existencial
     - Cuantificador Existencial Negado

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Elementos de la lógica de predicados
     - Dominio
     - Individuos
     - Propiedades
     - Relaciones
   - Variables
   - Representando conjuntos
2. Formalización de la lógica de predicados
   - Formalizando individuos: constantes
   - Formalizando propiedades y relaciones: predicados
   - Cuantificadores
     - Cuantificador Universal
     - Cuantificador Existencial
     - Cuantificador Existencial Negado

Limitaciones de la lógica proposicional

Analicemos el siguiente razonamiento en lenguaje natural:

"Todos los perros son animales. Firulais es un perro. Por tanto Firulais es un animal."

Si lo estructuramos el razonamiento queda:

Todos los perros son animales
Firulais es un perro

Firulais es un animal

Suena lógico ¿verdad?. Pareciera tratarse de un razonamiento válido y que si las premisas desde las cuales partimos son verdaderas, entonces la conclusión también debería serlo.

Limitaciones de la lógica proposicional - Análisis

Vamos a formalizar el razonamiento para corroborar nuestro análisis. Observamos que contiene todas proposiciones atómicas. Por lo cual, nuestro diccionario queda de la siguiente manera:

p = Todos los perros son animales
q = Firulais es un perro
r = Firulais es un animal

Al extrapolar, el razonamiento en lógica proposicional queda:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Vemos que la conclusión es independiente de las premisas, es decir, no se deduce de las mismas, por tanto, el razonamiento es **INVÁLIDO** .

Limitaciones de la lógica proposicional - Resolución

Pero entonces, ¿cómo puede ser? ¿cuál es el problema de nuestro razonamiento? ¿Será que es realmente inválido y nuestra intuición nos falló?

Pues no, la problemática radica en que las proposiciones mencionan una situación del universo general ("Todos los perros...") , pero no hacen mención sobre las características, ni estructura interna de dicha situación. En este ejemplo, una parte de lo mencionado en p ("Todos los perros son animales"), es utilizado por q ("...es un perro"), pero otra parte por r ("... es un animal"), es decir, el mismo individuo (Firulais), es mencionado tanto en q como en r. Esto se debe a que la lógica proposicional no involucra ni profundiza sobre individuos del universo. Lo cual nos lleva a entender que este lenguaje tiene ciertas limitaciones.

De esta manera...

Nuestra intuición no nos falló, lo que sucede es que estamos utilizando el lenguaje incorrecto para dicho ejemplo, ya que el mismo no nos provee las herramientas necesarias para construirlo.

Lógica de predicados al rescate

Por este motivo es que para expresar, y analizar oraciones más complejas y específicas, necesitamos una nueva herramienta.

Así es que la lógica, nos brinda **un nuevo lenguaje** con las herramientas necesarias para expresar y traducir oraciones que representen individuos, relaciones entre ellos y las características del universo.

Este nuevo lenguaje se llama **lógica de predicados,** también conocido como **lógica de orden uno** o **lógica de primer orden** .

Lógica de predicados

Este lenguaje nos va a permitir formalizar oraciones sobre individuos, sobre sus propiedades, y sobre cómo esos individuos se relacionan entre sí.

Notar que la lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional, también se puede formalizar con lógica de predicados, pero como ya vimos en el ejemplo anterior, **no funciona al revés.**

Elementos de la lógica de predicados

Como acabamos de mencionar, la lógica de predicados es un lenguaje, y como tal, podremos traducir oraciones al lenguaje natural y viceversa.

Para ello, aprovecharemos las mismas herramientas que ya conocemos de la lógica proposicional: la elaboración de un diccionario para formalizar las oraciones correspondientes.

Para elaborar el diccionario necesitaremos conocer los **4 elementos principales** que nos brinda la lógica de predicados:

1. El/los dominios
2. Individuos
3. Propiedades
4. Relaciones

El elemento estrella: El Dominio

Es importante destacar que los individuos, las propiedades y relaciones son parte de un elemento mayor: **El dominio.**

Definición

El dominio es **el conjunto de valores** que puede tomar cada individuo al cual le queremos aplicar una propiedad o relación. Basicamente, es el conjunto de individuos que queremos representar.

El dominio puede identificarse con el universo total o puede ser un conjunto restringido del mismo (un subconjunto). Por ejemplo, dentro del universo del cine, podemos contar con el dominio de las películas, el dominio de las plataformas para mirar películas, el dominio de las series, el dominio de las empresas que producen películas, etc.

El elemento estrella: El Dominio - Continuación

Pero ¿cómo definimos un dominio?
Bien, por ejemplo si quisieramos trabajar con 4 películas puntuales, las podemos definir enumerándolas una por una.
Ahora bien, ¿qué pasa si quisieramos expandir nuestro grupo de valores a todas las películas del mundo que se hayan filmado?
Se tornaría muy tedioso, y hasta imposible agregar el resto una por una. Es por esto que que contamos con 2 maneras de definir el dominio: por extensión (o enumeración) y por comprensión.
Por extensión: es la manera de definir la 1era situación, enumerando uno por uno cada valor. Ejemplo: Dominio = [“La vida es bella”, “El hijo de la novia”, “Tiempo de valientes”, “Duro de matar”]. Este caso se utiliza para conjuntos muy reducidos.
Por comprensión: simplemente mencionando el nombre del conjunto, por ejemplo: Dominio = películas.
Es importante saber que pueden coexistir más de un dominio. Las oración más interesantes manejan 2 dominios.

Individuos

Retomemos el ejemplo inicial: "Todos los perros son animales. Firulais es un perro. Por tanto Firulais es un animal."

En este ejemplo, ¿cuál creen que es el individuo?

Para responder esta pregunta, veamos la definición de Individuo:

Definición

Un individuo es un **elemento único e irrepetible del dominio.** Puede ser una persona (Ariel, Ana, Belén), un animal (Firulais, Rocinante), o un valor más abstracto (El número 3, El color verde, etc).

Para determinar un individuo es necesario que sea identificable de forma unívoca. Si hablamos de "Ariel", nos referimos a un sólo Ariel, tiene un DNI único. Podemos saber quien es y señalarlo con el dedo. No hablamos de una persona cualquiera, sino de alguien particular: Ariel Gonzalez.

Individuos dentro de un conjunto

Pero, ¿por qué hacer esta aclaración que parece tan obvia?

Porque la manera en que identificamos a un individuo va a depender enteramente del dominio que estemos trabajando. Por ejemplo, si nuestro dominio, contempla el siguiente grupo de amigxs: [“Camila, Sofia, y Martín”], es muy simple identificar a cada individuo, pero si en cambio nuestro dominio se conforma de todas las personas que estudian en la universidad , es muy probable que haya más de una persona con el mismo nombre, ejemplo, más de una “Camila”. Por lo que debemos especificar mucho más acerca de qué “Camila” se trata, dado que son 2 individuos diferentes, es decir, debemos desambiguar para saber claramente sobre quién estamos hablando.

Es importante notar que “Camila” es sólo un nombre, pero lo que importa es la persona que representa dicho nombre, es decir, lo que importa no es el nombre sino el individuo en sí.

Mismo individuo, muchas formas

Los números por ejemplo, son elementos únicos e irrepetibles. Cinco es cinco , siempre.

Sin embargo, podemos decir **"cinco"**, pero si habláramos en otro idioma diríamos por ejemplo **"cinq"**, **"cinque"**, **"five"**, **"fem"** , etc.

Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro idioma, tenemos símbolos que representan al mismo individuo como ser **"5"**, **o "V"** (en números romanos).

Más aún, si escribimos **"3+2" o "4+1"**, ¿Qué representan?. Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco.

En este caso, lo que importa no es cómo lo escribimos, sino lo que queremos representar... el individuo en sí.

Individuo - Ejemplos

Si observamos la definición de individuo podemos concluir que un individuo nunca podrá ser un sustantivo colectivo, es decir un conjunto, y que siempre será parte del dominio. Básicamente debemos expresar a los individuos con nombres propios, es decir en "mayúscula".

Para el siguiente dominio, veamos algunos ejemplos que son de individuos y otros que no lo son.

Dominio: Animales

Es individuo	No es individuo	Tampoco lo es
Rocinante	Caballos	Caballo
Chita	Monos	mona
Firulais	Perros	Perra
Sid	Perezosos	Perezoso
El caballo de San Martín	Los caballos	el caballo

Individuos - Análizando los ejemplos

Analicemos un poco estos ejemplos:

La columna 1) contiene todos ejemplos de animales claramente identificables. Por ejemplo, no estamos hablando de cualquier caballo, sino de Rocinante o de El caballo de San Martín.
En cambio en la columna 2), claramente no son individuos por tratarse de conjuntos, es decir, estamos identificando más de un animal. Observar que está expresado en plural, este es un claro indicio de que no es un individuo.
Por último, en la columna 3) si bien la descripción se encuentra en singular, no especifica unívocamente de qué caballo se trata, es decir, ¿de qué caballo estamos hablando cuando decimos "caballo"?. Por lo cual tampoco es una definición correcta de individuo.
Pero entonces, ¿cómo podríamos expresar la siguiente oración en lógica de predicados? : "Rocinante es un caballo valiente".
Pues bien, ya tenemos identificado el individuo: "Rocinante", ahora veamos cómo expresar el resto de la oración: "es un caballo valiente".
Para ello es que veremos a continuación el concepto de **Propiedad.**

Propiedad

Mediante la lógica de predicados vamos a describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa del mismo, el dominio, y para ello será necesario utilizar propiedades.

Definición

Una propiedad es un adjetivo, una cualidad, característica o atributo que puede aplicarse a un individuo perteneciente a un dominio.

De esta manera podemos decir que "es un caballo valiente", es una propiedad que puede aplicarse al individuo "Rocinante" del dominio de los animales.

Otros ejemplos de propiedades, y que puden aplicarse a individuos de distintos dominios, pueden ser "es docente" , "es un perezoso", o "es un número impar" . Para el caso de "es docente de la UNQ" es una propiedad que no tiene sentido aplicar a animales, pero si definiendo al dominio Docentes.

Resumiendo, podemos decir que los individuos **tienen propiedades.**

Aplicando propiedades

Para que un individuo tenga una propiedad, en lógica de predicados, debemos "aplicar" dicha propiedad al individuo. De esta manera podemos tratar la expresión como una proposición.

Por ejemplo, si tenemos la propiedad "es un caballo", vamos a **aplicar** a "Rocinante" esta propiedad para obtener la proposición "Rocinante es un caballo", y así obtener un valor de verdad **VERDADERO** o **FALSO** .

Si en cambio aplicamos la misma propiedad a "Sid", obtendremos la proposición "Sid es un caballo", la cual también tiene un valor de verdad, que no necesariamente será igual al de la proposición anterior.

Aplicando propiedades - Ejemplo

Supongamos que nuestro dominio contempla los siguientes 4 valores que son bandas de rock: [Los Redondos, Divididos, Queen, Led Zeppelin].

La manera de clasificar esta información, será identificando, por un lado los individuos (cada una de las bandas), y por otro, las propiedades que vamos a aplicar sobre ellos. Una posible propiedad será "es una banda nacional".

Podemos representar esta información como una tabla de doble entrada, con los individuos como filas y las propiedades como columnas:

Ind./Prop.	es una banda nacional
Los redondos	
Divididos	
Queen	
Led Zeppelin	

La tabla podremos completarla con **V** o **F**, dependiendo del valor que tome la propiedad (de la columna) aplicada al individuo (en dicha fila).

Aplicando propiedades - Ejemplo - Continuación

Ind./Prop.	es una banda nacional
Los redondos	**V**
Divididos	**V**
Queen	**F**
Led Zeppelin	**F**

Vemos entonces como, por ejemplo la propiedad "es una banda nacional" se aplica a "Los Redondos", quedando la proposición, **"Los redondos es una banda nacional"** la cual tiene el valor de verdad **VERDADERO** . Lo mismo sucede en el caso de "Divididos".
Pero por el contrario, cuando aplicamos la propiedad a "Queen" y a "Led Zeppelin", ambas proposiciones valuan **FALSO** .

Propiedades que dependen de otras propiedades

Agreguemos ahora una segunda propiedad a nuestro ejemplo: "es banda internacional" .

Si aplicamos esta propiedad a "Los Redondos", obtenemos la proposición "Los redondos es una banda internacional", y sabemos que esta proposición valuará **FALSO** (lo mismo ocurre con "Divididos"), en cambio valuará **VERDADERO** si la aplicamos a los individuos restantes.

Veamos ambas propiedades en la misma tabla:

Ind./Prop.	es una banda nacional	es una banda internacional
Los redondos	**V**	**F**
Divididos	**V**	**F**
Queen	**F**	**V**
Led Zeppelin	**F**	**V**

Propiedades que dependen de otras propiedades

Analizando la tabla anterior, si bien podemos tratar a ambas propiedades como independientes, hay una clara relación entre "es una banda nacional" y "es una banda internacional" .

Esto es, si algún individuo de nuestro dominio es una banda nacional, entonces seguro no es una banda internacional, y viceversa. Es decir, **ambas son opuestas.**

Ya conocemos una **conectiva** que representa el concepto de opuesto: **la negación.**
De esta manera podemos reformular la propiedad "es una banda internacional" en términos de "es una banda nacional", de la siguiente manera:

"es banda internacional $= \neg$ es banda nacional"

Así, vemos como podemos tener propiedades que dependen de otras.

Propiedades compuestas - Ejemplo

Imaginemos ahora que contamos con dos nuevas propiedades que aplican a nuestro dominio:

1) "vendió muchos discos"
2) "tiene muchxs fans"

A partir de las propiedades que ya definimos podemos crear nuevas. Podemos decir, por ejemplo, que si un individuo de nuestro dominio vendió muchos discos y tiene muchxs fans, se puede considerar que "es muy popular."

Quedando la nueva propiedad compuesta como:
"es popular $=$ vendió muchos discos $\wedge$ tiene muchxs fans"

Como hemos visto, el hecho que una propiedad dependa de otra, implica utilizar conectivas, de esta manera podemos decir que, cuando se da dicha situación, **estamos definiendo propiedades compuestas.**

Propiedades compuestas - Ejemplo - Continuación

¿Qué significa, por ejemplo, aplicar la propiedad "es popular" a "Divididos" ?

Significa que Divididos debe cumplir con haber vendido muchos discos y tener muchxs fans. Es decir que debemos aplicar a "Divididos" cada una de las propiedades que componen "ser popular", y que en todos los casos el resultado debe ser **VERDADERO** .

Divididos es popular = Divididos vendió muchos discos $\wedge$ Divididos tiene muchos fans.
Al tratarse de una conjunción, ambas proposiciones deben ser verdaderas, para que la propisición compuesta sea Verdadera.

¿Propiedades que incluyen individuos?

Como hemos mencionado en la definición de este lenguaje, la lógica de predicados trabaja sobre individuos, sus propiedades, y la manera de relacionarse entre sí. Para comprender este último elemento analicemos la siguiente oración:
"Divididos comparte escenario con Los Redondos" .

Para formalizar podríamos tener una propiedad que sea "comparte escenario con Los Redondos", y nos basta con aplicar dicha propiedad a "Divididos" para traducir la proposición anterior.

Pero ¿qué pasa si también queremos escribir "Los Redondos comparten escenario con Queen"?. Necesitamos otra propiedad "comparte escenario con Queen" para aplicarla a "Los Redondos". Claramente esta resolución no es muy eficiente. Sin embargo, vemos que hay un patrón entre ambas frases. Ambas relacionan a los individuos de la misma manera: el hecho de compartir escenario con otra banda (otro individuo).

Relaciones

Cuando vemos que en una propiedad estamos haciendo mención a un individuo, “Los Redondos”, en “comparte escenario con Los Redondos”, para aplicarla a otro individuo, “Divididos”, lo que en realidad queremos expresar es **una relación / vínculo entre estos dos individuos.**

En este caso, entre “Divididos”, a quien será aplicada la propiedad y “Los Redondos”, quien forma parte de la propiedad. Lo que buscamos es una **relación** entre ambos.

Una relación, al igual que una propiedad, se aplica sobre individuos, pero en lugar de aplicar sobre un sólo individuo, **se aplica sobre dos.**

Relaciones - Definición

Habiendo comprendido esto, podemos reemplazar la propiedad definida previamente, por la relación "comparte escenario con", para aplicarla a "Divididos" y a "Los Redondos" respectivamente, obteniendo así la siguiente proposición que los relaciona: "Divididos comparte escenario con Los Redondos" .
De esta manera resolvemos el problema de tener que definir 2 propiedades (o muchas más) que dependan de los individuos. Con una relación, podemos formar varias oraciones sobre los individuos que vayamos necesitando. De esta manera, es que también podemos traducir la proposición: "Los Redondos comparten escenario con Queen", sin necesidad de definir otro elemento (una 2da propiedad).

Definición

Una relación vincula dos individuos del mismo o distintos dominios, a través de una característica o situación.

Relaciones - El orden de los factores sí altera el producto

Como todo lenguaje deberíamos poder expresar varios tipo de oraciones. Veamos por ejemplo: "Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos".

El hecho de que Led Zeppelin influya sobre Divididos no significa que Divididos también influya sobre Led Zeppelin. Por lo que las relaciones son dirigidas. Es decir, aplicar la relación "tiene influencia sobre" a "Led Zeppelin" y a "Divididos" respectivamente, representa que "Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos", pero si la aplicamos en el orden inverso, nos queda: "Divididos tiene influencia sobre Led Zeppelin". En cuyo caso puede no ser cierto, por lo cual, al aplicar una relación, no es trivial el orden de los individuos. El valor de verdad de ambas oraciones no es necesariamente idéntico. De hecho, en este caso son independientes.

Orden en una relación

El orden en el que aplicamos la relación a los distintos individuos, da como resultado diferentes proposiciones pudiendo tener diferentes valores de verdad.

Relaciones que dependen de otras relaciones

De manera similar a lo que ocurre con las propiedades, las relaciones pueden estar dadas en términos de otras relaciones.

Por ejemplo, podríamos decir que "tiene como banda soporte a" requiere dos factores, tener influencia y respeto. Así:

"tiene como banda soporte a = tiene influencia sobre ∧ respeta a"

Por ejemplo, apliquemos "tiene como banda soporte a" a "Led Zeppelin" y a "Divididos" respectivamente.

Como sabemos, la equivalencia queda:

"Led Zeppelin tiene como banda soporte a Divididos = Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos ∧ Led Zeppelin respeta a Divididos."

Al igual que en las propiedades, cuando una relación utiliza conectivas, podemos decir que **estamos definiendo relaciones compuestas.**

Las relaciones y el lenguaje natural

Dado que el lenguaje español es muy rico, puede suceder que haya distintas maneras de expresar lo mismo, por ende, es imprescindible tener en cuenta la semántica de la relación que estamos definiendo. Esto se logra indicando el orden correcto de los individuos.

Veamos una variación de uno de los ejemplos: "tiene influencia sobre". De la misma manera, podríamos haber definido esta relación como: "es influenciado por", que a los fines prácticos, expresa la misma relación, pero esta nueva forma de expresarla nos obliga a tener en cuenta el orden en que indicamos los individuos, dado que podría suceder que estemos expresando exactamente lo opuesto a lo que queremos.

No es lo mismo decir: "Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos" que "Led Zeppelin es influenciado por Divididos". En este caso, el orden de los individuos debe ser el opuesto para sostener la proposición original.

Es importante aclararlo, porque no siempre resulta evidente que en las oraciones equivalentes se debe alterar el orden de los individuos.

Variables

Hasta ahora venimos aplicando propiedades y relaciones a individuos específicos que declaramos a modo de ejemplo, pero, ¿cómo podemos hacer si queremos aplicarlas a un individuo "x" de nuestro dominio, es decir, un individuo que en un principio desconocemos? Más aún, ¿cómo podemos definir estos valores de manera genérica?. Pues bien, para resolver esta situación es que contamos con las: **variables.**

Definición

Una variable **representa** a un individuo dentro de una propiedad o relación, pero que al momento de definirla, desconocemos cuál es. Para esta representación se utilizan letras. Por convención se utilizan x, y, z, etc.

Variables - Motivación

¿Para qué necesitamos realmente variables?

Antes de responder, será necesario que primero analicemos qué queremos decir con "un individuo que en un principio desconocemos".

Esta frase, sugiere la idea de que hay más de un momento. Y esto es correcto: el momento de definir la propiedad y el momento de aplicarla. Estos momentos se utilizan para formalizar, ya que, así como en lógica proposicional, en lógica de predicados también vamos a necesitar generar y/o traducir oraciones formalmente, utilizando su lenguaje.
Este tema lo profundizaremos más adelante, por ahora, vamos a aprender el manejo de variables ha utilizar al momento de definir una propiedad.

Variables - Aplicación

Entonces ¿cómo utilizamos las variables para formar oraciones?

Simple, sustituimos el individuo de la oración por la variable (letra), la cual irá tomando distintos valores según se vaya necesitando para formar las diferentes oraciones.

Este método lo realizaremos cada vez que necesitemos que los individuos tomen diferentes valores, es decir que podemos utilizar variables tanto al definir propiedades como relaciones. De esta manera, las propiedades tendrán 1 variable (que representa a un individuo) y las relaciones 2 variables (que representan a los individuos que se relacionan).

Variales - Aplicación en propiedades

Veamos un par de ejemplos para comprender mejor este tema.

Recordemos la propiedad "es una banda nacional". Según lo que acabamos de mencionar, la manera de poder definir esta propiedad para aplicarla a varios individuos es mediante una variable. Quedando de la siguiente manera: " **x** es una banda nacional" .

Luego, si aplicamos dicha propiedad a "Divididos", es decir, reemplazamos la variable x por "Divididos", terminamos formando la oración: "Divididos es una banda nacional".

De la misma manera, si queremos formar la oración "Los Redondos es una banda nacional", debemos aplicar esta propiedad al individuo "Los Redondos", reemplazando la variable x por el individuo en cuestión. **El valor que tome "x" va a depender de como definimos el dominio para esa variable**

Variables - Aplicación en relaciones

Como ya sabemos, las relaciones vinculan 2 individuos, por lo tanto, necesitaremos 2 variables.

Veamos la relación "tiene influencia sobre", la cual nos indica que un individuo (banda en este caso) tiene influencia sobre otro individuo (otra banda). Por lo tanto, la manera de definir esta relación para aplicarla a varios individuos es: "x tiene influencia sobre y" .

Ahora por ejemplo, si queremos aplicar esta relación a los individuos "Led Zeppelin" y "Divididos" respectivamente, debemos reemplazar cada individuo por cada variable, es decir, Led Zeppelin por x y Divididos por y, formando finalmente la oración: "Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos" .

Variables - Aplicación en relaciones - Continuación

Ahora bien, recordemos que habíamos mencionado una oración equivalente, ¿cómo sería su definición y aplicación en dicho caso?
Recordemos la equivalencia definida como:
x tiene influencia sobre **y** = **y** es influenciado por **x**
Observar que para que la oración siga teniendo el mismo significado, debemos invertir el orden de las variables.

Es decir, al aplicar dicha relación sobre los individuos, debemos prestar especial atención a quien llamamos "x", y a quien "y". Dado que al reemplazar las variables en la relación, queda:
"Led Zeppelin tiene influencia sobre Divididos = Divididos es influenciado por Led Zeppelin."

Nota: al momento de aplicar la relación a sus individuos, es fácil identificar quien es quien, dado que la semántica de la propia oración nos lo indica, pero al definir la relación de manera genérica, debemos validar el orden de las variables con el dominio al que pertencen. Más adelante profundizaremos sobre este tema.

Representando relaciones

Como suele suceder, podemos necesitar analizar todas las valuaciones de una relación sobre cada individuo del dominio. Dado que no es tan trivial obtener esta info intuitivamente, necesitaremos armar una tabla de verdad sobre esta relación.
De la misma manera que con las propiedades, contamos con una tabla de doble entrada, pero a diferencia de ésta, en la cual podemos representar más de una propiedad en la misma tabla, aquí toda la tabla representa la relación. Los encabezados de la fila representan al 1er individuo (x) al que aplicamos la relación, y los encabezados de las columnas al 2do (y).

Veamos la tabla de uno de nuestros ejemplos:

x tiene inf. sobre y	Los Redondos	Divididos	Queen	Led Zeppelin
Los Redondos	**F**	**V**	**F**	**F**
Divididos	**V**	**F**	**F**	**F**
Queen	**F**	**F**	**F**	**F**
Led Zeppelin	**F**	**V**	**F**	**F**

Nota: inf. = influencia. En la tabla vemos como Los Redondos y Divididos se influyen mutuamente, Queen no influye a ninguna, pero Led Zeppelin influye a Divididos. Por otro lado, ninguna se influye a sí misma.

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Elementos de la lógica de predicados
     - Dominio
     - Individuos
     - Propiedades
     - Relaciones
   - Variables
   - Representando conjuntos

2. Formalización de la lógica de predicados
   - Formalizando individuos: constantes
   - Formalizando propiedades y relaciones: predicados
   - Cuantificadores
     - Cuantificador Universal
     - Cuantificador Existencial
     - Cuantificador Existencial Negado

Representando conjuntos - Todxs

A modo de repaso, ya hemos aprendido sobre 4 elementos importantes: dominio, individuos, propiedades y relaciones, y hemos formado oraciones simples que involucran uno o dos individuos del dominio. Pero ahora vamos a avanzar con ejemplos un poco más complejos.

Siguiendo con el dominio de las 4 bandas de rock, y sabiendo que contamos con la propiedad definida como: "x es popular", queremos formar la oración: "Todas las bandas de rock son populares" (sólo las bandas de nuestro dominio). Pero, como ya sabemos, la propiedad se aplica a **un** sólo individuo y no a un conjunto. Entonces ¿cómo logramos aplicar esta propiedad a todos los individuos del dominio?

Pues bien, la aplicamos uno por uno a cada individuo del dominio y las unimos mediante una conjunción, resultando: "Todas las bandas de rock son populares = Los Redondos es popular $\wedge$ Divididos es popular $\wedge$ Queen es popular $\wedge$ Led Zeppelin es popular."

Representando conjuntos - Todxs - Continuación

De esta manera, el hecho que cada individuo (banda) sea popular, indica que todas las bandas de nuestro dominio lo son. Precisamente, la palabra **"todos/as"** indica que la propiedad se aplica a cada uno de los individuos del dominio.

Pensémoslo en términos de nuestra tabla de propiedades:

Ind./Prop.	x es popular
Los Redondos	
Divididos	
Queen	
Led Zeppelin	

¿Cómo deberíamos completar la tabla para interpretar nuestra oración?

La interpretación del dominio quedaría:

Ind./Prop.	x es popular
Los Redondos	V
Divididos	V
Queen	V
Led Zeppelin	V

Representando conjuntos - Algún/a / Alguien

Siguiendo con nuestros ejemplos sobre conjuntos, veamos esta oración: "Alguna banda de rock es popular"

¿Cómo completamos la tabla en esta oportunidad?

La realidad es que la oración no informa mucho, sólo menciona que hay alguna banda que es popular, pero bien podría ser que haya más de una. Es decir, sólo sabemos que alguno/os de los casos es **VERDADERO** , pero desconocemos cuáles son. Así, al mencionar "alguno/a, algún o alguien", estamos aplicando la propiedad a cada individuo del dominio uniéndolos mediante disyunciones.

"Alguna banda de rock es popular = Los Redondos es popular $\vee$ Divididos es popular $\vee$ Queen es popular $\vee$ Led Zeppelin es popular"

Para que la disyunción sea verdadera, alguno de los términos de la disyunción debe ser verdadero, pero no sabemos cuál. Si combinamos esta información con otra, tal vez podamos deducir de qué banda se trata.

Representando conjuntos - Ninguno/a / Nadie

Ahora bien, sigamos pensando ejemplos de nuestro dominio que involucran conjuntos, por ejemplo: "Ninguna banda de rock tiene una cantante femenina".

Ninguna es lo mismo que decir que, ni Los Redondos, ni Divididos, ni Queen, ni Led Zeppelin tiene una cantante femenina. Para esto debemos aplicar la propiedad como una conjunción de la negación de cada individuo del dominio. Resultando: Ninguna banda de rock tiene una cantante femenina = ($\neg$ Los Redondos tiene una cantante femenina) $\wedge$ ($\neg$ Divididos tiene una cantante femenina) $\wedge$ ($\neg$ Queen tiene una cantante femenina) $\wedge$ ($\neg$ Led Zeppelin tiene una cantante femenina)

Como ya sabemos, la negación valúa falso, quedando en nuestra tabla representada de la siguiente manera:

	x es popular	x tiene una cant. fem.	$\neg$ x tiene una cant. fem.
Los Redondos	**V**	**F**	**V**
Divididos	**V**	**F**	**V**
Queen	**V**	**F**	**V**
Led Zeppelin	**V**	**F**	**V**

Formalización - Lenguaje de lógica de predicados

Hasta ahora solamente hemos trabajado con la lógica de predicados utilizando oraciones en lenguaje natural, e interpretándolas de manera intuitiva, para comprender cada uno de sus elementos.

En esta sección vamos a dar a conocer el **lenguaje de la lógica de predicados** .

Al igual que la lógica proposicional, la lógica de predicados formaliza sus oraciones mediante fórmulas.

Comencemos entonces a formalizar las oraciones y a conocer este nuevo lenguaje con los conceptos que hemos visto hasta ahora.

Formalización - Diccionario

De la misma manera que en lógica proposicional, para formalizar oraciones necesitamos contar con un **diccionario,** que nos permita realizar las traducciones entre ambos lenguajes: el lenguaje natural y el de predicados. Para armar el diccionario utilizaremos los elementos mencionados hasta ahora, y una vez armado, estaremos en condiciones de formalizar las oraciones en base al mismo.
Por otro lado, tal como lo hemos mencionado al definir el concepto de variable (hoja 30), retomamos el hecho de contar con 2 instancias o momentos. Ahora sí veamos a qué nos hemos referido entonces.

¿Cuáles son estas dos instancias?

El momento de definición de los elementos dentro del diccionario, y el momento de aplicación de dichos elementos para formalizar (traducir). Recordar que la definiciones se realizan una única vez, y la aplicación tantas veces como sean necesarias, en base a la cantidad y variedad de oraciones que necesitemos formalizar.

Formalización - Elementos formales

A continuación veremos los términos formales de los elementos que van a integrar el diccionario. Contamos con los 4 elementos ya mencionados, así como otros que serán necesarios para formar oraciones más complejas, y que serán explicados más adelante. Veamos la correspondencia entre los términos ya conocidos y su denominación formal:

1. Dominio: **Dominio** (no cambia su denominación)
2. Individuos: **Constantes**
3. Propiedades y relaciones: **Predicados**
   1. Propiedades: Predicados de **Aridad 1**
   2. Relaciones: Predicados de **Aridad 2**
4. Conjuntos: **Cuantificadores**
   1. Todxs: **Universal**
   2. Algun/a/alguien: **Existencial**
   3. Ninguno/a / Nadie: **Existencial negado**

Constantes

Definición

Una **constante** es el nombre formal que utilizamos dentro del diccionario para representar a **un individuo** de nuestro dominio.

Al definirse dentro del diccionario, se denotan con **letras minúsculas,** donde la letra hace referencia al individuo al cual representa, es decir al sujeto de la oración . Ejemplos:

1. d = Divididos
2. r = Los Redondos

Es importante entender que será necesario definir una constante por cada individuo del dominio, por lo cual, nuestro diccionario tendrá tantas constantes como individuos necesitemos mencionar.
Notar que la constante se define en minúscula, pero como estamos representando un nombre propio, el valor que le asignamos del lado derecho del igual ("=") debe comenzar en mayúscula.

Predicados

Las propiedades y relaciones tal como las conocemos, en el lenguaje de lógica de predicados se denominan formalmente como **predicados.**

En el diccionario definimos predicados de manera general, es decir, utilizando variables del dominio establecido, para luego, mediante fórmulas, armar o traducir oraciones concretas, aplicando dichos predicados a los individuos representados por las constantes. De esta manera, al traducir las fórmulas, obtenemos oraciones gramaticalmente bien formadas en el lenguaje natural, es decir, con su sujeto (constante) y su predicado (la propiedad o relación) .

Predicados - Definición

Los predicados se representan con letras mayúsculas: S, R, T, etc, relacionadas con lo que representan. Para ganar expresividad podemos utilizar una palabra/frase en su lugar, pero la misma deberá comenzar con mayúscula. La sintaxis al momento de definir un predicado es la siguiente:
Nombre del predicado(variable) = variable + predicado . Por ejemplo para definir la propiedad "x es una banda de rock nacional", debemos escribir: "$B(x) =$ x es una banda de rock nacional", siendo más expresivos/as "$BandaNacional(x) =$ x es una banda de rock nacional", donde el nombre del predicado en el 1er caso es una letra, y en el 2do una frase.

Nota: es importante observar que la variable se encuentra de ambos lados del igual("="), del lado izquierdo la necesitamos para conocer la cantidad de variables que necesita el predicado y el dominio al que pertenece (ya veremos más adelante que puede haber más de un dominio), mientras que del lado derecho nos permitirá crear la oración al formalizar.

Predicados - Aridad

Como aclaración (nota), recien hemos mencionado que: "necesitamos conocer la cantidad de variables que necesita un predicado". Esta frase nos sugiere que un predicado puede tener más de una variable.

Pero ¿en qué caso se da esta situación?
¡Pero claro! Al definir relaciones. Como ya sabemos, una relación vincula 2 individuos, para lo cual, y también ya visto, necesitamos 2 variables. En este caso, el predicado es quien necesita 2 variables al momento de su definición.

A la cantidad de variables que necesita un predicado se la denomina **Aridad** .
Un predicado de aridad uno (1) hace mención a una propiedad, mientras que un predicado de aridad dos (2) hace mención a una relación.

Predicados - Aplicación - Ejemplo propiedad

La manera de aplicar un predicado a un individuo, es reemplazando la variable utilizada al definirse, por la constante que representa el individuo. Veamos un ejemplo de un predicado de aridad 1.
Queremos formalizar la oración: "Divididos es una banda de rock nacional"

Definición - Armamos el diccionario:
Dominio de $x =$ [Los Redondos, Divididos, Led Zeppelin, Queen]
$d =$ Divididos
$B(x) =$ x es una banda de rock nacional

Aplicación - Usamos el diccionario para armar la fórmula:
$B(d)$

De esta manera estamos diciendo que en lógica de predicados, la fórmula $B(d)$, significa en lenguaje natural "Divididos es una banda de rock nacional" , ya que en esta oración "x=d", Divididos

Predicados - Aplicación - Prueba

Pero ¿cómo sabemos que la oración es correcta?

Pues bien, para poder autocoregirnos y verificar formalizamos correctamente, debemos realizar el paso inverso, es decir, traducir la fórmula (siempre utilizando el diccionario) y ver si obtuvimos la oración original en lenguaje natural.

Veamos cómo es esto:

Fórmula: $B(d)$. Primero debemos identificar en el diccionario el significado de cada elemento de la fórmula. En este caso encontramos el predicado denominado B, que se define como "x es una banda de rock nacional", y la constante d que significa Divididos. Como paso intermedio reemplazamos la x por la d, quedando que "d es una banda de rock nacional", por último, volvemos a reemplazar la constante por su significado, obteniendo así la oración final: "Divididos es una banda de rock nacional".

¡Esto nos indica que la formalización fue correcta!

Predicados - Aplicación - Ejemplo relación

Ahora veamos un ejemplo de cómo aplicar un predicado de aridad 2. Queremos formalizar la oración: "Queen está influenciada por Led Zeppelin"

Definición - Armamos el diccionario:

Dominio de x,y = [Los Redondos, Divididos, Led Zeppelin, Queen]

q = Queen

lz = Led Zeppelin

$EIP(x, y)$ = x está influenciada por y

Aplicación - Usamos el diccionario para armar la fórmula:

$EIP(q, lz)$

De esta manera estamos diciendo que en lógica de predicados, la fórmula $EIP(q, lz)$, significa en lenguaje natural "Queen está influenciada por Led Zeppelin".

Nota: para este caso, debemos definir **2 dominios, uno para** x y **otro para** y, pero como comparten el mismo conjunto de valores, por comodidad se los define bajo la misma expresión.

Predicados - Aplicación - Prueba

Para verificar este 2do ejemplo, realizamos los mismos pasos que en el ejemplo anterior, pero sobre ambas variables. Quedando de la siguiente manera:

Fórmula: $EIP(q, lz)$. Según nuestro diccionario, encontramos el predicado denominado EIP, que se define como "x está influenciada por y", y las constantes q y lz que significan Queen, y Led Zeppelin respectivamente. Como paso intermedio reemplazamos la x por la q, y la y por la lz, quedando que "q está influenciada por lz", por último, volvemos a reemplazar las constantes por sus significados, obteniendo así la oración final: "Queen está influenciada por Led Zeppelin".

¡Esto nos indica que la formalización fue correcta!

Nota: recordar la importancia del orden de las variables en los predicados de aridad 2 (relaciones), tanto al definirlos como al aplicarlos.

Predicados compuestos

Como un predicado aplicado representa un valor de verdad, podemos unir varios predicados usando conectivas lógicas. El valor de verdad de la fórmula completa será el resultado de evaluar los predicados aplicados y luego usar las reglas vistas en lógica proposicional.

Por ejemplo si al diccionario del ejemplo 1, le agregamos las siguientes constantes:
r = Los Redondos
q = Queen
Y definimos la fórmula: $B(d) \vee B(r)$
Estamos diciendo que Divididos **o** Los Redondos son bandas de rock nacional.
En la siguiente fórmula: $B(d) \wedge \neg B(q)$
Estamos diciendo que Dividido es una banda de rock nacional, **pero** que Queen **no** lo es.

Predicados compuestos - Ejemplo 2

De la misma manera podemos ejemplificar con relaciones.

Si tenemos la fórmula: $EIP(q, lz) \wedge EIP(lz, q)$
Estamos diciendo que Queen y Led Zeppelin están influenciadas mutuamente.

Pero si tenemos que: $EIP(q, lz) \wedge \neg EIP(lz, q)$
Estamos diciendo que Queen está influenciada por Led Zeppelin, **pero éste no** por Queen.

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Elementos de la lógica de predicados
     - Dominio
     - Individuos
     - Propiedades
     - Relaciones
   - Variables
   - Representando conjuntos

2. Formalización de la lógica de predicados
   - Formalizando individuos: constantes
   - Formalizando propiedades y relaciones: predicados
   - Cuantificadores
     - Cuantificador Universal
     - Cuantificador Existencial
     - Cuantificador Existencial Negado

Cuantificadores

Veamos ahora la siguiente oración: “Todas las bandas de rock son populares” .

¿Resulta conocida la expresión?

¡Claro que sí! Ya hemos aprendido sobre la representación de conjuntos y también sobre la manera de formalizar oraciones, por lo cual, ahora nos resta aprender cómo formalizar oraciones que representan conjuntos. Para ello, necesitaremos introducir el concepto de cuantificador:

Definición

Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que un predicado es **VERDADERO** al aplicarse a cada uno de los individuos del dominio.

Contamos con 3 tipos de cuantificadores:

- Cuantificador universal: $\forall$
- Cuantificador existencial: $\exists$
- Cuantificador existencial negado: $\nexists$

Cuantificador Universal

El **Cuantificador Universal** se utiliza para representar conjuntos que afirman que **todos** los individuos del dominio cumplen el predicado. Es decir, que si aplicamos el predicado a cada uno de los individuos del dominio, éste debe dar **VERDADERO** en todos los casos.

El símbolo para representar el cuantificador universal es: $\forall$, y se lee "Para todo".

Veamos como ejemplo la oración mencionada anteriormente:
"Todas las bandas de rock son populares"

Diccionario: $P(x) =$ x es una banda de rock popular

Fórmula: $\forall x.P(x)$

Si analizamos cómo funciona el cuantifificador universal, esta expresión es equivalente a decir:
$\forall x.P(x) = P(c_1) \wedge P(c_2) \wedge P(c_3) \wedge ... \wedge P(c_{n-1}) \wedge P(c_n)$, donde cada c_i representa la constante del individuo i, y el cuantificador se aplica a toda la fórmula que viene luego del cuantificador, no a un único predicado.

Cuantificador Universal - Continuación

Para comprender mejor este concepto debemos suponer que extendimos nuestro dominio a n individuos, donde n es un número mayor a 1 cualquiera. Para cuyo caso utilizamos la definición por comprensión, por ejemplo "Bandas de rock". Tendremos así, las siguientes constantes que representan a cada individuo (banda): $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$. Veamos un ejemplo de una fórmula compuesta:

Supongamos que nuestro diccionario cuenta con los predicados R y S

La fórmula "$\forall x.R(x) \land \neg S(x)$" es equivalente a decir que todos los individuos cumplen "$R(x) \land \neg S(x)$" .

Extendiendo la explicación observamos que:

$\forall x.R(x) \land \neg S(x) =$

$(R(c_1) \land \neg S(c_1)) \land (R(c_2) \land \neg S(c_2)) \land \ldots \land \land (Rc_n) \land \neg S(c_n))$

Observar que se aplica la fórmula compuesta a cada individuo por separado.

Variables aplicadas a los predicados

Pero, ¿qué significa $\forall x$?, o mejor dicho, ¿qué representa esa x?

Al igual que en la definición de los predicados, los cuantificadores también utilizan **variables** , pero en esta caso la variable x no representa a un único individuo, sino al dominio completo, es decir a todos los individuos. Los cuantificadores siempre se aplican al dominio completo, independientemente de su resultado.

La manera de interpretar esta fórmula es: "Para todo individuo del dominio de x, esa x cumple con el predicado."

¿Por qué es importante asignarle una <u>variable</u> al cuantificador?

Porque podemos cuantificar más de un individuo. Por ejemplo, tenemos el siguiente dominio. Dominio de x,y: números naturales.

Y la siguiente fórmula: $\forall x.\forall y.R(x) \land \neg S(y)$, la misma se interpreta como: "Para todo número natural "x" e "y", se cumple que "R(x) pero no S(y)".

Otra manera de escribir dicha fórmula es: $\forall x, y.R(x) \land \neg S(y)$

Nota:¡por esta definición es que nunca se podrá cuantificar una constante!

Cuantificador Existencial

El **cuantificador existencial** se utiliza para representar conjuntos que afirman que **algún** individuo del dominio (o más de uno) cumplen el predicado.
Es decir, que si aplicamos el predicado a cada individuo del dominio, habrá al menos uno para el cual el predicado evaluará **VERDADERO** .

El símbolo para representar el cuantificador existencial es: $\exists$, y se lee "Existe".

Si queremos decir que "Algún individuo cumple el predicado R" escribimos: $\exists x.R(x)$

Si analizamos la fórmula, esto es equivalente a decir:
$\exists x.R(x) = R(c_1) \vee R(c_2) \vee R(c_3) \vee ... \vee R(c_{n-1}) \vee R(c_n)$

Cuantificador Existencial Negado

El **cuantificador existencial negado** se utiliza para representar conjuntos que afirman que **ningún** individuo cumple el predicado. Es decir, que si aplicamos el predicado a cada individuo del dominio, todos los predicados evaluarán **FALSO** .

El símbolo para representar el cuantificador existencial negado es: $\nexists$, y se lee "No existe".

Si queremos decir que "Ningún individuo cumple el predicado R", escribimos: $\nexists x.R(x)$.
Si analizamos la fórmula, esto es equivalente a decir:
$\nexists x.R(x) =$
$(\neg R(c_1)) \wedge (\neg R(c_2)) \wedge (\neg R(c_3)) \wedge (\neg \ldots \wedge (\neg R(c_{n-1})) \wedge (\neg R(c_n))$

Cuantificador Existencial Negado - Continuación

En este sentido se puede encontrar la siguiente equivalencia:
$\nexists x.P(x) = \forall x.\neg P(x)$

Si la interpretamos, observamos que está más cerca del cuantificador universal, pues también es lo mismo que decir "Todos no cumplen con ..."

Se llama "cuantificador existencial negado" porque decir "Ninguno ..." es lo mismo que decir "No existe alguno que ..." .

Ejemplos completos

Hasta aquí hemos aprendido todos los conceptos necesarios para armar y formalizar oraciones en lógica de predicados.
A continuación veremos algunos ejemplos simples y complejos, que unifican todo lo aprendido del lenguaje.

EJEMPLO 1:

Diccionario

Dominio de x,y: películas

$m =$ Matrix

$z =$ Zoolander

$C(x) =$ x es una película cómica

$E(x, y) =$ x tuvo más exito que y

Formalización

Con este diccionario podríamos armar las siguientes fórmulas y sus respectivas traducciones al lenguaje natural.

Notar que utilizamos el mismo diccionario para todas las oraciones. En caso de necesitar, se pueden agregar más elementos al mismo.

Ejemplos completos - Formalización

Oración con una propiedad:
Fórmula: C(z)
Lenguaje Natural: "Zoolander es una película cómica"

Oración con una relación:
Fórmula: E(m,z)
Lenguaje Natural: "Matriz tuvo más éxito que Zoolander"

Oración con un cuantificador universal:
Fórmula: $\forall x.C(x)$
Lenguaje Natural: "Todas las películas son cómicas"

Oración con un cuantificador existencial:
Fórmula: $\exists x.C(x)$
Lenguaje Natural: "Algunas películas son cómicas"

Oración con un cuantificador existencial negado:
Fórmula: $\nexists x.C(x)$
Lenguaje Natural: "Ninguna película es cómica"

Ejemplos con 2 dominios

Hasta ahora vimos ejemplos simples que involucran un sólo dominio, pero las oraciones más interesantes suelen relacionar individuos de 2 dominios distintos. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 2:

Diccionario

Dominio de x: películas

Dominio de y: productoras de películas

leh = La era de hielo

s = Soul

d = Disney

p = Pixar

$D(x)$ = x recaudó mucho dinero

$A(y)$ = y es una productora muy antigua

$P(x, y)$ = x fue producida por y

Observar las variables que se usan en cada caso, y el orden en que se describen en función del dominio al que pertenecen. Además, respetar la sintaxis correspondiente, las constantes en minúsculas y los predicados en mayúscula.

Ejemplos con 2 dominios - Formalización

Oración con una propiedad:
Fórmula: D(leh)
Lenguaje Natural: "La era de hielo recaudó mucho dinero"

Oración con una relación:
Fórmula: P(s,p)
Lenguaje Natural: "Soul fue producida por Pixar"

Oración con un cuantificador universal:
Fórmula: $\forall y.A(y)$
Lenguaje Natural: "Todas las productoras de películas son muy antiguas"

Oración con un cuantificador existencial:
Fórmula: $\exists x.D(x)$
Lenguaje Natural: "Algunas películas recaudaron mucho dinero"

Oración con un cuantificador existencial negado:
Fórmula: $\nexists y.A(y)$
Lenguaje Natural: "Ninguna productora de película es muy antigua"

Ejemplos con 2 dominios - Continuación

Oración con un cuantificador existencial negado y una constante:

Fórmula: $\nexists x.P(x, d)$

Lenguaje Natural: "Ninguna película fue producida por Disney"

Oración con más de un cuantificador:

Fórmula: $\forall x.\exists y.P(x, y)$

Lenguaje Natural: "Todas las películas fueron producidas por alguna productora"

Observar que las palabras resaltadas en rojo hacen referencia a los cuantificadores, y las palabras que le suceden, representan el dominio del que estamos hablando en cada caso. Así decimos, "Todas las películas", porque el cuantificador universal está aplicado a la variable x, (que son películas) y "alguna productora", porque el cuantificador existencial está aplicado a la variable y (que son productoras).

Ejemplos con conectivas

Ahora veamos ejemplos más interesantes desde la construcción gramatical, para lo cual será provechoso aplicar las conectivas que ya conocemos para formar oraciones compuestas.

EJEMPLO 3: Utilizamos el mismo diccionario anterior.

Oración con una disyunción

Fórmula: $P(s,p) \vee D(p)$

Lenguaje Natural: "Soul fue producida por Pixar o Pixar recaudó mucho dinero."

Oración con una conjunción

Fórmula: $A(d) \wedge A(p)$

Lenguaje Natural: "Disney y Pixar son productoras muy antiguas."

Y así sucesivamente se pueden realizar tantas combinaciones con conectivas y los elementos del diccionario que deseemos.

Notar que no hace falta traducir literal, podemos narrar de una manera más amigable según nuestro lenguaje. Literal sería: **"Disney es una productora muy antigua y Pixar es una productora muy antigua".** Siendo que no hablamos así.

Ejemplo complejo

Para este ejemplo, retomemos el dominio de las bandas de rock, definido por comprensión, sin restricciones de cantidad de individuos.
Con dicho dominio, queremos por ejemplo formalizar la siguiente oración: "Todas las bandas de rock nacionales, son populares". El diccionario para ello, en un principio, sería:
Diccionario:
Dominio de x: Bandas de rock
$P(x) =$ x es una banda de rock popular

Intuitivamente podríamos decir que utilizar el cuantificador universal es suficiente para traducir esta oración, creando la siguiente fórmula: $\forall x.P(x)$, pero **esto no es correcto,** dado que no estamos respetando la oración original, en este caso estamos diciendo que: "Todas las bandas de rock son populares", en lugar de sólo las bandas de rock **nacionales.**

Ejemplo complejo - Continuación

Pues bien, ¿entonces cómo lo resolvemos?

Nos damos cuenta que claramente necesitamos agregar más elementos al diccionario. Como primera opción puede surgir la idea de agregar una constante para representar ese individuo específico que necesitamos. Veamos cómo sería:

Diccionario:

Dominio de x: Bandas de rock

b = Bandas de rock nacionales <— "constante" nueva

$P(x)$ = x es una banda de rock popular

¡Listo, tema resuelto! **Pues no, tampoco es correcto,** dado que no respeta la definición de individuo: "elemento único del dominio" (debe ser singular). De ser así estaríamos definiendo en una constante, varios individuos (bandas es plural), y claramente no es correcto, por lo tanto también está descartada esta posible solución.

Notar que la fórmula sería: $\forall b.P(b)$, que es otro error. No es válido cuantificar una constante. Les proponemos analizar este caso en profundidad.

Ejemplo complejo - Continuación

¿Entonces?
Me rindo, no es una opción. Si bien tenemos que eliminar esa "constante", sabemos que algún elemento tenemos que agregar.
¿Pero qué elemento?
Bien, la clave aquí está en analizar la oración de una manera más profunda, pensando en la siguiente equivalencia:
"Todas las bandas de rock nacionales, son populares" = "Todas las bandas de rock <u>que</u> son nacionales <u>entonces</u> son populares".

Es lo mismo ¿verdad?, y tiene una forma ya conocida. Para avanzar entonces, debemos agregar un predicado de aridad 1, que nos permita decir que una banda de rock puede ser nacional, tomando este hecho como un adjetivo. Tal como es popular, también puede ser nacional.

Ejemplo complejo - Continuación

Volvamos entonces, a plantear el diccionario correctamente y con esta alternativa.

Diccionario:

Dominio de x: Bandas de rock

$P(x)$ = x es una banda de rock popular

$N(x)$ = x es una banda de rock nacional <– predicado nuevo

Entonces, ¿cómo armamos la fórmula con estos elementos?, es decir, **¿qué conectiva debemos aplicar para construir esta oración?**

¡Exacto! En este caso, la implicación es la conectiva que va a resolver esta situación gramatical, de la siguiente manera:

$N(x) \rightarrow P(x)$. Aquí estamos diciendo que si la banda de rock es nacional (antecedente), implica que es popular (consecuente). Pero esta es sólo una parte, aún no hemos resuelto la oración completa.

Ejemplo complejo - Continuación

Siendo que ya encontramos la conectiva correcta, y que, para completar la oración, necesitamos describir "Todas las bandas...", podemos retomar la 1era propuesta y utilizar un cuantificador universal, uniendo ambas ideas.

Oración final:
Fórmula: $\forall x.N(x) \rightarrow P(x)$
Lenguaje Natural: "Todas las bandas de rock nacionales, son populares"

Nota: es esencial respetar el antecedente y consecuente de la implicación.

Conclusiones

Como conclusión de estos ejemplos podemos destacar que:

- Siempre necesitamos definir un diccionario para armar o formalizar proposiciones
- Para proposiciones compuestas, al igual que en lógica proposicional, utilizamos conectivas
- Un individuo debe ser único, no puede ser un conjunto
- En lugar de definir un conjunto como constante, definimos la propiedad que lo describe. Ejemplo:"Las bandas de rock nacionales" no es un individuo, es una propiedad que se aplica a un individuo. Y si necesitamos extenderlo a más de uno, utilizamos un cuantificador.
- Los predicados cuantificados siempre se aplican al dominio completo y según la cantidad de casos que valúan **VERDADERO** podemos obtener como reultado un subconjunto del mismo o el conjunto total, dependiendo del tipo de cuantificador utilizado. Si se quisiese determinar qué casos valuaron verdadero y cuáles no, se deberá armar una tabla de verdad para su correspondiente análisis.

Lógica
Lógica de Predicados

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 1 - Lógica