Práctica 4: Aplicaciones de la derivada

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

Derivación implícita

1. Hallar la pendiente de la recta tangente a la circunferencia dada por la ecuación $x^2+y^2 = 25$ en el punto $(-3, 4)$. Graficar la circunferencia y la recta hallada en un mismo sistema de ejes coordenados.

2. Probar que el punto $(2, -3)$ pertenece a la gráfica de la curva $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$ y hallar la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

3. Dada la curva de ecuación $x^2 + x\,\mathrm{sen}(y) = 5xy + 1$, hallar y' (indicando dónde esto es posible) y calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 0)$.

4. Suponiendo que la siguiente ecuación define implícitamente a y como función de x, hallar y' (indicando donde esto es posible):
$$(x^2 + y^2)(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1) = 2.$$

Extremos absolutos de funciones

5. Graficar funciones f que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:
   (a) $f(2) = 3$, f tiene un máximo absoluto en 2 y f no tiene mínimo absoluto.
   (b) f tiene un máximo absoluto en 1 y un mínimo absoluto en 4.
   (c) f no posee ni mínimo ni máximo absoluto.
   (d) f tiene infinitos mínimos y máximos absolutos.
   (e) f es continua en $[-2, 3]$, tiene un máximo absoluto en 0 y en 1, y un mínimo absoluto en -1.
   (f) f es continua en $[-2, 2]$, tiene un máximo absoluto en 1, y no posee derivada ni en 0 ni en 1.

6. A partir del gráfico de $p(x) = x^2 - x$, hallar los mínimos y máximos absolutos en los intervalos $[-\frac{1}{2}, 1]$, $[-1, 1]$, $[0, 1]$ y $[-2, 3]$.

7. Hallar los mínimos y máximos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 7$ en los intervalos $[-4, -3]$, $[-2, 0]$, $[0, 1]$ y $[-2, 2]$.
   (b) $g(x) = \frac{1}{x^3-x}$ en el intervalo $[-3, -2]$
   (c) $h(x) = x - \mathrm{sen}(x)$ en $[0, 2\pi]$.

8. Probar que en el intervalo $[-1, 2]$ la función polinómica $P(x) = x^7 - 7x + 1$ tiene un mínimo absoluto en $x = 1$.

Teorema de Rolle, teorema del valor medio y regla de L'Hôpital

9. Analizar si puede aplicarse el teorema de Rolle en el intervalo dado, y si es así hallar todos los valores que cumplen con la conclusión del teorema.
   (a) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y en $[0, 1]$.
   (b) $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$ en $[-1, 1]$.
   (c) $h(x) = \frac{1}{x} + x$ en $[-2, -\frac{1}{2}]$.

10. Analizar si puede aplicarse el teorema del valor medio a la función $u(t) = t + \sqrt{t}$ en el intervalo $[1, 4]$. De ser así hallar todos los valores que cumplen con la conclusión del teorema.

11. Un automovilista entra a una autopista y recibe un talón con la hora 13:15 hs. Sale de ella 135 km más adelante a las 14:42 hs y recibe una boleta de infracción por exceso de velocidad. Explicar esto por el teorema del valor medio suponiendo que la velocidad máxima era de 90 km/h.

    Sugerencia: sea $p(t)$ la posición del vehículo en el instante de tiempo t medido en horas. Hagamos corresponder $t = 0$ con las 13:15 hs, y $p(0) = 0$ con la posición en la que se halla el automovilista al ingresar a la autopista. Como entre las 13:15 hs y las 14:42 hs hay 87 minutos (1,45 hs) tenemos que $p(1,45) = 135$. Finalmente tener en cuenta que si $v(t)$ representa la velocidad del automovilista en el instante t entonces $v(t) = p'(t)$.

Estudio completo de funciones

12. Hacer un estudio completo y un gráfico de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = -x^3 + 3x$ (b) $f(x) = -\frac{1}{x^2-9}$ (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

    (d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ (e) $f(x) = \frac{x}{3x-5}$ (f) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$

    (g) $f(x) = x\sqrt{5-x}$ (h) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ (i) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$

    (j) $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ (k) $f(x) = \sqrt{x} - x$ (l) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

    (m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (n) $f(x) = x^7 - \frac{7}{5}x^5 + 2$ (ñ) $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$

Aproximaciones lineales

Recordemos que si f es una función derivable en un entorno de x_0 y x es un valor próximo a x_0 entonces

$$f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Si escribimos $\Delta x = x - x_0$, la afirmación anterior equivale a decir que para valores Δx próximos a cero vale que $f(x_0 + \Delta x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$.

13. Calcular, utilizando aproximaciones lineales, valores aproximados de los siguientes números reales: $\sqrt[3]{27,1}$, $\sqrt[3]{26,99}$ y $\tan(\frac{\pi}{4} - 0,02)$.

14. (a) Probar que cerca de los puntos x_0 indicados valen las afirmaciones que se hacen a continuación:

    (i) $\operatorname{sen}(x) \cong x \quad x_0 = 0$ (ii) $\frac{1}{x} \cong -x + 2 \quad x_0 = 1$ (iii) $\frac{1}{x^2} \cong 2x + 3 \quad x_0 = -1$.

    (b) Dibujar las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = x$ en un mismo sistema de ejes coordenados (lo mismo para los otros casos).

L'Hôpital

15. Utilizar la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:

    (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}$ (ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ (iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10} - x^5 + 2}{x^3 + 15}$