



Lógica

Lógica Proposicional

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 3 - Clase 3

- 
- 1 Introducción a la lógica proposicional
 - Propositiones
 - Uso de conectivas en proposiciones
 - 2 Razonamientos
 - Razonamientos en el lenguaje natural
 - Implicación
 - Prueba de validez de un razonamiento
 - Implicación como condicional
 - 3 Equivalencias lógicas
 - Bicondicional
 - 4 Formalización
 - Variables proposicionales
 - Fórmulas válidas
 - Resumen

Donde la metáfora se queda corta

Hasta ahora vimos como la lógica nos ayuda a responder preguntas.

De hecho, vimos como, si tuviéramos verdulero místico al cual poder preguntarle cosas, podríamos hacer varias preguntas a partir de preguntas más simples.

Pero en la vida real, no vamos a tener ningún verdulero que nos responda nuestras preguntas, ni solo vamos a querer preguntar sobre verduras.

En general, tampoco vamos a preguntar cosas al aire, sino que vamos a hacer afirmaciones sobre el mundo, las cuales, a priori, pueden ser verdaderas o falsas, y que deberán ser sometidas a contrastación empírica.

Ejemplos de afirmaciones

Podríamos pensar en el siguiente ejemplo:

La Tierra es plana

Consideremos entonces dicha afirmación. ¿Será **VERDADERO** o **FALSO** ?

Hoy, cualquier persona en su sano juicio (o sea, no los que creen cualquier cosa que ven en Youtube) diría que esa afirmación es válida. O sea, que si fuera una pregunta, “¿La Tierra es plana?” , entonces, algún ser místico (¿Dios?) nos respondería **FALSO** .

Pero si hubiéramos hecho la pregunta hace 1500 o 2000 años, probablemente nuestra intuición y conocimiento nos habrían dicho que la respuesta obvia era **FALSO** .

Ejemplos de afirmaciones

Podríamos pensar también en

La Tierra gira alrededor del sol

La enfermedades son causadas por animales microscópicos

Todas estas afirmaciones fueron consideradas falsas, pero luego pasaron a considerarse verdaderas cuando el estado de la ciencia y la técnica fue avanzando.

Podríamos considerar que son, de alguna forma, preguntas encubiertas.

Sobre las afirmaciones

A la lógica, en tanto se usa para analizar la realidad, no le interesan las preguntas dirigidas a un ser místico, sino el análisis de las afirmaciones que hacemos, y como una serie de afirmaciones se relacionan con otras.

Así, nuestra analogía de la lógica como algo que nos responde preguntas llega hasta este punto.

Eso no significa que los conceptos que vimos hasta ahora no nos sirvan, pero vamos a ver como estos encajan en el formalismo lógico más sencillo.

1 Introducción a la lógica proposicional

- Proposiciones
- Uso de conectivas en proposiciones

2 Razonamientos

- Razonamientos en el lenguaje natural
- Implicación
- Prueba de validez de un razonamiento
- Implicación como condicional

3 Equivalencias lógicas

- Bicondicional

4 Formalización

- Variables proposicionales
- Fórmulas válidas
- Resumen

Lógica proposicional

Lógica proposicional

La **lógica proposicional** o **lógica de orden cero** es la rama de la lógica matemática que estudia proposiciones, los métodos de vincularlas mediante conectores lógicos y las relaciones y propiedades que se derivan de esos procedimientos.

Proposiciones

Proposición

Entidad atómica de la lógica proposicional, portadora de valor de verdad

Una proposición es una oración que afirma o cuenta algo, sobre lo que podemos decir que es cierto o no lo es.

Es, podríamos decir, la posibilidad de que eso se cumpla.

Las proposiciones, usan la **función informativa** del lenguaje (también llamada a veces **descriptiva** o **aseverativa**).

Funciones del lenguaje

Puede ser útil pues repasar las funciones del lenguaje para tener más claro que cosas son proposiciones y que cosas no lo son:

Imperativo	¡Ven a verme!	Le damos una orden o instrucción a otra persona.
Exclamativo	¡Viva la libertad!	Expresamos una emoción o un deseo.
Interrogativo	¿Está lloviendo?	Solicitamos información sobre un evento o situación.
Informativo	El trabajo es muy complicado.	Transmitimos información que puede ser falsa o verdadera. En este caso el trabajo puede ser cierto que sea complicado, o puede ser falso y el trabajo en realidad ser sencillo.

Solo la función informativa corresponde a una proposición.

Ejemplos de proposiciones

A continuación hay algunos ejemplos de proposiciones.

Determinemos, según nuestro criterio, cuales son **VERDADERO** y cuales son **FALSO**.

- La Tierra es plana
- Está lloviendo en este lugar
- La UNQ está en Bernal
- Argentina ganó el mundial de 1978
- Los perros tienen cuatro patas (salvo amputaciones)

Ejemplos de proposiciones - Cont

Algunos ejemplos en donde en donde para poder responder las proposiciones necesitamos información que, a priori no conocemos.

- Todas las células eucariotas tienen pared celular
- El transistor más pequeño del mundo mide 14nm
- Argentina ganará el mundial FIFA Rusia 2018
- Toyota es uno de los mayores fabricantes de autos del mundo

Oraciones compuestas

Hay casos en donde las oraciones son un poco más complejas. Pensemos el siguiente ejemplo:

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia

Si miramos la oración, veremos que, en realidad, hay dos partes bien demarcadas. Es decir, si esto fuera una pregunta, sería una pregunta compuesta de dos partes: “¿El avión se estrelló en la cordillera?” y “¿El avión realizó un aterrizaje de emergencia?” .

Oraciones compuestas - Cont

El truco está en que la oración contiene una conectiva, “o”, que nos indica que la misma puede separarse en dos partes.

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia

Esto nos indica que **la oración está formada por dos proposiciones**.

El valor de verdad de la oración, dependerá entonces del valor de verdad de las proposiciones y de la conectiva que las une (de la misma forma que sucedía cuando uníamos preguntas)

Las proposiciones (tantas como se quiera) pueden unirse en formas tan complejas como sea necesario, usando las conectivas de conjunción, disyunción y negación

Proposiciones compuestas

Llamamos a las proposiciones que no tienen conectivas **proposiciones atómicas** y a las que tienen conectivas y están formadas por otras proposiciones **proposiciones compuestas**.

Una proposiciones compuesta puede estar formada a su vez por otras proposiciones compuestas, o por proposiciones simples.

Eventualmente, siempre debe haber una proposición simple.

Conectivas en el lenguaje natural

Veamos ahora el siguiente caso

Tal vez el avión se estrelló en la cordillera , tal vez realizó un aterrizaje de emergencia.

Si analizamos la oración, veremos que no cambia el significado con respecto a la anterior, aunque tiene una diferencia en su redacción.

En el lenguaje natural las conectivas pueden tomar diversas formas.

Algunas resultan bastante obvias, otras a las que estamos menos habituados, resultan al principio complicadas de interpretar correctamente.

A continuación mostramos algunos ejemplos de formas que pueden tomar diversas conectivas:

Conectivas en el lenguaje natural

Conjunción	y, también, además, adicionalmente, en adición, ahora, incluso, inclusive, así mismo, de igual forma, del mismo modo, igualmente, sin embargo, no obstante, pero, pese ..., empero, aunque, aun así, a pesar de que, tanto como, al igual que, por otra parte, más, mas, “no... ni...” (el “ni” también es una negación), aparte, así mismo, “por otro lado”
Disyunción	o, “tal vez ..., tal vez ...”, de pronto, de pronto también, aunque de pronto, puede, aunque puede
Negación	no, no es cierto que, no es verdad que, ni (también indica conjunción)

Análisis del lenguaje natural

Pensemos ahora la siguiente oración:

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia y se encuentra incomunicado.

Como primer paso, intentemos buscar las conectivas que hay en dicha oración, e identifiquemos las afirmaciones por partes.

Análisis del lenguaje natural - Cont

Tenemos aquí 2 conectivas, “o” e “y”.

El avión se estrelló en la cordillera o realizó un aterrizaje de emergencia y se encuentra incomunicado.

Esto divide la oración en tres partes:

- 1 El avión se estrelló en la cordillera
- 2 El avión realizó un aterrizaje de emergencia
- 3 El avión se encuentra incomunicado

Notece que la oración no dice explícitamente “El avión se encuentra incomunicado”, sino solamente “se encuentra incomunicado”. Pero ahí hay un sujeto tácito. Si pensamos quien se encuentra incomunicado, claramente refiere al avión.

Al momento de realizar el análisis, es conveniente transcribir cada proposición, entera colocando claramente el sujeto y el predicado.

Análisis del lenguaje natural - Cont

Ahora bien, tenemos una oración que tendrá un valor de verdad, y que está compuesta por tres proposiciones más pequeñas y dos conectivas, una conjunción y una disyunción.

Pero, ¿Cuál es la formula que corresponde a dicha oración?

Para simplificar la fórmula asignemos una letra a cada oración:

- e = El avión se estrelló en la cordillera
- a = El avión realizó un aterrizaje de emergencia
- i = El avión se encuentra incomunicado

De esta forma, cuando nombremos a “e” en la fórmula, sabremos que se corresponde con la proposición “El avión se estrelló en la cordillera”.

Análisis del lenguaje natural - Cont

Tenemos entonces que la formula es:

$$e \vee a \wedge i$$

Pero, como ya vimos la clase pasada, las conectivas actúan entre dos preguntas, en este caso, entre dos proposiciones. Para desambiguar, necesitamos colocar paréntesis. Tenemos entonces dos posibilidades:

$$(e \vee a) \wedge i$$

$$e \vee (a \wedge i)$$

Análisis del lenguaje natural - Cont

¿Será lo mismo una que la otra?. Para analizarlo, basta con ver la tabla de verdad, y ver que las valuaciones que hacen que la primer fórmula sea **VERDADERO**, no son necesariamente las mismas que hacen que la segunda lo sea.

e	a	i	$e \vee a$	$(e \vee a) \wedge i$	e	a	i	$a \wedge i$	$e \vee (a \wedge i)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Análisis del lenguaje natural

Entonces, ¿Qué fórmula corresponde a la frase? ¿Cuál usamos?

Para muchas disciplinas que utilizan la lógica como ciencia de apoyo poder analizar correctamente una oración es de vital importancia.

Imaginemos por ejemplo un abogado que intenta probar la inocencia de su cliente, o un sociólogo intentando analizar un discurso político.

Por ese motivo las ciencias empíricas y formales intentan evitar el uso de lenguaje ambiguo dentro de sus libros, e intentar dejar muy en claro qué fórmula es la que corresponde a un texto, mediante la misma redacción.

Proposiciones ocultas

Más aún, tomemos el siguiente ejemplo:

La luz está prendida o la luz está apagada

A simple vista, claramente hay dos proposiciones y una conectiva, "o".

- 1 La luz está prendida
- 2 La luz está apagada

Sin embargo, conociendo la naturaleza de las luces, sabemos que una luz tiene solo dos estados, prendida o apagada (olvidemos las luces con atenuación). Si una luz no está prendida, entonces está apagada, y si no está apagada, entonces está prendida.

Es decir, nuestras dos proposiciones son complementarias, por lo tanto, una expresarse en términos de la otra utilizando la conectiva de negación.

Proposiciones ocultas

Así, la frase anterior puede reescribirse como:

La luz está prendida o la luz no está prendida

Ahora si, vemos claramente que hay una sola proposición (“La luz está prendida”) y dos conectivas, “o” y “no”.

La lógica nos permite razonar mejor acerca de lo que dice el lenguaje natural, pues este es muy amplio y ambiguo. Sin embargo, analizar el lenguaje natural requiere mucha práctica y observación cuidadosa sobre lo que estamos diciendo.

- 1 Introducción a la lógica proposicional
 - Proposiciones
 - Uso de conectivas en proposiciones
- 2 Razonamientos**
 - Razonamientos en el lenguaje natural
 - Implicación
 - Prueba de validez de un razonamiento
 - Implicación como condicional
- 3 Equivalencias lógicas
 - Bicondicional
- 4 Formalización
 - Variables proposicionales
 - Fórmulas válidas
 - Resumen

Oraciones que se relacionan

Hasta ahora venimos analizando oraciones, que puede darse el caso que sean proposiciones, u oraciones compuestas por proposiciones y conectivas.

La gracia de la lógica es poder comprender como varias oraciones se interrelacionan, y poder extraer información útil de dichas relaciones.

El pasar la oración a una fórmula, no es el objetivo final, sino que es una parte del proceso que nos va a permitir expresar y analizar las oraciones y sus relaciones.

El objetivo final es poder elaborar y analizar razonamientos .

Razonamientos

Razonamiento

Un razonamiento es la actividad de la mente que permite inferir necesariamente una conclusión a partir de una serie de premisas.

Las **premisas** no son más que **proposiciones** con las que contamos a priori como información que **asumimos como verdadera**.

Una **conclusión** es simplemente una **nueva proposición**, la cual, **si el razonamiento es correcto y las premisas eran efectivamente verdaderas, será verdadera**.

Razonamientos en el lenguaje natural

Al momento de hablar, elaboramos muchos razonamientos. Expresamos posibilidades en base a hipótesis que poseemos previamente. Pensemos en el siguiente ejemplo:

La Tierra es plana o es redonda. La Tierra no es plana. Por lo tanto, la Tierra es redonda.

Tenemos nuestra hipótesis, “La tierra es plana o redonda”, no hay otra posibilidad. Como llegamos a dicha hipótesis no es relevante.

Tenemos un conocimiento adicional, “La tierra no es plana”. Tampoco sabemos como arribamos a eso, tal vez como resultado de un experimento. Nuevamente, no importa.

Elaboramos una conclusión en base a la hipótesis y al conocimiento adicional, “La tierra es redonda”.

Pero, ¿Cómo sabemos que es un razonamiento? Porque encontramos un indicador de conclusión.

Indicadores de conclusión

Un indicador de conclusión es una palabra (o conjunto de palabras) que indica que la oración que viene a continuación corresponde a la conclusión de una serie de premisas que fueron expresadas anteriormente.

Algunos ejemplos son:

- Por lo tanto
- En consecuencia
- Se concluye que
- Se deduce
- Por ende
- Luego
- Entonces
- Así pues

Nuevamente, el lenguaje natural es muy amplio, y por tanto hay muchas posibilidades, poder identificar claramente cuando se habla de una conclusión es muy útil para gente que estudia las ciencias sociales. A nosotros nos va a interesar, pero más nos va a importar ver que los razonamientos tengan sentido.

Razonamientos en el lenguaje natural

Volviendo al ejemplo, tenemos tres oraciones, de las cuales, dos son premisas, y una es conclusión.

- La Tierra es plana o es redonda.
- La Tierra no es plana.
- la Tierra es redonda.

Si analizamos el conjunto de oraciones, y buscamos las conectivas podremos ver que en realidad hay solo dos proposiciones base: “La Tierra es plana” y “La Tierra es redonda”. Luego, las oraciones son proposiciones compuestas con estas dos y conectivas.

Extrapolemos la fórmula

Razonamientos en el lenguaje más formal

Nos quedarían las siguientes tres oraciones:

- La Tierra es plana $\vee$ La Tierra es redonda.
- $\neg$ La Tierra es plana.
- La Tierra es redonda.

Los razonamientos pueden tener muchas premisas, pero siempre hay una única conclusión .

Por tanto, en un razonamiento solo puede haber un único indicador de conclusión .

Razonamientos en el lenguaje más formal

Los razonamientos suelen escribirse en lenguaje formal colocando cada premisa en un renglón aparte, y la conclusión como última línea, separando las premisas de la conclusión por una línea horizontal.

La Tierra es plana $\vee$ La Tierra es redonda

$\neg$ La Tierra es plana

La Tierra es redonda

Otra forma de escribir lo mismo es:

La Tierra es plana $\vee$ La Tierra es redonda, $\neg$ La Tierra es plana
Isq La Tierra es redonda

Otro formato de razonamientos

Veamos ahora el siguiente razonamiento:

Sabemos que la Tierra es redonda. Esto es así porque la Tierra es redonda o plana. Y sabemos que la Tierra no es plana

Si pensamos lo que nos cuenta la oración, veremos que es lo mismo que lo que nos decía la anterior. Dada la información de que la Tierra no es plana, y nuestra hipótesis, podemos saber que la Tierra es redonda.

Pero aquí no hay un indicador de conclusión. De hecho, la conclusión está antes que el resto de la información. En este caso tenemos **indicadores de premisa**

Indicadores de premisa

Un indicador de premisa es una palabra (o conjunto de palabras) que indica que la oración o conjunto de oraciones que viene a continuación corresponde a premisas de una conclusión que fue expresada anteriormente.

Algunos ejemplos son:

- Dado qué
- Ya qué
- Esto es así porque
- Porque
- Esto se sigue de
- En vista de que
- Pues

Además, observemos como en este último ejemplo, hay partes de la oración que no añaden valor relevante, sino que simplemente brindan estructura y estilo, como es el caso de “Sabemos que”.

Cuando vale un razonamiento

A simple vista pareciera que el razonamiento anterior tiene mucho sentido, por lo tanto, esperamos que valga.

¿Pero que significa “que valga”?

Como ya dijimos, **un razonamiento vale cuando, si las premisas son VERDADERO, entonces la conclusión necesariamente es VERDADERO**. En otras palabras, decimos que **las premisas implican lógicamente la conclusión**.

Implicación

Para analizar si una serie de premisas **implica lógicamente** la conclusión, primero tenemos que agregar una nueva conectiva, la **implicación**.

La implicación une dos proposiciones, llamadas **antecedente** y **consecuente**.

La implicación lo que dice es qué, de cumplirse el antecedente, el consecuente debe también cumplirse si o si para que la implicación sea cierta. Es decir, si el antecedente es **VERDADERO**, entonces el consecuente también debe ser **VERDADERO**.

La implicación no nos dice que pasa con el consecuente en el caso de que no se cumpla el antecedente. De ser el antecedente **FALSO**, el consecuente puede valer tanto **FALSO** como **VERDADERO**.

Implicación - Cont

Asumamos entonces dos proposiciones cualquiera, p y q , donde p será el antecedente y q será el consecuente.

El signo de implicación es $\rightarrow$, y diremos que p implica lógicamente a q escribiendo " $p \rightarrow q$ ". El signo suele leerse coloquialmente como "entonces" (es decir, leemos " p entonces q ").

A la implicación le corresponde la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El caso en que el antecedente es falso suele prestarse a confusión. Recordemos que la implicación solo me dice que pasa si el antecedente se cumple, no en caso contrario.

Probando si un razonamiento tiene sentido

Ahora si podemos probar si un razonamiento es válido o no. Podemos hacer esto mediante el proceso de tabla de verdad.

Para ello tenemos que tomar cada fórmula correspondiente a una premisa, y unir las a todas en una única fórmula, utilizando conjunciones. Debemos recordar de colocar la fórmula que corresponde a cada premisa entre paréntesis para evitar ambigüedades.

Así en el ejemplo anterior tenemos dos premisas:

- La Tierra es plana $\vee$ La Tierra es redonda.
- $\neg$ La Tierra es plana.

Si las unimos nos queda la siguiente fórmula: (La Tierra es plana $\vee$ La Tierra es redonda) $\wedge$ ($\neg$ La Tierra es plana)

Probando si un razonamiento tiene sentido

Ahora, esta nueva fórmula deberá implicar lógicamente a la conclusión. Ponemos a ambas entre paréntesis y armamos una única formula.

$$((\text{La Tierra es plana} \vee \text{La Tierra es redonda}) \wedge (\neg \text{La Tierra es plana})) \rightarrow (\text{La Tierra es redonda})$$

Como venimos haciendo hasta ahora, asignaremos la letra “p” a la proposición “La Tierra es plana” y la letra “r” a la proposición “La Tierra es redonda” para poder escribir y trabajar más cómodamente la fórmula.

Eso nos da lo siguiente: $((p \vee r) \wedge (\neg p)) \rightarrow (r)$

Probando si un razonamiento tiene sentido

Nos necesario armar la tabla de verdad de dicha fórmula. La dejamos expresada a continuación:

		Premisa 1	Premisa 2		Conclusión
p	r	$p \vee r$	$\neg p$	$(p \vee r) \wedge (\neg p)$	$((p \vee r) \wedge (\neg p)) \rightarrow (r)$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Probando si un razonamiento tiene sentido

Recordemos, un razonamiento es válido cuando, si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también lo es.

Marquemos primero aquellas filas en donde la primer premisa es verdadera.

		Premisa 1	Premisa 2			Conclusión
p	r	$p \vee r$	$\neg p$	$(p \vee r) \wedge (\neg p)$		$((p \vee r) \wedge (\neg p)) \rightarrow (r)$
V	V	V	F	F		V
V	F	V	F	F		V
F	V	V	V	V		V
F	F	F	V	F		V

Probando si un razonamiento tiene sentido

Marquemos ahora aquellas filas en donde la segunda premisa es verdadera.

		Premisa 1	Premisa 2			Conclusión
p	r	$p \vee r$	$\neg p$	$(p \vee r) \wedge (\neg p)$		$((p \vee r) \wedge (\neg p)) \rightarrow (r)$
V	V	V	F	F		V
V	F	V	F	F		V
F	V	V	V	V		V
F	F	F	V	F		V

Probando si un razonamiento tiene sentido

Finalmente nos quedamos solo con aquellos puntos en donde se solapan, es decir, donde tanto la primer premisa como la segunda son **VERDADERO**.

Estas filas son las únicas que nos interesará analizar. Si la conclusión es siempre **VERDADERO** en dichas filas, entonces, el razonamiento es válido. Caso contrario no lo es.

		Premisa 1	Premisa 2			Conclusión
p	r	$p \vee r$	$\neg p$	$(p \vee r) \wedge (\neg p)$		$((p \vee r) \wedge (\neg p)) \rightarrow (r)$
V	V	V	F	F		V
V	F	V	F	F		V
F	V	V	V	V		V
F	F	F	V	F		V

Otros usos de la implicación

La implicación también puede usarse en oraciones que no necesariamente expresan un razonamiento.

Por ejemplo, la siguiente oración:

Si la Tierra es plana entonces nos caeremos por el borde de la misma

Aquí hay dos proposiciones, aunque no se noten a simple vista.

- ❶ La Tierra es plana
- ❷ Nos caeremos por el borde de la Tierra

Implicación como condicional

Decimos que la segunda proposición, “Nos caeremos por el borde de la Tierra”, está condicionada por la primera “La Tierra es plana”.

Sin embargo, la segunda proposición no se desprende necesariamente de la primera. Podríamos caer por el borde de la Tierra si la misma fuera cúbica y no plana.

Es decir, el valor de verdad de cada una de estas proposiciones es independiente. Por lo tanto, no se trata de un razonamiento.

La implicación en este caso actúa como condición. Nos caeremos por el borde necesariamente si la tierra es plana, pero podríamos, o no, caer en el caso de que no lo sea.

Implicación como condicional

La implicación suele estar dada en el lenguaje natural por palabras similares a las que usamos como indicador de conclusión, como “entonces”, “así”, “luego”, etc.

Pensemos en el siguiente ejemplo:

Si la Tierra es plana entonces nos caeremos por el borde. Si la Tierra es redonda entonces no nos caeremos por el borde. La Tierra es redonda o plana. La Tierra no es plana. Por lo tanto, no nos caeremos por el borde.

Note como hay varias palabras que podrían ser indicadores de conclusión.

Implicación como condicional

Si la Tierra es plana **entonces** nos caeremos por el borde. Si la Tierra es redonda **entonces** no nos caeremos por el borde. La Tierra es redonda o plana. La Tierra no es plana. **Por lo tanto**, no nos caeremos por el borde.

Recordemos. Todo razonamiento tiene una o más premisas, y una y solo una conclusión. Por tanto, solo puede haber un indicador de conclusión.

El problema aquí es que estamos confundiendo indicadores de conclusión, con un indicador de la conectiva de implicación dentro de la oración.

Implicación como condicional

Si analizamos las oraciones y las conectivas, el razonamiento quedará de la siguiente forma:

La Tierra es plana $\rightarrow$ Nos caeremos por el borde

La Tierra es redonda $\rightarrow \neg$ Nos caeremos por el borde

La Tierra es redonda $\vee$ La Tierra es plana

$\neg$ La Tierra es plana

$\neg$ Nos caeremos por el borde

Como vemos sigue habiendo solo una conclusión, pero hay condiciones dentro de las premisas.

- 1 Introducción a la lógica proposicional
 - Proposiciones
 - Uso de conectivas en proposiciones
- 2 Razonamientos
 - Razonamientos en el lenguaje natural
 - Implicación
 - Prueba de validez de un razonamiento
 - Implicación como condicional
- 3 **Equivalencias lógicas**
 - Bicondicional
- 4 Formalización
 - Variables proposicionales
 - Fórmulas válidas
 - Resumen

Distintos e iguales

Luego de tanto análisis, cabe preguntarse si dos oraciones que intuitivamente creemos que dicen lo mismo, realmente lo hacen.

Pensemos en las siguientes dos oraciones

- La Tierra gira alrededor del Sol y La Tierra gira sobre su eje
- La Tierra gira sobre su eje y La Tierra gira alrededor del Sol

Será cierto que estas dos oraciones significan lo mismo, más allá que el orden en el que dicen las cosas no es el mismo. ¿Cómo podemos estar seguros?

Equivalencia lógica

Equivalencia lógica

Decimos que dos oraciones son lógicamente equivalentes si para toda valuación posible tiene exactamente el mismo valor de verdad en ambas oraciones.

Dicho de otra forma, si dos oraciones tienen la misma tabla de verdad, entonces son equivalentes.

Ojo, equivalentes no significa iguales. Las oraciones pueden ser distintas, pero en términos lógicos expresan lo mismo.

Equivalencia lógica

De hecho, si sabemos que dos oraciones son lógicamente equivalentes, entonces es indistinto cual usemos.

Las equivalencias entre formulas son tan útiles que es conveniente poder expresar que una fórmula es equivalente a otra.

Sin embargo, no podemos usar el signo de igualdad (“=”) pues no es cierto que sean iguales.

Bicondicional

El **bicondicional** o **doble implicación** es una conectiva que indica equivalencia lógica.

Es común encontrarnos dicha conectiva utilizada como una implicación doble, es decir, donde el antecedente implica al consecuente, y el consecuente implica al antecedente.

El bicondicional se representa con $\leftrightarrow$ (una flecha doble) y se suele leer como “si y solo si”.

Bicondicional

Dadas dos proposiciones cualquiera p y q , decimos que p vale si y solo si vale q escribiendo $p \leftrightarrow q$.

El bicondicional tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Como vemos, el bicondicional solo da verdadero cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo Bicondicional

La mejor forma de entenderlo es con algunos ejemplos. Las siguientes son oraciones que suelen traducirse con bicondicionales:

- Utilizaré limones para el bizcochuelo si y solo si no hay naranjas en la verdulería.
- La Tierra es redonda si y solo si podemos darle la vuelta sin caernos.
- Si y solo si existe vida inteligente en otros planetas, sufriremos una invasión extraterrestre.

- 1 Introducción a la lógica proposicional
 - Proposiciones
 - Uso de conectivas en proposiciones
- 2 Razonamientos
 - Razonamientos en el lenguaje natural
 - Implicación
 - Prueba de validez de un razonamiento
 - Implicación como condicional
- 3 Equivalencias lógicas
 - Bicondicional
- 4 **Formalización**
 - **Variables proposicionales**
 - Fórmulas válidas
 - Resumen

Variables proposicionales

A la lógica, en tanto ciencia formal, no le va a interesar tanto las oraciones con las que trabajemos, sino la forma que tienen nuestras proposiciones y razonamientos.

Así, no solo vamos a extrapolar siempre la formula para poder trabajarla, sino que vamos a reemplazar las proposiciones atómicas por **variables proposicionales**.

Una **variable proposicional** consiste en una letra (generalmente, pero no necesariamente, comenzando desde la p y siguiendo el orden alfabético). A dicha letra le corresponde semánticamente una proposición atómica.

Variables proposicionales - Ejemplo

Así por ejemplo, la proposición “La Tierra gira en torno al Sol y La Tierra gira sobre su eje”, como ya vimos, está compuesta de dos proposiciones atómicas. A cada proposición atómica le asignaremos una letra:

- p = La Tierra gira en torno al Sol
- q = La Tierra gira sobre su eje

De esta forma, la proposición compuesta en lenguaje formal quedaría como “ $p \wedge q$ ”.

A la asociación de letras con nociones semánticas se la conoce como **diccionario del lenguaje**.

Variables proposicionales - Ejemplo

Pensemos a que frase corresponde la fórmula " $p \vee q$ ".

La primer definición que podríamos pensar es: "La Tierra gira en torno al Sol o La Tierra gira sobre su eje"

Esa definición mantiene a p y a q con las mismas definiciones semánticas que tenían en la formula anterior. Sin embargo, si no se provee información de cual es el diccionario, p y q podrían ser cualquier cosa.

Con un diccionario distinto, la siguiente oración también corresponde a la fórmula $p \vee q$: "Llueve en Buenos Aires o nieva en Bariloche" .

Elección de las variables proposicionales

Es decir que en cada oración que analicemos, podemos reutilizar las mismas letras que ya utilizamos en análisis previos.

Si siempre seguimos la lógica de usar las letras comenzando por p y siguiendo por q , r , etc. dos oraciones que tienen la misma forma deberían producir la misma fórmula.

Otra opción es elegir letras que sean representativas de lo que estamos hablando, por ejemplo, la proposición “La Tierra gira sobre su eje” podríamos denotarla con la letra e , por “eje”.

Elección de las variables proposicionales

La elección de la letra es arbitraria, y dos fórmulas separadas con la misma forma, aunque distintas letras pueden ser consideradas iguales.

Pensemos el ejemplo “La Tierra gira en torno al Sol y La Tierra gira sobre su eje”. Si elegimos el siguiente diccionario:

- p = La Tierra gira en torno al Sol
- q = La Tierra gira sobre su eje

Obtendremos “ $p \wedge q$ ” como fórmula.

Si elegimos el siguiente diccionario:

- s = La Tierra gira en torno al Sol
- e = La Tierra gira sobre su eje

Entonces la fórmula será “ $s \wedge e$ ”

Elección de las variables proposicionales

Si las dos fórmulas son independientes, " $p \wedge q$ " y $s \wedge e$ son iguales, pues la letra usada es un producto de una selección arbitraria.

Vamos a decir que dos fórmulas son iguales si, modificando la asignación de letras en nuestro diccionario, podemos transformar la primer fórmula en la segunda, o viceversa.

Variables proposicionales en razonamientos

Al analizar un razonamiento, debemos analizar todo el conjunto de oraciones para armar un único diccionario para el razonamiento entero.

Esto quiere decir que si una misma proposición aparece dos veces en distintas oraciones, le deberá corresponder la misma variable proposicional en ambas.

Por ejemplo, el siguiente razonamiento: “La Tierra es plana o redonda. La Tierra no es plana. Por lo tanto, la Tierra es redonda.”

En este ejemplo, si analizamos de forma independiente las oraciones “La Tierra es plana o redonda” y la conclusión “la Tierra es redonda”, podríamos acabar asignándole la fórmula “ $p \vee q$ ” a la primera, y la fórmula “ r ” a la conclusión. Esto no es correcto, pues “la Tierra es redonda”, debe ser asociado a la misma variable en todas las oraciones del razonamiento.

Así, las fórmulas de dicho razonamiento podrían ser “ $p \vee q$ ”, “ $\neg p$ ” y “ q ”.

Fórmulas que expresan razonamientos

Ya habíamos visto que podemos expresar un razonamiento colocando cada premisa en un nuevo renglón, y finalmente, separada por una línea horizontal, la conclusión debajo.

Para el ejemplo anterior, esto quedaría así:

$$p \vee q$$
$$\neg p$$

$$q$$

Otra forma de escribir lo mismo, como ya vimos, es pasar el razonamiento a una única fórmula, uniendo cada premisa con una conjunción, y estas, implicando lógicamente a la conclusión:

$$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow (q)$$

Fórmulas que expresan razonamientos

La primera tiene el problema de que requiere bastante espacio para expresar el razonamiento (múltiples renglones).

La segunda se vuelve complicada cuando las oraciones tienen muchas conectivas, y no queda claro donde empieza una premisa y donde termina. Además requiere la adición de muchos paréntesis que en ocasiones no ayudan, sino que ensucian la fórmula.

Por esto, existe y se usa mucho una tercer forma de escribir un razonamiento, el cual consiste en colocar las fórmulas para cada premisa separadas por comas, colocar un signo especial “ $\vdash$ ” (al que llamamos secuyente), y luego colocar la conclusión.

$$p \vee q, \neg p \vdash q$$

Forma de las fórmulas

Como ya vimos, toda conectiva trabaja siempre sobre dos proposiciones (las cuales pueden ser simples o compuestas).

Necesitamos adicionar paréntesis para desambiguar acerca de cuales son las proposiciones afectadas por una conectiva.

A continuación veamos cuales son las formas que puede adoptar una proposición.

Forma de las fórmulas

- ❶ Toda variable proposicional es una fórmula válida.
- ❷ Si ϕ es una fórmula válida, entonces $(\neg\phi)$ también lo es
- ❸ Si ϕ y ψ son fórmulas válidas, entonces:
 - $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula válida
 - $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula válida
 - $(\phi \rightarrow \psi)$ es una fórmula válida
 - $(\phi \leftrightarrow \psi)$ es una fórmula válida

Note como, si se usa una conectiva, se debe aplicar paréntesis.

Forma de las fórmulas

Así, la siguiente fórmula es válida:

$$((p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q))$$

Pero esta no lo es:

$$p \wedge q \leftrightarrow \neg q$$

Las reglas de producción de formulas nos indican además que cosas como $p \neg q$ o $p \wedge \vee q$ no son válidas.

Reglas de precedencia

Fórmulas muy grandes tendrán por tanto muchos paréntesis. Para evitar escribir tantos paréntesis podemos definir algunas reglas, que indican como desambiguar situaciones como $(p \vee q) \leftrightarrow p$ y $p \vee (q \leftrightarrow p)$ cuando se omiten los paréntesis.

- 1 Omitimos siempre los paréntesis más externos
- 2 La negación asocia más fuerte que todos los demás
- 3 La conjunción asocia más fuerte que todas, menos la negación
- 4 La disyunción asocia más fuerte que la implicación y el bicondicional
- 5 La implicación asocia más fuerte que el bicondicional, pero menos que todo el resto
- 6 El bicondicional asocia más débil

Reglas de precedencia

Que quiere decir esto. Si tenemos la siguiente fórmula $\neg p \vee q$, debemos interpretarla $((\neg p) \vee q)$. Como la negación asocia más fuerte, salvo que haya paréntesis, la negación es lo primero a resolver.

De forma similar $p \vee q \rightarrow r$ debe interpretarse como $((p \vee q) \rightarrow r)$ pues la disyunción asocia más fuerte que la implicación.

Resumen

Recapitulemos hasta acá.

- La lógica proposicional o de orden cero, es la lógica que tiene por objeto de estudio las proposiciones.
- Una proposición es una oración escrita utilizando la función informativa del lenguaje.
- Toda proposición tiene un valor de verdad, ya sea **VERDADERO** o **FALSO**.
- Las proposiciones pueden ser atómicas, es decir sin tener conectivas.
- Las proposiciones pueden unirse entre sí con conectivas, para dar lugar a proposiciones compuestas.
- Una proposición puede actuar como premisa, o como conclusión dentro de un razonamiento.
- En una fórmula lógica identificamos cada proposición atómica con una variable proposicional distinta.

Resumen - Cont

- Un razonamiento consiste en una o más premisas y una y solo una conclusión.
- Los razonamientos pueden ser válidos o inválidos.
- Un razonamiento es válido cuando, si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión necesariamente es verdadera.
- Podemos probar la validez de los razonamientos mediante el uso de tablas de verdad.

Resumen Conectivas

Conectivas lógicas y sus tablas de verdad:

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Negación

p	$\neg p$
V	F
F	V

Implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Resumen - Cont

- La lógica trabaja a nivel sintáctico, por lo que le importa la forma, y no el contenido de las proposiciones.
- Una fórmula está compuesta de variables proposicionales y de conectivas que las unen.
- Omitimos paréntesis en las fórmulas con el objetivo de simplificar la lectura, pero las fórmulas no se prestan a ambigüedades.



Lógica

Lógica Proposicional

Elementos de Programación y Lógica

Unidad 3 - Clase 3