

# El Juego de las Minorías desde una perspectiva diferente

Juan Pablo Barrangú

Laboratorio de Sistemas Complejos y Computación Cuántica (LSCCC)  
Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas en Electrónica (ICYTE),  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

20 de Agosto de 2019

# Juego de las Minorías (Minority Game)

## El problema del bar “El Farol”

N personas deciden independientemente cada semana si ir o no ir a un bar que ofrece música en vivo cierta noche. Como el espacio es limitado, el bar se disfruta solamente si no está demasiado lleno.



## Juego de las Minorías

En la versión clásica (local) es un juego con N jugadores sin comunicación entre ellos que deben seleccionar entre 2 opciones. Los jugadores que seleccionan la opción minoritaria ganan el juego y son recompensados con un pago (🎉), mientras que los otros no reciben nada (🙄). Todos ejecutan sus estrategias sin conocer la elección de los demás.

# Juego de las Minorías Cuántico

## Juego de las Minorías Cuántico

La versión cuántica del juego tiene las mismas reglas que la versión clásica pero debido a la no-localidad de la mecánica cuántica se obtienen resultados distintos. Con el uso de la no-localidad cuántica se logra una ventaja para los jugadores con respecto al caso clásico. En los juegos cuánticos estos efectos están relacionados al uso de estados entangled



# Relación entre No-localidad y Bell

## Bell

La medida de la no-localidad está dada por la desigualdad de Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH):

$$S = |\langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle|$$

En interacciones locales

$$S \leq 2$$

La mecánica cuántica como teoría no local está exenta de este límite, las mediciones de un estado entangled pueden satisfacer

$$S \leq 2\sqrt{2}$$

Esto significa que se viola la desigualdad de Bell, pero la mecánica cuántica respeta la relatividad especial que prohíbe la transferencia de información más rápido que la luz.

$A_0, A_1, B_0$  y  $B_1$  son mediciones locales del spin en Alice y Bob, respectivamente y  $\langle \rangle$  es el valor medio.

## Sistemas Supercuánticos

Popescu y Rohrlich probaron que es posible construir sistemas supercuánticos que son más no-locales que los modelos cuánticos con la introducción de los non-local boxes, o PR-Boxes, con los que se obtiene la máxima violación de la desigualdad de Bell, es decir,  $S = 4$ . Además respetan prohibición de transferencia de información a velocidad mayor que la de la luz.



$$X.Y = a \oplus b$$

# Juego de las Minorías Nlocal

## Relación entre la no-localidad y los juegos

Las ventajas de los juegos cuánticos sobre los clásicos y la relación entre la violación de las desigualdades de Bell y estos efectos en las versiones cuánticas, nos llevan a pensar qué efectos producirán los PR-Boxes sobre los juegos.

## Minority Game con PR-Boxes

Los  $N$  jugadores se relacionan mediante PR-Boxes satisfaciendo la ecuación

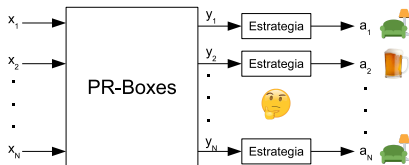
$$\prod_{i=1}^N x_i = \bigoplus_{i=1}^N y_i \quad (1)$$

donde  $x_i \in \{0, 1\}$  y  $y_i \in \{0, 1\}$  son las entradas y salidas de cada jugador a los PR-Boxes, respectivamente, por ejemplo, 0 es 🍷 y 1 es 🍺.

# Modelo de juego

## Juego de las Minorías con PR-Boxes

Cada jugador aplica una estrategia (🤔) a su salida de los PR-Boxes, obteniendo la acción a realizar, por ejemplo, ir al bar (🍺) o quedarse en casa (🏠).



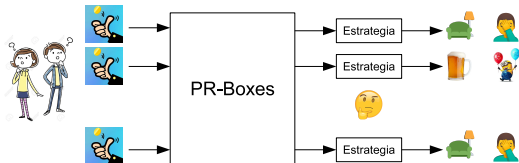
## Iteraciones

En el juego a una sola jugada no se registran mejoras cuando  $N$  es impar. En el modelo propuesto el juego se repite en forma iterativa  $k$  veces. Para el juego las acciones  $a_i$  de cada iteración serán las entradas  $x_i$  de los PR-Boxes de la siguiente iteración

# Modelo de juego

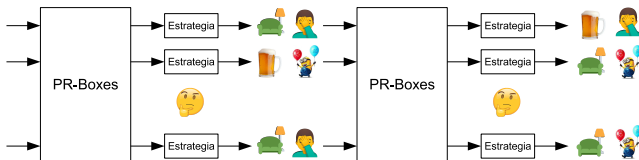
## Inicio del juego

Para iniciar el juego se deben generar valores iniciales



## Continuación del juego

Una vez desarrollada la primer jugada ya se puede continuar el juego





# Modelo con 3 jugadores

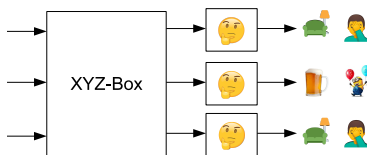
## 3 jugadores

3 es el menor número posible de jugadores para el juego de las minorías

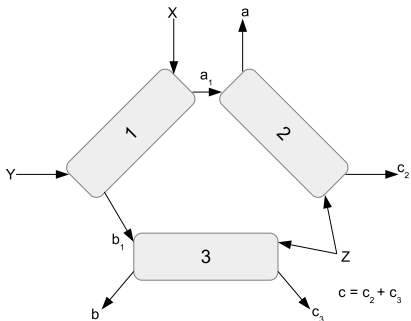


## Estrategias

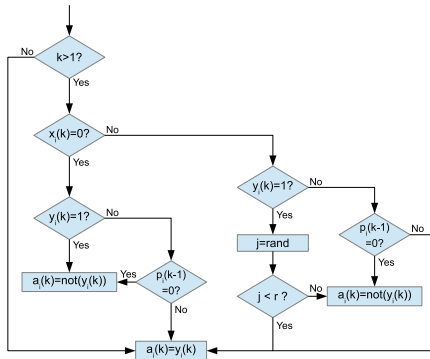
Se analizan las posibles combinaciones de entradas y salidas del XYZ-Box y se aplican las estrategias.



# Modelo con 3 jugadores



XYZ-Box



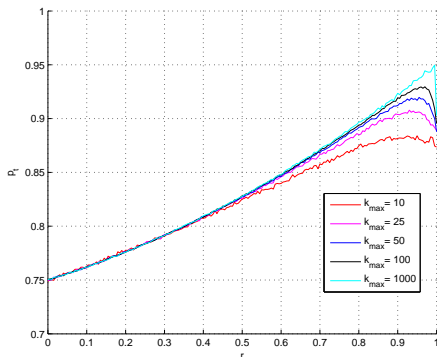
Estrategias

# Modelo con 3 jugadores

## Influencia de la estrategia en el resultado

Hay situaciones que ocurren con cierta probabilidad, por lo tanto una estrategia podría ser útil cuando se aplica en forma aleatoria, o solo en algunos casos.

Entonces se puede aplicar una estrategia con probabilidad  $r$  y otra con probabilidad  $1 - r$  para poder lograr un mejor resultado.



# Modelo con 4 jugadores

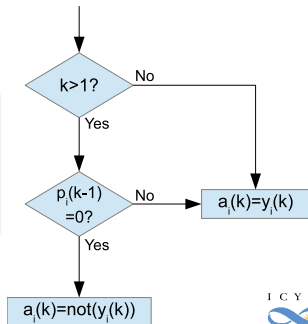
## 4 jugadores

Este es el caso más simple con un número par de jugadores. Ahora los jugadores no sólo tienen que evitar quedar en la mayoría, también el empate.



## Estrategias

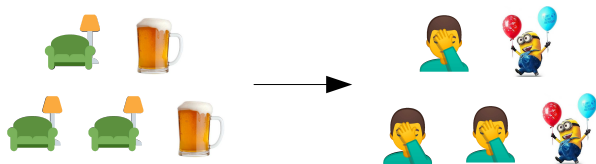
Las estrategias surgen de la misma forma que para 3 jugadores, pero quedando un diagrama más simple



# Modelo con $N$ jugadores

## $N$ jugadores

En el caso más general puede haber 2 o más jugadores en la minoría a diferencia de los anteriores. Cuando  $N$  es par los jugadores tienen que evitar también el empate. Los payoff se asignan del mismo modo y todos los que están en la minoría reciben un pago (🎈)



## Estrategias

Las estrategias surgen de la misma forma que para los casos anteriores. Para  $N$  impar queda un esquema similar al del caso de 3 jugadores, mientras que cuando  $N$  es par se usa el mismo que para 4 jugadores

# Resultados

## $N$ impar

Se obtienen mejoras en las probabilidades que haya algún jugador en minoría y que el jugador esté en la minoría  $P(\text{👤})$  con respecto a los casos clásico y cuántico. El juego de las minorías con PR-Boxes tiende a un equilibrio de Nash que no es óptimo de Pareto.

## $N$ par

Se obtienen los mismos resultados que en el caso cuántico y una notoria mejora con respecto al juego clásico. Además, se llega a un equilibrio de Nash que también es óptimo de Pareto.

$N$	Clásico	Cuántico	PR-Boxes
3	0,75	0,75	0,949*
4	0,5	1	1

\*Valor para 10000 iteraciones. Para  $k \rightarrow \infty \approx 0,952$

Valores de  $P_t$

$N$	Clásico	Cuántico	PR-Boxes
3	0,25	0,25	0,316*
4	0,125	0,25	0,25

Valores de  $P(\text{👤})$



*¡¡¡MUCHAS GRACIAS!!!*