

Práctica 8: Integración (segunda parte)

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

Técnicas de integración

1. Encontrar las siguientes integrales:

- (a) $\int \cos(2x+3)dx$ (b) $\int \sin(x)\cos(x)dx$ (c) $\int e^{5x}dx$
(d) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ (e) $\int \tan(x)dx$ (f) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}dx$
(g) $\int \sin^3(x)\cos(x)dx$ (h) $\int \frac{x}{x+1}dx$ (i) $\int xe^{-x^2}dx$
(j) $\int x\cos(2x^2)dx$ (k) $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$ (l) $\int \sqrt[3]{9-x}dx$
(m) $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt$ (n) $\int t^3\sqrt{1-t^2}dt$ (ñ) $\int \frac{1}{1+4s^2}ds$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

- (a) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(2-x^2)^2}dx$.
(b) $\int_0^\pi e^{\sin(x)}\cos(x)dx$.
(c) $\int_0^1 e^x \ln(e^x+1)dx$.

3. Encontrar las siguientes integrales:

- (a) $\int x\sin(x)dx$ (b) $\int xe^{2x}dx$ (c) $\int x^2e^{2x}dx$
(d) $\int x^3\ln(x)dx$ (e) $\int \arccos(x)dx$ (f) $\int \arctan(x)dx$
(g) $\int x^3\cos(x^2)dx$ (h) $\int x^2\ln^2(x)dx$ (i) $\int x^3e^{-x^2}dx$
(j) $\int x^5\sqrt{1-x^2}dx$ (k) $\int \ln^2(x)dx$ (l) $\int x3^{x^2}dx$

4. (a) Probar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Sugerencia: utilizar las identidades trigonométricas $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ y $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

(b) Calcular las siguientes integrales:

- (i) $\int \sin^2(x)dx$
(ii) $\int \cos^2(x)dx$

5. Calcular $\int \sin^3(x)dx$.

Sugerencia: observar que

$$\sin^3(x) = \sin^2(x)\sin(x) = (1 - \cos^2(x))\sin(x) = \sin(x) - \cos^2(x)\sin(x).$$

6. Encontrar las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \int \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx \quad \text{(b)} \int \frac{x+2}{x^2+x} dx \quad \text{(c)} \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx \\ & \text{(d)} \int \frac{x^3}{x+3} dx \quad \text{(e)} \int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx \quad \text{(f)} \int \frac{x}{(x-1)^2} dx \\ & \text{(g)} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} dx \quad \text{(h)} \int \frac{1}{x^2(x+1)} dx \quad \text{(i)} \int \frac{1}{x^2+25} dx \\ & \text{(j)} \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx \quad \text{(k)} \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+16)} dx \quad \text{(l)} \int \frac{1}{e^u+1} du \end{aligned}$$

7. Sea $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f'(x) = \frac{1}{x \ln^3(x)}$. Determinar f sabiendo que $f(e) = \frac{1}{2}$.

8. Hallar las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \int \sin(\sqrt{x}) dx \quad \text{(b)} \int x^2 \arctan(x) dx \quad \text{(c)} \int x^3 e^{-x^2} dx \\ & \text{(d)} \int x e^{-\sqrt{x}} dx \quad \text{(e)} \int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx \quad \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx \\ & \text{(g)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \text{(h)} \int \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad \text{(i)} \int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx \\ & \text{(j)} \int \frac{\ln(x) \ln(\ln(x))}{x} dx \quad \text{(k)} \int e^{2x} \cos(e^x) dx \quad \text{(l)} \int \frac{x}{e^x} dx. \end{aligned}$$

Sólidos de revolución

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \geq 0$ en este intervalo. Si hacemos rotar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x , obtendremos un sólido cuyo volumen V se puede calcular por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

9. Probar que el volumen de una esfera de radio r está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Sugerencia: girar una semicircunferencia de radio r respecto a un eje coordenado. Recordar que la ecuación de la circunferencia de radio r centrada en el origen está dada por la fórmula $x^2 + y^2 = r^2$; en particular si consideramos la semicircunferencia que se halla sobre el eje de las x entonces tenemos que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde x pertenece al intervalo $[-r, r]$.

10. Rotando una recta que pase por el origen alrededor del eje x , probar que el volumen de un cono de altura h y radio de la base r está dado por la fórmula $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

11. Encontrar el volumen de revolución obtenido al rotar la curva dada por

$$y = \frac{1}{x^2}$$

alrededor del eje x , entre $x = 2$ y $x = B$, para cualquier número $B > 2$. ¿Tiende este volumen hacia algún límite cuando $B \rightarrow \infty$? Si es así, ¿cuál es el límite? Interpretar geoméricamente la situación.