Lógica

Lógica de Predicados

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 2 - Clase 4

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Individuos y Propiedades
   - Relaciones simples
   - Todos
2. Formalización de la lógica de predicados
   - Representando individuos
   - Predicados
   - Cuantificadores y Variables
3. La lógica de predicados en la matemática

Limitaciones de la lógica proposicional

Intentemos analizar el siguiente razonamiento:

Todos los perros son animales.
Firulais es un perro.

Firulais es un animal.

Suena lógico, ¿verdad? Pareciera tratarse de un razonamiento válido y que si las premisas desde las cuales partimos son verdaderas, entonces la conclusión también debería serlo.

Limitaciones de la lógica proposicional

Intentemos formalizar el razonamiento. Cada oración es independiente, y no contiene conectivas. Cada una es una única proposición. Por lo tanto, tenemos:

p = Todos los perros son animales
q = Firulais es un perro
r = Firulais es un animal

Donde p y q son nuestras premisas y r sería la conclusión. Quedando:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Vemos que la conclusión es independiente de las premisas, puede ser **VERDADERO** o **FALSO** , por tanto, el razonamiento es inválido.

Limitaciones de la lógica proposicional

¿Cuál es el problema en nuestro razonamiento? ¿Será que el razonamiento es realmente inválido y que nuestra intuición nos miente?

La problemática radica en que las proposiciones hablan de una condición que se da en el universo, pero no dicen nada acerca de la estructura interna de esa condición.

En este caso, parte de las cosas que dice p se usa en q y otra parte en r, el mismo individuo (Firulais) es mencionado tanto en q como en r, sin embargo la lógica proposicional no dice nada acerca de estos hechos.

Lógica de predicados al rescate

Por eso, necesitamos un nuevo tipo de lógica, la **lógica de predicados** , también llamada **lógica de orden uno** o **lógica de primer orden** .

La lógica de primer orden nos va a permitir formalizar oraciones que hablan sobre individuos, sobre las propiedades de esos individuos, y sobre cómo esos individuos se relacionan entre si.

La lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional se puede formalizar en lógica de predicados, **pero no al revés.**

Individuos

La lógica de predicados va a hablar sobre **individuos** .

Un individuo es un elemento único e irrepetible del universo. Por ejemplo, una persona (Juan, Luis, María, etc.) un animal (Firulais, Michifus, etc.), o un elemento más abstracto (un número, un color, etc.)

Lo importante para que algo sea un individuo es que sea identificable de forma inequívoca. Por ejemplo, si hablamos de "Juan", solo hay un "Juan", podemos saber quien es y señalarlo con el dedo. Si hubiera dos personas con el nombre "Juan" deberíamos desambiguar para saber claramente sobre quién estamos hablando.

Universo de discurso

Cómo llamamos a nuestros individuos va a depender del contexto. Es decir, depende de lo que estemos hablando. Por ejemplo, si estamos hablando de un grupo de amigos, "Juan" será un individuo puntual al cual podremos identificar.

Sin embargo, si estamos hablando de todos los alumnos de la universidad, deberemos ser mucho más específicos acerca de qué "Juan" se trata.

Pero "Juan" es solo el nombre, y la persona "Juan" no es solo su nombre, sino es lo que es. Lo que importa no es el nombre sino el individuo en si.

Mismo individuo, muchos nombres

Los números por ejemplo, son elementos que son únicos e irrepetibles. Cinco es cinco , siempre.

Sin embargo, podemos decir **"cinco"** , pero si habláramos en otro idioma diríamos por ejemplo **"cinq"** , **"cinque"** , **"five"** , **"fem"** , etc.

Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro idioma, tenemos símbolos que representan al mismo individuo como "5", o "V" (en números romanos).

Más aun, si escribimos "3+2" o "4+1", ¿Qué representan?. Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco.

Lo que importa no es cómo lo escribimos, sino lo que estamos queriendo representar, el individuo en si. Suena filosófico, pero es así...al fin de cuentas, la lógica nace en la filosofía.

Propiedades

Nos va a interesar hablar de ciertas cosas de esos individuos. Por ejemplo, vamos a querer decir cosas como "Juan es grande", "Firulais es un perro", o "Cinco es un número primo".

Vamos a decir entonces que los individuos tienen **propiedades**.

Una propiedad es una cualidad o atributo que puede aplicarse a un individuo.

Propiedades - Cont

La idea es que vamos a pensar en una propiedad como algo que, dado un individuo, si aplicamos la propiedad al individuo, podemos tratar todo como una proposición. Es decir, es algo de lo que vamos a decir que es **VERDADERO** o **FALSO** .

Por ejemplo, si la propiedad es "Ser grande" , vamos a **aplicar** a "Juan" esa propiedad para obtener "Juan es grande" . Esto como vemos es una proposición tradicional, es algo de lo que podemos decir que es **VERDADERO** o **FALSO** .

Si en cambio aplicamos a "Luis" la misma propiedad, obtenemos la proposición "Luis es grande" la cual tiene también un valor de verdad, no necesariamente igual a aplicar la propiedad a Juan.

Propiedades Ejemplo

Con la lógica de predicados vamos a intentar describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa del universo.

Supongamos entonces que queremos hablar de un curso de Inglés que tiene dos estudiantes (Majo y Santi) y dos docentes (Valen y Nico).

Majo, Santi, Valen y Nico van a ser los individuos sobre los que vamos a hablar. Una posible propiedad sobre ellos será "Es estudiante" .

Propiedades Ejemplo - Cont

Podemos representar las propiedades como una tabla de doble entrada, con los individuos como filas y las propiedades como columnas.

	Es estudiante
Majo	
Santi	
Valen	
Nico	

La tabla podremos completarla con **VERDADERO** o **FALSO** , dependiendo del valor que toma la propiedad de la columna aplicada al individuo en esa fila.

Propiedades Ejemplo - Cont

	Es estudiante
Majo	V
Santi	V
Valen	F
Nico	F

Vemos entonces como la propiedad "Es estudiante" se aplica a "Majo", quedando "Majo es estudiante" y teniendo esa proposición el valor de verdad **VERDADERO** . Lo mismo sucede en el caso de Santi. Por otro lado, cuando aplicamos la propiedad a "Valen" y a "Nico", ambas proposiciones formadas tienen valor **FALSO** .

Propiedades que dependen de otras propiedades

Agreguemos ahora una segunda propiedad a nuestro ejemplo, la propiedad "Es docente" .

Si aplicamos la propiedad "Es docente" a "Majo", quedando "Majo es docente" , sabemos intuitivamente que esa proposición tendrá valor de verdad **FALSO** . Lo mismo ocurre con Santi.

También sabemos que para los casos de "Valen" y de "Nico", la propiedad aplicada a tiene valor **VERDADERO** .

Veamos ambas propiedades en la tabla.

	Es estudiante	Es docente
Majo	V	F
Santi	V	F
Valen	F	V
Nico	F	V

Propiedades que dependen de otras propiedades

Si bien podemos tratar a ambas propiedades como independientes, hay una clara relación entre "Es estudiante" y "Es docente".

En particular, si algún individuo de nuestro curso de Inglés, es estudiante, entonces seguro no es docente. Y si es docente, entonces seguro no es estudiante. Es decir, ambas son complementarias.

Ya conocemos una conectiva que representa el concepto de complemento, la negación. Podemos reformular la propiedad "Es docente" en términos de "Es estudiante".

Es docente $= \neg$ Es estudiante

Así, vemos como podemos tener propiedades que son dependientes de otras propiedades.

Propiedades que dependen de otras propiedades

Asumamos ahora que conocemos dos nuevas propiedades que aplican en nuestro ejemplo, "Es puntual" y "Asiste siempre" .

Podemos crear nuevas propiedades a partir de las que conocemos. Podemos decir por ejemplo, que si un individuo de nuestro curso es puntual y asiste siempre, entonces es comprometido.

$$\text{Es comprometido} = \text{Es puntual} \wedge \text{Asiste siempre}$$

Propiedades que dependen de otras propiedades

¿Qué significa entonces aplicar la propiedad "Es comprometido" a "Majo" ?

Significa que Majo debe cumplir con ser puntual y con asistir siempre. Es decir que debemos aplicar a Majo cada una de las propiedades que componen a ser comprometido, y que en todos los casos el resultado debe ser **VERDADERO** .

Majo es comprometida $=$ Majo es puntual $\wedge$ Majo asiste siempre

¿Propiedades que incluyen individuos?

Pensemos ahora en una frase un poco más compleja, y tratemos de formalizarla: "Majo admira a Valen" .

Sencillo, podríamos tener una propiedad que sea "Admira a Valen" , y nos basta con aplicar la propiedad a Majo para obtener la oración anterior.

Pero ¿Qué pasa si ahora queremos escribir "Valen admira Nico" ?

Necesitamos otra propiedad "Admira a Nico" y aplicar la misma a Valen.

Sin embargo, vemos que hay una relación entre ambas frases, ambas hablan de lo mismo, de admirar a alguien más (otro individuo).

Relaciones

Cuando vemos que en nuestra propiedad estamos mencionando a un individuo (Por ejemplo a Valen en “Admira a Valen”), lo que queremos en realidad es expresar una relación entre dos individuos (en este caso, Majo a quien será aplicada la propiedad y Valen, que forma parte de la propiedad). Lo que buscamos es una **relación** .

Una relación es similar a una propiedad, en el sentido que se aplica sobre individuos, pero en lugar de aplicar sobre un solo individuo, aplica sobre dos.

Así, nuestra relación será “Admira a” , y si la aplicamos a “Majo” y a “Valen” obtenemos la frase “Majo admira a Valen” .

Una relación vincula dos individuos a través de una característica.

Dirección de las relaciones

El hecho de que Majo admire a Valen no significa que Valen admire a Majo. Por lo que las relaciones son dirigidas.

Es decir, aplicar "Admira a" a "Majo" y luego a "Valen" representa "Majo admira a Valen" . Pero aplicar "Admira a" primero a "Valen" y en segundo lugar a "Majo" nos dará "Valen admira a Majo" .

El valor de verdad de ambas proposiciones formadas no es necesariamente idéntico. De hecho, en este caso es independiente.

El orden en el que aplicamos la relación a los distintos individuos da como resultado diferentes proposiciones con diferente valor de verdad.

Relaciones complejas

De forma similar a lo que ocurre con las propiedades, las relaciones pueden estar dadas en términos de otras relaciones.

Por ejemplo, podríamos decir que admirar requiere de dos cosas, respeto e interés. Así:

Admira a = Respeta a $\wedge$ Se interesa por

Por ejemplo, apliquemos "Admira a" a "Majo" y a "Valen".

Como sabemos, la equivalencia es:

Majo respeta a Valen $\wedge$ Majo se interesa por Valen

Relaciones con orden en la aplicación

Pensemos ahora en la relación "es admirado por" . Podríamos definir "es admirado por" en términos de "admira a". Por ejemplo: Valen es admirado por Majo = Majo admira a Valen .

Pero si definimos:

Es admirado por = Admira a

No resulta evidente que el orden de los individuos cambia en la equivalencia.

Parámetros

Para solucionar el problema anterior, tenemos que introducir un nuevo elemento. Los **parámetros** .

Un **parámetro** no es más que un nombre que va a representar a un individuo, pero que al momento de la definición, no sabemos quien es.

Vamos a usar los parámetros en nuestras propiedades y relaciones. Así por ejemplo en lugar de decir que la propiedad es "Es estudiante" vamos a decir "x es estudiante" .

¿Quién es x? La respuesta es x va a ser reemplazado en el texto por un individuo cuando apliquemos la propiedad al mismo. Por ejemplo, si aplicamos ahora "x es estudiante" a "Majo" , lo que hacemos es reemplazar la x por "Majo" y quedarnos con la oración formada "Majo es estudiante" .

Parámetros - Cont

Esto aplica también a las relaciones, ahora que tenemos más de un individuo, necesitamos más de un parámetro.

Volvamos a nuestra relación "Es admirado por" . Si lo replanteamos usando parámetros podemos escribir "x es admirado por y" . Si aplicamos entonces ahora a "Valen" y "Majo", obtenemos "Valen es admirado por Majo" .

Ahora, si miramos la definición de es admirado por, podemos dejar más claro que el orden de los individuos se invierte.

x es admirado por y = y admira a x

Luego veremos que llamarlos x e y es arbitrario, pero de momento vamos a decir que x representa al individuo que aplicamos la relación primero e y al que se la aplicamos segundo.

Parámetros - Cont

No solo es el caso en donde se invierte el orden de los parámetros en donde sirve, sino donde el individuo se repite en la frase equivalente.

Pensemos en la relación "es amigo de" . Una persona es amiga de otra si se admiran mutuamente. Tratemos de plantearlo en términos de nuestra otra relación:

Es amigo de $=$ Admira a $\wedge$ Admira a

El segundo "Admira a" debería indicar de alguna forma que ya no es el primer individuo del segundo, sino el segundo del primero. Sin embargo, lo que escribimos no dice nada de eso.

Parámetros - Cont

Replanteemos la relación utilizando parámetros. Es decir, pensemos ahora que significa "x es amigo de y" .

x es amigo de y = x admira a y $\wedge$ y admira a x

Queda de esta forma claramente expresado cuales son las relaciones que se deben cumplir.

Representando relaciones

Podemos representar una relación de forma similar a las propiedades, es decir, mediante una tabla de doble entrada.

A diferencia de la tabla sencilla de las propiedades, en la cual podíamos representar más de una propiedad en la misma tabla, aquí toda la tabla representa una sola relación. Las filas representarán el individuo al que aplicamos primero la relación (x) y las columnas al que aplicamos segundo (y).

Representando relaciones

Veamos la tabla de nuestro ejemplo:

x admira a y	Majo	Santi	Valen	Nico
Majo	F	F	V	F
Santi	F	V	F	F
Valen	V	V	F	F
Nico	F	V	F	F

En la tabla se ve como Majo admira a Valen y Valen admira a Majo, por lo que son amigos. Nico admira a Santi, pero santi solo se admira a si mismo.

Relaciones múltiples

Podemos tener relaciones que tienen más de dos individuos como elementos.

Por ejemplo la relación "x conoce a y gracias a z" . Podríamos decir entonces "Majo conoce a Valen gracias a Santi" .

Para obtener esa proposición basta aplicar la relación primero a Majo, luego a Valen y por último a Santi.

Este tipo de relaciones ya no se pueden interpretar utilizando una tabla, por lo que hay que aplicar nuestra mejor capacidad mental y de abstracción para comprender plenamente estas relaciones.

Todos

Volvamos a nuestro ejemplo del curso de Inglés. ¿Qué significaría la frase "Todos son inteligentes" ?

Pensémoslo en términos de nuestra tabla de propiedades:

	x es inteligente
Majo	
Santi	
Valen	
Nico	

¿Cómo deberíamos completar los espacios en blanco?

Todos - Cont

Podemos pensar la frase "Todos son inteligentes" como una propiedad que depende de otras propiedades. En particular:

Todos son inteligentes = Majo es inteligente $\wedge$ Valen es inteligente $\wedge$ Santi es inteligente $\wedge$ Nico es inteligente

Es decir, la idea de que todos son inteligentes nos dice que cada uno de los individuos es inteligente.

Precisamente, **La palabra "Todos" nos indica que la propiedad aplica a cada uno de los individuos de nuestro universo**

Todos - Cont

Si vamos al caso del ejemplo anterior, nuestra tabla para interpretar el universo quedaría así:

	x es inteligente
Majo	VERDADERO
Valen	VERDADERO
Santi	VERDADERO
Nico	VERDADERO

Nadie

¿Y qué pasa si decimos "Nadie llega temprano" ?

Nadie es lo mismo que decir que, ni Majo, ni Valen, ni Santi, ni Nico llegan temprano. Podemos pensarlo como una dependencia de otras propiedades.

Nadie llega temprano = (¬ Majo llega temprano) ∧ (¬ Valen llega temprano) ∧ (¬ Santi llega temprano) ∧ (¬ Nico llega temprano)

Como ya sabemos, La negación implica que la propiedad sea falsa. Es decir que, en nuestra tabla, esto estaría representado de la siguiente forma:

	x es inteligente	x llega temprano
Majo	VERDADERO	FALSO
Valen	VERDADERO	FALSO
Santi	VERDADERO	FALSO
Nico	VERDADERO	FALSO

Alguien

Hay otro tipo de oraciones que nos brindan información lógica acerca del universo. Pensemos en el siguiente ejemplo "Alguien llega temprano" .

Podemos pensar en términos de nuestra tabla.

	x llega temprano
Majo	
Valen	
Santi	
Nico	

¿Cómo completamos la tabla?

Alguien

La realidad es que la frase no nos dice mucho. Solo nos dice que hay alguien que llega temprano, pero bien podría ser que haya más de una persona que lo haga.

Es decir solo sabemos que alguno de los casos es **VERDADERO** , pero el resto podrían ser **FALSO** o **VERDADERO** .

Es decir, hablar de alguno, es hablar de disyunciones entre los individuos.

Alguien llega temprano $=$ Majo llega temprano $\vee$ Valen llega temprano $\vee$ Santi llega temprano $\vee$ Nico llega temprano

Para que la disyunción sea verdadera, alguno de los términos de la disyunción debe ser verdadero, pero no sabemos cuál. Si combinamos esa información con otra, tal vez podamos deducir quien sea.

Todos los...

Otro tipo de oración que solemos utilizar cuando hablamos, involucra hablar de un subgrupo de elementos.

Por ejemplo la oración "Todos los docentes faltaron"

¿Qué significa esto en nuestro ejemplo? Valen y Nico, ambos son docentes, y por tanto ambos faltaron.

¿Qué pasa con los estudiantes? La respuesta es, no sabemos. La frase no dice nada acerca de si Majo o Santi faltaron o no.

Todos los...

En este caso hay efectivamente una relación entre la propiedad de ser docente y la propiedad de faltar. Podemos ponerlo de esta forma:

Todos los docentes faltaron = x es docente $\rightarrow$ x faltó

¿Quién es x en este caso? El individuo puntual al que aplicamos nuestra propiedad, pero, en este caso, debemos aplicarlo a cada uno de los individuos de nuestro universo, pues tenemos la palabra "Todos" adelante.

Apliquemos a "Valen" nuestra propiedad. Como "Valen es docente" es **VERDADERO** , para que la implicación sea verdadera entonces "Valen faltó" debe necesariamente ser **VERDADERO** .

Apliquemos ahora a "Majo" . Como "Majo es docente" es **FALSO** , la implicación ya es verdadera, independientemente del valor de "Majo faltó" .

Todos los... - Cont

Es decir, sabiendo que "Todos los docentes faltaron" es **VERDADERO** , podemos completar la tabla de la siguiente forma.

	x es docente	x faltó
Majo	**FALSO**	?
Santi	**FALSO**	?
Valen	**VERDADERO**	**VERDADERO**
Nico	**VERDADERO**	**VERDADERO**

En los lugares en donde hay un signo de pregunta, no podemos completar nada, pues la frase no contiene información sobre esos casos.

Algún...

De forma similar a "todos los ..." podemos decir frases con la forma "Algún estudiante faltó" .

Es decir, que puede haber dos casos, o bien Majo faltó o bien Santi faltó. Podríamos decir que:

Algún estudiante faltó $=$ (Majo faltó) $\vee$ (Santi faltó)

Pero ¿Por qué agregamos solo a Majo y a Santi a nuestra fórmula equivalente? Sencillamente porque son los únicos estudiantes. Pero cuando decíamos "alguno", vimos que debíamos hacer una disyunción con todos los elementos del universo. Debemos entonces buscar una formula equivalente, en donde los casos de aquellos que son docentes, seguro den **FALSO** .

Algún...

Así, la idea es que necesitamos realizar una conjunción de disyunciones.

Algún estudiante faltó $=$
(Majo es estudiante $\wedge$ Majo faltó) $\vee$
(Valen es estudiante $\wedge$ Valen faltó) $\vee$
(Santi es estudiante $\wedge$ Santi faltó) $\vee$
(Nico es estudiante $\wedge$ Nico faltó)

Si analizamos esa fórmula, en el caso de Valen y Nico, la conjunción dará **FALSO** pues no es cierto que sean estudiantes. Mientras que en el caso de Majo dará **VERDADERO** solo si Majo faltó. Lo mismo ocurre para Santi.

Formalización

Hasta ahora hemos solamente trabajado con la lógica de predicados de forma natural, intentando interpretar de forma intuitiva las oraciones que nos encontramos.

Comencemos entonces a formalizar los conceptos que hemos visto hasta ahora.

Constantes

Las **constantes** representan a los individuos de nuestro universo.

En la bibliografía se denotan en general con letras minúsculas, donde la letra suele estar relacionada con el individuo al que representa (Ej. m = Majo , v = Valen)

Vamos a tener una constante para cada individuo del universo que podamos (o mejor dicho, que necesitemos) nombrar.

Funciones

Las **funciones** son una forma de denotar a un individuo sin hacer una referencia directa al mismo.

Una función debe ser aplicada a uno o más constantes (individuos) y expresará un y solo un individuo. Actúan como una función en matemática.

El ejemplo más fácil de entender sería la función sucesor. Esta función, dado un número, devuelve ese número sumado en uno. Así por ejemplo:

sucesor(0) = 1
sucesor(1) = 2
...
sucesor(n) = n+1

Una función puede estar expresada en lenguaje formal, como en el caso de "sucesor" que usa lenguaje matemático, o puede usar lenguaje coloquial.

Funciones - Cont

Pero las funciones no son solo para números. Por ejemplo, la función vecino(x) , que dado una persona, devuelve el vecino de esa persona.

Como definimos quien es vecino de quien es ambiguo, y no va a estar dado por un lenguaje formal. En todo caso, tenemos que tratar de definir que significa en un lenguaje no ambiguo. Por ejemplo, para cada persona del universo, decir exactamente quien es el vecino, armando una lista.

Las funciones se suelen representar en la bibliografía con una letra minúscula, de forma similar a una constante.

Aridad

Las funciones toman parámetros. Es decir, esperan ser aplicadas a una cantidad específica de individuos. Esto se conoce como **aridad**

La **aridad** es la cantidad de individuos que espera la función. Si una función espera un solo individuo, se dice que tiene aridad 1, si espera dos individuos, se dice que tiene aridad 2, etc.

Por ejemplo, la función **sucesor(x)** tiene aridad 1. La función **suma(x, y)** tiene aridad 2.

Al formalizarlo se vuelve sencillo expresar que nombre le ponemos al parámetro, es decir al individuo al que le aplicamos primero la función. En este caso, el primer individuo se llama x, y el segundo y. Pero si formalizamos la función como **suma(a, b)**, es la misma función, pero llamamos a y b a nuestros parámetros. Es simplemente el nombre que le ponemos al individuo para hablar de él cuando definimos que significa "suma".

Aplicación

Cuando aplicamos una función, en lugar de colocar el nombre del parámetro colocamos el nombre del individuo al cual le aplicamos la misma (Es decir, nuestra constante).

Así por ejemplo, si lo que queremos es obtener el vecino de Majo, diremos "v(m)" , donde "m" es la constante que representa a Majo, y "v(x)" es la función que denota a un vecino de x.

Es decir, que hay que separar en dos partes. Por un lado, la definición de nuestros elementos (El **diccionario**). Por otro lado, la fórmula en si, es decir, lo que queremos expresar, utilizando esas definiciones.

Aplicación - Cont

Ejemplo:

$m =$ Majo
$v(x) =$ el vecino de x

$v(m)$

Las primeras dos líneas definen el diccionario, mientras que la última define lo que queremos expresar, en este caso “el vecino de Majo”.

Note como la x se reemplaza por la m para pasar a ser “el vecino de m”, primero, y como luego analizamos m para interpretarlo como “el vecino de Majo”.

Resumen

Podemos representar los individuos de nuestro universo de dos formas:

- Mediante constantes
- Mediante funciones que se aplican a una o más constantes

Denotamos a los individuos con letras minúsculas, ya sea una constante o una función.

Para ser más expresivos podemos usar nombres en minúscula, por ejemplo, “majo” puede ser una constante, y “vecino” una función.

Predicados

Hasta ahora vimos como representar individuos, pero no las propiedades y las relaciones sobre ellos.

Las propiedades y relaciones se representan mediante **predicados** .

Un predicado es una función que se aplica a uno o más individuos y que al hacerlo expresa un valor de verdad, ya sea VERDADERO o FALSO .

Los predicados también tienen aridad. Un predicado de aridad uno se corresponde con una propiedad del individuo. Un predicado de aridad dos se corresponde a una relación entre individuos. Un predicado de mayor aridad se corresponde a relaciones entre múltiples individuos.

Predicados - Cont

Los predicados se suelen representar en la bibliografía con letras mayúsculas (P, Q, R), en general relacionadas con lo que representan.

Así por ejemplo la propiedad "x es estudiante" se puede representar como "$E(x)$" .

Para ganar expresividad podemos utilizar una palabra que comience con mayúscula, por ejemplo "Estudiante(x)" .

Aplicación

Los predicados se aplican de la misma forma que las funciones. Es decir, reemplazamos el parámetro por la constante que representa al individuo al cual queremos aplicar el predicado.

Así podemos tener el siguiente ejemplo.
$m =$ Majo
$v =$ Valen
$A(x, y) = x$ admira a y

$A(m, v)$

Esta expresión nos dice "Majo admira a Valen".

Aplicación - Cont

Note que "$A(m, v)$" no es lo mismo que "$A(v, m)$". Mientras el primero indica que "Majo admira a Valen", el segundo nos dice que "Valen admira a Majo".

El orden en el que ponemos nuestras constantes es relevante, y nos indica quien debería ser tomado por x y quien por y.

Uniendo predicados

Como un predicado aplicado representa un valor de verdad, podemos unir varios predicados usando conectivas lógicas. El valor de verdad final de toda la fórmula será el resultado de evaluar los predicados aplicados y luego usar las reglas vistas en la lógica proposicional para obtener el valor de aplicar las conectivas.

Por ejemplo en el siguiente ejemplo:
$A(m, v) \wedge A(v, m)$
Estamos diciendo que Majo y Valen se admiran mutuamente.

En el siguiente:
$A(m, v) \wedge \neg A(v, m)$
Estamos diciendo que Majo admira a Valen, pero que Valen no admira a Majo.

1. Lógica de Predicados
   - Limitaciones de la lógica proposicional
   - Individuos y Propiedades
   - Relaciones simples
   - Todos

2. Formalización de la lógica de predicados
   - Representando individuos
   - Predicados
   - Cuantificadores y Variables

3. La lógica de predicados en la matemática

Cuantificadores

Lo último que nos falta ver es como representar oraciones que contienen las palabras "Todos", "Alguno" y "Ninguno".

Para representar esto surge la idea de **cuantificador** .

Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que un predicado es VERDADERO si se aplica el mismo a cada uno de los individuos del universo .

Vamos a ver tres cuantificadores, el **cuantificador universal** , el **cuantificador existencial** y el **cuantificador existencial negado** .

Cuantificadores

Para entender mejor el concepto supongamos que en nuestro universo tenemos n individuos (donde n es un número cualquiera).

Tendremos entonces las siguientes constantes representando a dichos individuos.

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$

Supongamos también que contamos con un predicado $P(x)$.

Cuantificador Universal

El **Cuantificador Universal** se utiliza para afirmar que **todos** los individuos cumplen el predicado.

Es decir, que si aplicamos el predicado a cada uno de los individuos del universo, este debe dar **VERDADERO** en todos los casos.

El cuantificador universal se representa con el símbolo $\forall$.

Si queremos decir que "Todos los individuos cumplen el predicado P" escribimos:
$\forall x.P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:
$\forall x.P(x) = P(c_1) \wedge P(c_2) \wedge P(c_3) \wedge ... \wedge P(c_{n-1}) \wedge P(c_n)$

Cuantificador Universal

Los cuantificadores no solo aplican a un predicado, sino a toda la fórmula que viene luego del cuantificador.

Así por ejemplo "$\forall x.P(x) \wedge \neg Q(x)$" es equivalente a decir que todos los individuos cumplen "$P(x) \wedge \neg Q(x)$".

Así, se cumple lo siguiente:
$\forall x.P(x) \wedge \neg Q(x) = (P(c_1) \wedge \neg Q(c_1)) \wedge (P(c_2) \wedge \neg Q(c_2)) \wedge ... \wedge \wedge (P(c_n) \wedge \neg Q(c_n))$

Variables

Pero, ¿Qué significa $\forall x$?, o mejor dicho, ¿De donde sale esa x?

La x es una **variable** . Una **variable** representa, de forma similar a un parámetro, a un individuo. Pero ¿A qué individuo? La respuesta es, a todos.

La idea es, el cuantificador dice, "Para todo individuo del universo, llamémoslo x, ese x cumple el siguiente predicado" .

¿Por qué es importante ponerle un nombre al individuo? Porque podemos cuantificar más de un individuo. Por ejemplo, "Para todo par de numero, llamemos al primero x y al segundo y, se cumple ..." .

Eso podemos formalizarlo como: $\forall x.\forall y....$. Otra forma de representar lo mismo es $\forall x, y....$.

Cuantificador Existencial

El **cuantificador existencial** es para indicar que existe **algún** elemento (o más de uno) que cumplen el predicado.

Es decir, nos indica que si aplicamos el predicado a cada individuo del universo, habrá al menos uno para el cual el predicado evaluará a **VERDADERO** .

El cuantificador existencial se representa con el símbolo "$\exists$" .

Si queremos decir que "Algún individuo cumple el predicado P" escribimos:
$\exists x.P(x)$

En nuestro ejemplo, esto es equivalente a decir:
$\exists x.P(x) = P(c_1) \vee P(c_2) \vee P(c_3) \vee ... \vee P(c_{n-1}) \vee P(c_n)$

Cuantificador Existencial Negado

El **cuantificador existencial negado** es para indicar que **no** existe **ningún** individuo que cumple el predicado.

Es decir, nos indica que si aplicamos el predicado a cada individuo del universo, todos los individuos evaluarán a **FALSO** .

El cuantificador existencial negado se representa con el símbolo "$\nexists$" .

Si queremos decir que "Ningún individuo cumple el predicado P" escribimos:
$\nexists x.P(x)$

Cuantificador Existencial Negado - Cont

En este sentido se pueden encontrar las siguientes equivalencias:
$\nexists x.P(x) = \forall x.\neg P(x)$

O lo que es lo mismo:
$\nexists x.P(x) = (\neg P(c_1)) \wedge (\neg P(c_2)) \wedge \ldots \wedge (\neg P(c_n))$

Se llama "cuantificador existencial negado" porque decir Ninguno ... es lo mismo que decir No existe alguno que ... .

Sin embargo, vemos que, a nivel de fórmula, está más cerca del cuantificador universal, pues también es lo mismo que decir Todos no cumplen ...

Lógica en la matemática

La lógica de predicados es muy utilizada en matemática para exponer propiedades sobre distintos elementos (por ejemplo, números, funciones, etc.)

La operaciones aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación y la división, son funciones de la lógica de predicados (En particular, de aridad dos. Dados dos números, la suma devuelve otro número, por lo que es una forma de representar individuos).

Las comparaciones, como la igualdad, mayor que, menor o igual que, etc. son predicados (También en este caso de aridad dos, dados dos números, la igualdad me dice **VERDADERO** si efectivamente son iguales, y **FALSO** en caso contrario).

Notación lógico-matemática

Como diferenciación interesante con respecto a la lógica tradicional, en matemática no es necesario definir el diccionario (al menos no para las operaciones básicas), pues el significado de los símbolos utilizados ya es conocido. Por eso, la notación matemática se mezcla con la notación de la lógica de predicados.

Por ejemplo, en lugar de escribir " $suma(x, y)$ " escribimos directamente " $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ ". También en lugar de escribir " $\mathrm{Igual(x, y)}$ " escribimos " $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ ".

Sin embargo, solo cambia la notación. Semánticamente, el significado es el mismo.

Ejemplo conmutatividad de la suma

Las cosas se entienden mejor con un ejemplo, veamos entonces como expresar lógicamente algunas expresiones comunes.

La suma es conmutativa para todo par de números .

$\forall x \in \Re, y \in \Re . x + y = y + x$

En notación lógica tradicional escribiríamos:
$\forall x . \forall y . EsReal(x) \wedge EsReal(y) \rightarrow Iguales(suma(x, y), suma(y, x))$

Mas ejemplos

Asociatividad:

$\forall x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re.(x + y) + z = x + (y + z)$

Distributividad:

$\forall x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re.x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Neutros:

$\forall x \in \Re.x + 0 = x$

$\forall x \in \Re.x \cdot 1 = x$

Lógica

Lógica de Predicados

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 2 - Clase 4