Álgebra y Geometría Analítica: Práctica 4

Determinantes
(basadas en las prácticas de la Prof. Gisela Savslasky y el Prof. Ernesto Aljinovic)

Docente: Cecilia Jarne

1. Calcule los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Halla el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 74 & -1 \\ 0 & 2 & 51 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Los 4 determinantes siguientes son nulos. Justifica cada caso sin el cálculo directo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 51 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 61 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Sea A tal que: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A3)$ con $|A| = 4$ Calcula usando las propiedades de la función determinante:

   a)$B = (A_1 - 2, A_2, A_3 - A2)$

   b)$C = (-A_1, 2A_2 + A1, 5A3)$

   c) ¿La matriz C es inversible? Justifique.

5. Calcula el siguiente determinante de orden 4, aplicando primero operaciones de fila y de columna para transformarlo en otro equivalente con tres ceros en la tercera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Sea $A \in R^{3\times3}/A = (a_{ij})$ y $Det(A) = k$ con $k \in R - \{0\}$ y $B = \begin{pmatrix} -a_{12} & a_{12} + a_{11} & ka_{13} \\ -a_{22} & a_{22} + a_{21} & ka_{23} \\ -a_{32} & a_{32} + a31 & ka_{33} \end{pmatrix}$

   Calcula justificando los pasos:

   a)$Det(\frac{1}{k}B.A^t)$

   b)$Det(A^{-1}B^t)$

7. Si A es una matriz de orden 3 cuyo determinante es igual a 2 calcula:
   a)$Det(A^{-1})$

   b)$Det(5A^{-1})$

   c)$Det((5A)^{-1})$

8. Determina los valores de t para los cuales las siguientes matrices son singulares:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

9. Dada la matriz A, halla los valores de k para que A sea simétrica e inversible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k^2+2k & 1 \\ -2-2k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & k & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

    a) Halla los valores de k para los cuales A es inversible.

    b) Determina los valores de k para los cuales $Det(A) = -7$

    c) Para los valores de k obtenidos en el inciso anterior, encuentra las matrices escalares $B \in R^{3\times3} / Det(A.B) = -56$

11. Sean $A, B \in R^{3\times3}$. Demuestra que:

    a) Si B es simétrica entonces $Det(B.A + \alpha.I) = Det(\alpha.I + A^t.B)$

    b) Si $A = \alpha I, \alpha > 0$ y $B^2 = 3I$ entonces $BA + B$ es invertible.

12. Comprueba que la matriz de rotación $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ es ortogonal para cualquier valor de θ

13. Mediante la regla de Cramer resuelve los sistemas

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ -x + y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

14. Halla las matrices adjunta e inversa (si existen) de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Halla las inversas de las matrices siguientes, usando determinantes, y verifica que $Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. ¿Para qué valores de k las matrices siguientes son no singulares?

$$\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -k^2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$$