

Práctica 2: Límites y continuidad

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Graficar y calcular (si existe) el límite en el punto x_0 indicado:

(a) $f(x) = 2x + 3$ $x_0 = 2$

(b) $g(x) = (x - 2)^2 - 1$ $x_0 = 4$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

(d) $i(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

(e) $j(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

2. Sea u la función dada por $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Graficar la función $y = 1 - x^2$. A partir del gráfico decir para qué valores de x vale que $y \geq 0$. Determinar luego el dominio de u .

(b) ¿Tiene sentido calcular $\lim_{x \rightarrow -1^-} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$? Justificar la respuesta y calcular los límites que tengan sentido.

3. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}$ (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(ñ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x}$ (o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos\left(\frac{1}{2x - \pi}\right)$ (p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

4. Sean $g(x) = -2x^2 + 4x - 1$ y $h(x) = (x - 1)^2 + 1$, y supongamos que f es una función definida en un entorno reducido del 1 tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x de dicho entorno reducido.

(a) Graficar g y h en un mismo sistema de ejes coordenados.

(b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5. Sean $n > 0$ un número natural y f una función definida en un entorno reducido de 0 tal que $|f(x)| \leq |x^n|$ en dicho entorno reducido.

(a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(b) Para $n = 1, 2$ interpretar geoméricamente la desigualdad dada.

Sugerencia: notar que en el entorno reducido de 0 mencionado vale que $-|x^n| \leq f(x) \leq |x^n|$.

6. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt[5]{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x^3) - 1}{x^2}$

7. Calcular los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 10}{x^2 - 15}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{3x^3 + x + 2}$ (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^3 + 1}{-3x^3 - 4x + 7}$ (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ (n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|}$ (ñ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{10} + 1}{3x^{10} + x^9 + x^5 - x^2 + 6}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 - x}$ (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1}$ (q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$

8. Consideremos las funciones h , i y j del Ejercicio 1. Indicar los puntos donde dichas funciones son continuas y clasificar las discontinuidades (en caso de que existan).

9. La función $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$, ¿admite una discontinuidad evitable en $x = 0$?

10. Sea f una función definida en un entorno de a y continua en a .

¿Es cierto que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$?

11. Dar un ejemplo de una función con una discontinuidad inevitable en 3.

12. Sea g la función dada por $g(t) = \frac{t^2+t-1}{t-1}$. Hallar los puntos donde g es continua y clasificar las discontinuidades (si existen).

13. Dar un ejemplo de una función f que no esté definida en 0 y tal que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, y un ejemplo de una función g que esté definida en 0 y tal que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ (los ejemplos pueden ser dados a partir de gráficos).

14. Se dice que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica determinada por la función f si ocurre alguna de las siguientes posibilidades: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ó $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica determinada por la función f si ocurre alguna de las siguientes posibilidades: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

Graficar la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y determinar si posee asíntotas. ¿Las funciones seno, coseno y tangente tienen asíntotas?

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ -ax^2 - 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Determinar a y b para que f resulte continua en todo su dominio.

(b) Graficar.

16. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en $[-2, -1]$, otra en $[0, 1]$ y otra en $[1, 2]$.

Sugerencia: considerar la función polinómica $P(x) = x^3 - 3x + 1$ y aplicar el teorema de Bolzano en los intervalos indicados.

17. Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = 1 - x$. Graficar estas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados y probar que existe un número real c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Sugerencia: aplicar el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

18. Consideremos la función polinómica $A(x) = x^3 + x - 1$. Probar que existe un número real c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $A(c) = 0$, y utilizar luego el método de la bisección para encontrar un intervalo cerrado de longitud $1/8$ en el cual A admita una raíz (recordar que la longitud de un intervalo $[a, b]$ es igual a $b - a$).

19. (a) Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Probar que para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$ existe un c en (a, b) tal que $f(c) = u$. Hacer un gráfico de la situación planteada.

El resultado anterior se denomina *Teorema del valor intermedio*.

Sugerencia: aplicar el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - u$ en el intervalo $[a, b]$.

(b) Sea $f(x) = x^2$ definida en $[0, 2]$. Tenemos que $f(0) = 0 < 2 < 4 = f(2)$. Hallar un número real c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $f(c) = 2$. Graficar.