

# Práctica 3: Derivadas

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

- Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados, calcular en cada caso la ecuación de la recta tangente, y finalmente graficar las funciones y las rectas halladas en un mismo sistema de ejes coordenados respectivamente.

- $y = x^2$  en el punto  $(2, 4)$ .
- $y = x^2 + 1$  en el punto  $(0, 1)$ .
- $y = 2x + 3$  en el punto  $(1, 5)$ .
- $y = x^3$  en el punto  $(1, 1)$ .
- $y = \frac{1}{x}$  en el punto  $(1, 1)$ .
- $y = \frac{1}{x^2}$  en el punto  $(2, \frac{1}{4})$ .
- $y = \sin(x)$  en el punto  $(0, 0)$ .
- $y = \sqrt{x+1}$  en el punto  $(0, 1)$ .

- Hallar por definición las funciones derivadas de las funciones dadas en los ítems (d), (e) y (h) del ejercicio previo.

- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Graficar.
- Probar que  $f$  es continua en todo su dominio.
- Probar que  $f$  no es derivable en  $x = 0$  e interpretar geoméricamente este resultado. Luego determinar  $f'(x)$  para todos los valores  $x \neq 0$ .

- Hallar las coordenadas de los puntos donde la recta tangente a la gráfica de  $p(t) = t^5 + 5t^3 - 20t + 1$  es horizontal y hallar la ecuación de dichas rectas.

- Sea  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$v(t) = \begin{cases} t^2 + t & \text{si } t \leq 0 \\ -t^2 + t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

- Graficar, probar que  $v$  es derivable en todo su dominio y calcular  $v'$ .
- ¿La función  $v$  es continua en todo su dominio?

- Determinar el dominio de la función  $h(x) = \sqrt{|x|}$ , graficarla y analizar si es derivable en  $x = 0$ .

- Sea  $g(x) = \sqrt[5]{2x+1}$ .

- Determinar el dominio de  $g$ .
- ¿Es  $g$  derivable en el punto de abscisa  $-\frac{1}{2}$ ?
- Calcular  $g'$  e indicar su dominio.

- Hallar las derivadas de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

- $y = 5x^{\frac{2}{3}}$
- $y = x^{15}$
- $y = x^{-\frac{2}{3}}$
- $y = 3x^{-1} + 2x^7$
- $y = x^2 \sin(x)$
- $y = (x^{-2} + x)(3 \cos(x) + x^3)$
- $y = x^{\sqrt{2}}$
- $y = \frac{2x+1}{3x-4}$
- $y = \frac{2x}{x^2+3x+2}$
- $y = \tan(x)$
- $y = \frac{1}{x+1}(\frac{1}{x^2} + x)$
- $y = (2x+1)^7$
- $y = \sin(\cos(x))$
- $y = \frac{1}{\cos(x^2+1)}$
- $y = (2x-5)^{-\frac{3}{7}}$
- $y = \sin^2(x^3 + x + 1)$
- $y = \frac{\sin(x^2)}{\cos(4x)}$
- $y = \frac{(2x+1)^{-5}}{\sin^3(x) + \sin(x^3)}$
- $y = \frac{1}{\sin(x)}$
- $y = (x+1)^5(x+2)^7(x+3)^9$
- $y = x \sin(2x) + \cos(\sin(x)) + 1$
- $y = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^3 + \sqrt{x}}$
- $y = \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\sin(x)+1}$

9. ¿Cuál es la pendiente de la curva  $y = \frac{t^2}{t^2+1}$  en  $t = 1$ ? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?
10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que  $f'(1) = -1$ . Calcular la derivada de la función  $F(x) = f(2x + \cos(x))$  en  $x = 0$ .  
Sugerencia: definir  $u(x) = 2x + \cos(x)$  y notar que  $F(x) = f(u(x))$ .
11. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = \sin(|x|)$ . Graficar  $f$  en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y probar que dicha función no es derivable en  $x = 0$ .
12. Hallar las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función  $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5$  donde la recta tangente es paralela a  $y = 6x - 1$ .
13. Demostrar que la recta  $y = -x$  es tangente a la curva dada por la ecuación  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ . Hallar el punto de tangencia.
14. Sea  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por
- $$j(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
- Probar que  $j$  es derivable en todo su dominio y calcular la función derivada.
15. Sea  $f(x) = xg(x)$  con  $g$  continua en  $x = 0$ .  
Probar que  $f$  es derivable en  $x = 0$ . ¿Cuánto vale  $f'(0)$ ?
16. Sea  $f$  una función definida en un entorno de  $x = 0$ , continua en  $x = 0$  y tal que  $f(0) = 1$ . Consideremos la función  $g$  dada por
- $$g(x) = \sin(x)f(x)$$
- Probar que  $g$  es derivable en  $x = 0$ . Justificar la respuesta.
17. Hallar la ecuación de la recta tangente a  $u(x) = 2 - x^2$  en un punto  $(x_0, u(x_0))$  y determinar el valor de  $x_0$  sabiendo que la recta tangente a la gráfica de  $u$  en dicho punto pasa por el punto  $(1, 5)$ . Graficar  $u$  y la recta hallada en un mismo sistema de ejes coordenados.