Práctica 3:

Campos vectoriales e integrales de línea

Profesor: Cecilia Jarne (adaptada a partir de la práctica de Marcos Sirchia)

1. I) Calcular el gradiente de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f_1(x,y) = ln(x^2+y^2)$, desde $P_1(3,-4)$ a $P_2(0,1)$
   b) $f_2(x,y) = y$, desde $P_1(1,1)$ a $P_2(-1,2)$
   c) $f_3(x,y,z) = x^2+y^2$, desde $P_1(1,1,2)$ a $P_2(0,1,1)$
   d) $f_4(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, desde $P_1(0,3,4)$ a $P_2(0,0,1)$

   II) Hallar y graficar las curvas de nivel de las funciones de dos variables que pasan por los puntos indicados y hacer un esquema gráfico del gradiente en dichos puntos.

   III) Hallar y graficar las superficies de nivel de las funciones de tres variables que pasan por los puntos indicados y hacer un esquema gráfico del gradiente en dichos puntos.

   Ayuda: Recordar que $\vec{\nabla} f(x,y)$ es normal a la curva de nivel dada por $f(x,y) = constante$ y que $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ es normal a la superficie de nivel dada por $f(x,y,z) = C$.

2. a) Si $\vec{r}(t) = 3\cos(2t)\hat{\mathbf{\imath}} + 3\sin(2t)\hat{\mathbf{\jmath}}$ representa la trayectoria de una partícula en el tiempo t, calcular la velocidad en el tiempo t y justificar que la velocidad de la partícula en un punto (x,y) de la trayectoria está dada por el campo vectorial $\vec{v}(x,y) = -2y\hat{\mathbf{\imath}} + 2x\hat{\mathbf{\jmath}}$.

   b) Si $\vec{v_2}(x,y,z) = 2\hat{\mathbf{\imath}} + 3z\hat{\mathbf{\jmath}} + 2x\hat{\mathbf{k}}$ representa la velocidad de un fluido, verificar que las trayectorias de las partículas que en el tiempo $t = 0$ se encuentran en el punto $(x0, y0, z0)$ está dada por la curva: $C : r_2(t) = (2t + x_0)\hat{\mathbf{\imath}} + (2t^3 + 3x_0t^2 + 3z_0t + y_0)\hat{\mathbf{\jmath}} + (2t^2 + 2x_0t + z_0)\hat{\mathbf{k}}$.

3. Dados los campos vectoriales siguientes:

   a) $\vec{F_1}(x,y) = y\hat{\mathbf{\imath}} - x\hat{\mathbf{\jmath}}$
   b) $\vec{F_2}(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}(y\hat{\mathbf{\imath}} + x\hat{\mathbf{\jmath}})$
   c) $\vec{F_3}(x,y) = xz\hat{\mathbf{\imath}} - 2z\hat{\mathbf{\jmath}}$
   d) $\vec{F_4}(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}\hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}$

   Hallar el dominio más amplio de cada uno de ellos y calcular la divergencia y el rotor. Indicar cuáles son solenoidales (eso significa $div(\vec{F}) = 0$ en todo su dominio) y cuáles son irrotacionales (eso significa $rot\vec{F} = 0$ en todo su dominio)

4. Sean f y g dos funciones escalares derivables y sea $\vec{F}$ es un campo vectorial derivable, probar las siguientes propiedades y expresarlas usando el operador nabla:
   a) $grad(f.g) = (grad(f)).g + f.(grad(g))$
   b) $div(f\vec{F}) = (grad(f)).F + f div(\vec{F})$
   c) $rot(f\vec{F}) = (grad(f)) \times \vec{F} + f rot(\vec{F})$
   d) $div(grad(f))$, esta expresión se denomina Laplaciano de f y se indica como $\vec{\nabla}^2(f)$

5. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial y f es una función escalar, determinar si cada una de las siguientes expresiones es un campo escalar, un campo vectorial o carece de sentido.

   a) $div(\vec{F})$
   b) $grad(\vec{F})$
   c) $rot(f)$
   d) $div(grad(f))$
   e) $rot(rot(\vec{F}))$
   f) $grad(div(f))$
   g) $rot(grad(f))$
   h) $grad(div\vec{F})$
   i) $div(div\vec{F})$
   j) $div(rot(grad(f)))$

Integrales de línea:

6. Calcular $\int_C f.dS$ en los siguientes casos:

   a) $f(x,y,z) = x + z$, $C : r(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} + 3t^3\hat{\mathbf{k}}$, con $0 < t < 1$

   b) $f(x,y,z) = 2x + 2y - 2z$, C es la intersección de $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$

   c) $(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$, $C : r(t) = 2\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + 2\sin(t)\hat{\mathbf{j}} + 2t\hat{\mathbf{k}}$, con $t \in [0, 2\pi]$

   d) Calcular las integrales anteriores cambiando la orientación de la curva C y verificar que: $\int_C f.dS = \int_{-C} f.dS$

7. Calcular usando integrales de línea el área de las superficies cilíndricas S que se dan a continuación:

   a) $S : x^2 + y^2 = 4$, limitada por $z = 0$, $x + 3z = 6$

   b) $S : x^2 = y$, limitada por $z = 0$, $2x + y + 3z = 6$

8. Hallar la masa del alambre $9(x - 5/2)^2 + 25y^2 = 225$ con $x \gg 0$ si su densidad en cada punto es $f(x,y) = x|y|$.

9. Hallar el momento de inercia respecto del eje z del alambre $r(t) = cos(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin t\hat{\mathbf{j}} + 2t\hat{\mathbf{k}}$, $t \in [0, 2\pi]$, sabiendo que la densidad en cada punto es $f(x,y,z) = z$

10. Calcular $\int_C \vec{F}.\vec{T}dS$ siendo:

    a) $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$ y $C : x^2 + y^2 = 4$ desde $(2,0)$ a $(0,2)$ en el primer cuadrante.

    b) $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + 2z\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}$ y C es el segmento que une $(0,0,0)$ con $(1,2,3)$

11. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + xz\hat{\mathbf{k}}$ para mover una partícula que se desplaza desde el punto **A**(0,1,2) hasta el punto **B**(1,1,3) siguiendo los siguientes caminos:

    a) El segmento que une **A** con **B**.

    b) La poligonal que une **A** con **C**(1,1,2) y este con **B**(1,1,3).

    c) La curva $r(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + (t3 + 2)\hat{\mathbf{k}}$ desde **A** hasta **B**.

    d) A partir de los resultados obtenidos, ¿puede decirse que el trabajo no depende del camino?