

Álgebra y Geometría Analítica: Práctica 3

Matrices y Sistemas de ecuaciones
(basadas en las prácticas de la Prof. Gisela Savslasky y el Prof. Ernesto Aljinovic)

Profesora: Cecilia Jarne

1. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2 & i \\ -1 & 3+i & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2+i & 0 \\ i^{215} & 3 & 2i \end{bmatrix}$$

- a) Escribir los vectores fila y los vectores columna de ambas matrices.
b) Hallar $A+B$, $\frac{5}{2}B$, $-2B$, $A^t + 2B^t$, $A^t - B^t$, $(A-B)^t$

2. Sean A y B tales que:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcular $A.B$, $B.A$, $3A^2$, $(3A)^2$, $(A+B)^2$, $A^2 + 2A.B + B^2$

3. Sean A y B matrices de $m \times n$, demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$, y que si c es un número, $(cA)^t = cA^t$.
4. Calcular $A.B$, $B^t.A^t$, $(A.B)^t$, dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Demostrar que $(A.B)^t = B^t.A^t$ para A y B matrices cuadradas de orden 2. Luego demostrarlo para matrices cuadradas de orden n .
6. Demostrar que:
a) para cualquier matriz cuadrada A , la matriz $A + A^t$ es simétrica.
b) para cualquier matriz cuadrada A , la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.
c) toda matriz cuadrada puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica
(Sugerencia: $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$)

7. Siendo A , B y C tales que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- a) Hallar $(AB)C$ y $A(BC)$
b) ¿Puede afirmar, a partir de este ejemplo, que el producto de matrices es asociativo? Por qué?

8. Sean A y B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Calcular AB y BA . ¿Qué puede afirmar sobre la conmutatividad del producto de matrices?
b) Siendo

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

hallar CA , AC , CB , BC ¿Qué tipo de matriz es C ? ¿Es posible demostrar una ley general que incluya estos resultados como casos particulares? Si es así, dar el enunciado y demostrarlo.

9. Mostrar un ejemplo para justificar que el producto de matrices no verifica la ley de producto nulo y un ejemplo para justificar que tampoco verifica la ley cancelativa.
10. Una empresa paga a sus ejecutivos un salario y además les da acciones de la compañía a manera de gratificación anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió \$80000 y 50 acciones, cada uno de los tres vicepresidentes recibió \$45000 y 20 acciones y al tesorero le dieron \$40000 y 10 acciones.
- expresar los pagos hechos en dinero y en acciones a los ejecutivos como una matriz de 2×3 .
 - expresar el número de ejecutivos de cada rango por medio de un vector columna.
 - usar la multiplicación matricial para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que la compañía pagó a estos ejecutivos el año pasado.
11. ¿Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede no tener solución? Como ejemplo, resolver la siguiente situación: Una fábrica de cerámica produce tazas y platos. Por cada taza o plato un obrero mide una cantidad de material y la pone en una máquina moldeadora, de donde cada pieza sale automáticamente barnizada y seca. Se ha determinado que, en promedio, un obrero tarda 3 minutos para completar su parte de proceso por cada taza y 2 minutos por cada plato. Calcule cuántas tazas y cuántos platos se producen diariamente (considere 8 horas de trabajo efectivo por obrero) suponiendo que:
- el material de cada taza sale \$0,25, el de cada plato \$0,20 y se dispone de \$44 diarios para gasto de material
 - el material de cada taza sale \$0,15, el de cada plato \$0,10 y se dispone de \$34 diarios para gasto de material.
 - el material de cada taza sale \$0,15, el de cada plato \$0,10 y se dispone de \$24 diarios para gasto de material
- Escriba como Conclusión las distintas situaciones de como puede ser un sistema lineal de 2×2 .

12. Obtener las matrices A y B que verifican el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B &= \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

13. Aplicando el proceso de Reducción por filas a cada uno de los sistemas siguientes, determinar la solución general, si existe. Verificar en cada caso el Teorema de Rouché-Fröbenius. Verificar la resolución de cada caso utilizando el comando para resolver ecuaciones lineales de WxMaxima.
- $x + y + 3z = 5; 2x - y + 4z = 11; -y + z = 3$
 - $3x + 2y + z = 1; 5x + 3y + 3z = 2; x + y - z = 1$
 - $3x + 2y + z = 1; 5x + 3y + 3z = 2; 7x + 4y + 5z = 3$
 - $3x + 2y + z = 1; 5x + 3y + 3z = 2; 7x + 4y + 5z = 3; x + y - z = 0$
 - $3x - 2y + 5z + u = 1; x + y - 3z + 2u = 2; 6x + y - 4z + 3u = 7$
 - $x + y - 3z + u = 5; 2x - y + z - 2u = 2; 7x + y - 7z + 3u = 3$
 - $x + y + 2z + 3u + 4v = 0; 2x + 2y + 7z + 11u + 14v = 0; 3x + 3y + 6z + 10u + 15v = 0$
 - $x - 2y + z + 2u = -2; 2x + 3y - z - 5u = 9; 4x - y + z - 5u = 9; 4x - y + z - u = 5; 5x - 3y + 2z + u = 3$
14. Demostrar que X es no singular si y solo si $ad - bc \neq 0$ y hallar su inversa, con :

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

15. Sean A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) aplicando operaciones elementales de fila, hallar, si es posible, la inversa de las matrices y comprobar el resultado.

b) utilizar las inversas halladas para resolver los sistemas $A.X^t = (1, 2, 0)^t$, $B.X^t = (1, 0, 1)^t$

16. Encontrar, si es posible, la expresión para calcular la matriz X y resolver $X.A2B = C$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

17. Decidir si es V o F y justificar dando un contraejemplo si es F o haciendo la demostración si es V:

a) $(A + B).(A - B) = A^2 - B^2$, siendo A y B matrices cuadradas de orden n .

b) Si una matriz cuadrada tiene dos columnas proporcionales, entonces es singular.

c) Sean A matriz de tamaño $m \times r$ y B matriz de tamaño $r \times m$. Si A tiene una fila de ceros, entonces $A.B$ tiene una fila de ceros.

d) Sea A matriz cuadrada con una hilera de ceros. Entonces A es singular.

e) Sea A matriz cuadrada de orden 3. Entonces $A.A^t$ es simétrica.

f) Sea A una matriz invertible. Entonces la inversa de A^t es $(A - 1)^t$

g) Sea A una matriz diagonal no singular de orden 3, entonces la inversa de A es diagonal y los elementos de su diagonal son los inversos aritméticos de los elementos de la diagonal de A .

h) Sean A y B invertibles. Entonces $A.B$ es invertible y la inversa de $A.B$ es $B^{-1}.A^{-1}$.

i) Si A es invertible el S.E.L. $A.X = B$ es compatible determinado para cualquier B

j) Si A es invertible el S.E.L. $A^t.X = B$ es compatible determinado para cualquier B