

Medidas entrópicas y MaxEnt en modelos probabilísticos generalizados

Federico Holik



VI LoCIC
Universidad de Buenos Aires - 6/9/2018

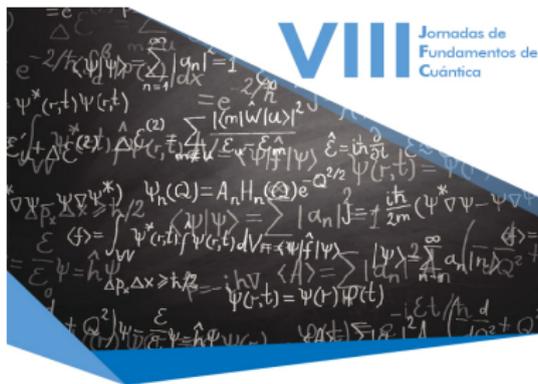
Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

VIII Jornadas de Fundamentos de Cuántica



VIII CONFERENCE ON QUANTUM FOUNDATIONS Quantum Logic & Quantum Structures

21-23
November 2018

UNIVERSIDAD CAECE
Av. de Mayo 866

Buenos Aires
Argentina

INVITED SPEAKERS

- ▶ **Dennis Dieks**, Utrecht University, The Netherlands
- ▶ **Roberto Giuntini**, Università di Cagliari, Italy
- ▶ **Pedro Walter Lambert**, FAMAF-CONICET, Argentina
- ▶ **Ana Majtey**, FAMAF-CONICET, Argentina
- ▶ **Angel Luis Plastino**, CONICET, Argentina
- ▶ **Karl Svozil**, Vienna University of Technology, Austria
- ▶ **Steeve Zozor**, Gipsa-Lab/ONRS, France
- ▶ **Fabrizio Toscano**, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil

ORGANIZING COMMITTEE

Gustavo Martin Bosyk, IFILP/CONICET | **Gabriel Catren**, CAECE/ONRS | **Sebastian Fortin**, UBA/CONICET
Federico Holik, IFILP/CONICET | **Olimpia Lombardi**, UBA/CONICET





an Open Access Journal by MDPI



Foundations of Quantum Computing

Guest Editors:

Dr. Gustavo M. Bosyk
gbosyk@fisica.unip.edu.ar

Dr. Alejandro Díaz-Caro
adiacaro@cc.fcen.uba.ar

Dr. Federico Holik
holik@fisica.unip.edu.ar

Dr. Benoît Valliron
benoit.valliron@li.fr

Deadline for manuscript
submissions:

1 April 2019

Message from the Guest Editors

The advent of quantum information theory and the possibility of developing quantum computers gave rise to a rich and multidisciplinary field of research, gathering experts from physics, computer science, mathematics and logic. This peer-reviewed Special Issue is focused in both, the mathematical and physical foundations of quantum computing. Researchers are welcome to present their original and recent developments, as well as review papers, on the topics listed below.

- Foundations of Quantum Computing
- Quantum Information Theory
- Quantum Algorithms
- Computational Logic
- Mathematical Logic
- Lambda Calculus and Type Theory
- Logical Frameworks
- Domain Theory and Categorical Models
- Quantum Communication
- Quantum Correlations
- Uncertainty relations
- Violation of Bell Inequalities
- Decoherence and Classical Limit
- Quantum Contextuality
- Quantum Logic



mdpi.com/s/18281

Special Issue

Curso de Posgrado 2018



Facultad de Ciencias Exactas | UNLP

Tópicos avanzados de información y fundamentos de cuántica

Contenidos:

- Elementos introductorios a la teoría de la información
- Nociones y fundamentos de física cuántica
- Teoría de la información cuántica
- Geometría de la información en sistemas cuánticos
- Teoría de la mayorización y sus aplicaciones en problemas de información cuántica
- Entrelazamiento e información cuántica en sistemas cuánticos de variables continuas

Cronograma:

El curso se dictará con carácter semi-intensivo en Noviembre y Diciembre 2018, en días y horarios a convenir.

Docentes:

- Mariela Portesi (Responsable)
- Gustavo Bosyk (IFLP)
- Federico Holik (IFLP)
- Pedro Lamberti (FaMAF)
- Fabricio Toscano (UFRJ)
- Steeve Zozor (CNRS)

Dirigido a:

Estudiantes de posgrado, alumnos de grado avanzados de las licenciaturas en Física y en Matemática, y de carreras afines.

Duración:

Duración total 32 horas, y otorga dos créditos para el Doctorado en la Facultad de Ciencias Exactas, UNLP (Resolución 1243/2018).

Contacto e inscripciones:

<https://sites.google.com/view/infocuanticalp>
infoCuanticalP@gmail.com

Trabajos con...

- Guido Bellomo (IFLP)
- Gustavo Bosyk (UBA)
- Pedro Walter Lamberti (FAMAF)
- Cesar Massri (UBA)
- Angel Plastino (IFLP)
- Mariela Portesi (IFLP)
- Manuel Sáenz (UBA)
- Steeve Zozor (GIPSA-LAB)

Por las dudas...

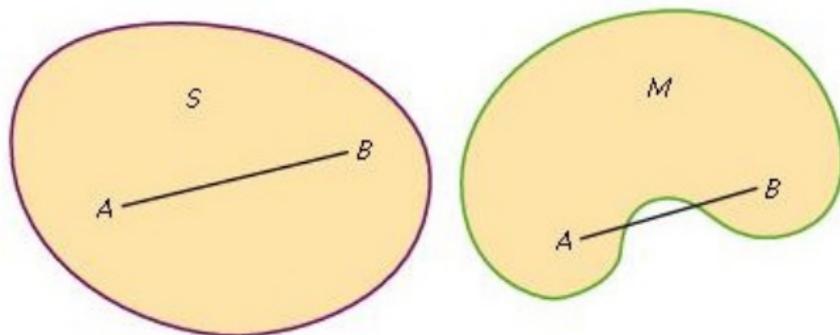


Figure: S es convexo pero M no.

Experimento con dos resultados posibles

$$\{x, y\}$$

$$0 \leq p_x, p_y \leq 1$$

$$p_x + p_y = 1$$

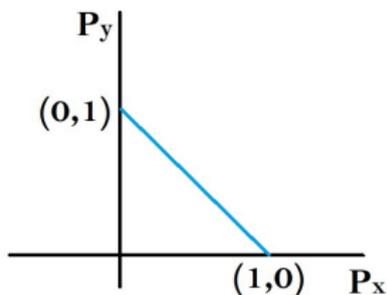


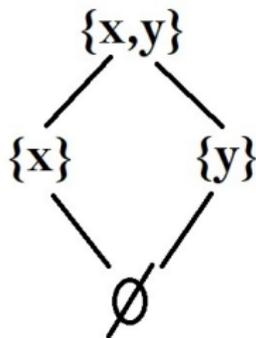
Figure: Convexo de probabilidades para dos resultados posibles.

Experimento con dos resultados posibles

$$\{x, y\}$$

$$0 \leq p_x, p_y \leq 1$$

$$p_x = 1 - p_y$$



Estados distintos

Estados distintos

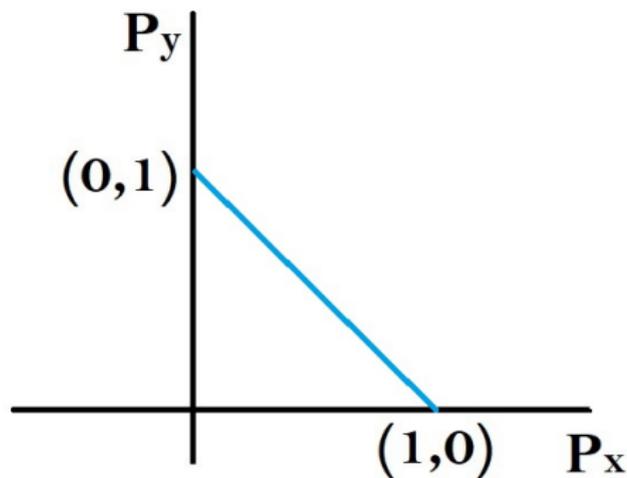


Figure: Estados son de la forma $(p_x, p_y) = p_x(1, 0) + p_y(0, 1)$.

Estados distintos

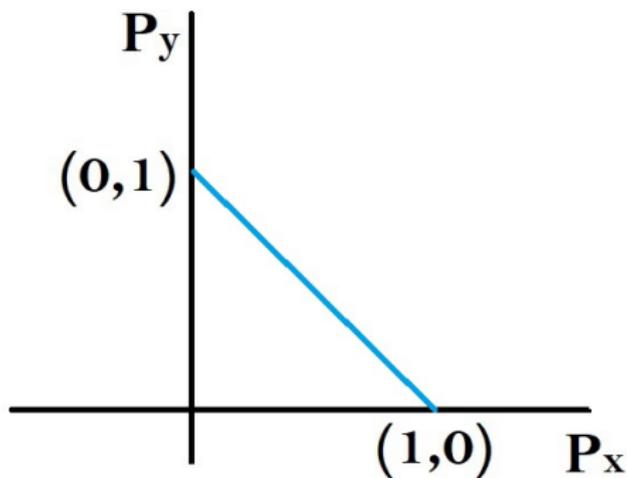


Figure: Estados son de la forma $(p_x, p_y) = p_x(1, 0) + p_y(0, 1)$.

Estados distintos

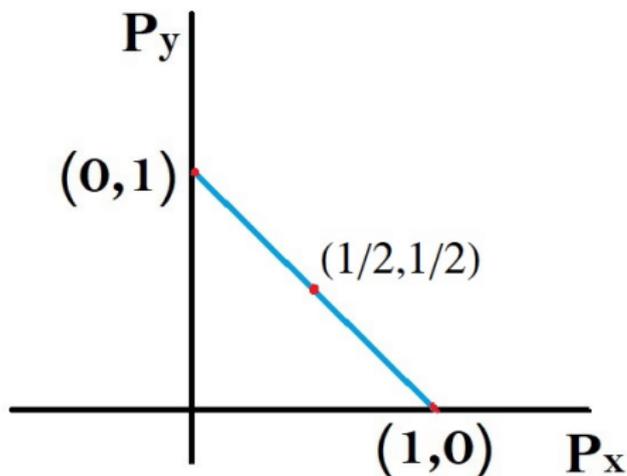


Figure: Estados son de la forma $(p_x, p_y) = p_x(1, 0) + p_y(0, 1)$.

Estados distintos

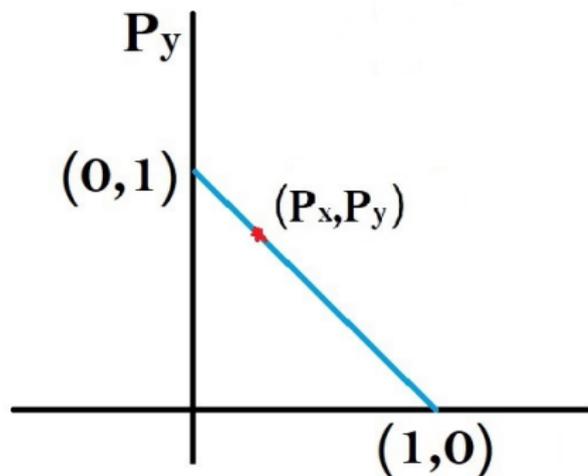


Figure: Estados son de la forma $(p_x, p_y) = p_x(1, 0) + p_y(0, 1)$.

Experimento con tres resultados posibles

$$\{x, y, z\}$$

$$0 \leq p_x, p_y, p_z \leq 1$$

$$p_x + p_y + p_z = 1$$

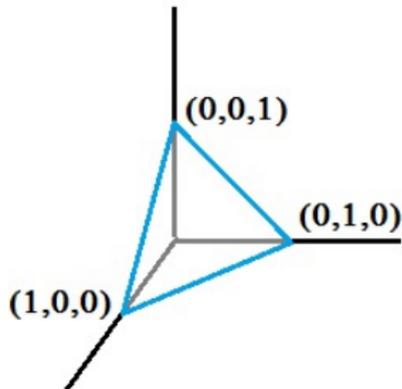


Figure: Convexo de probabilidades para tres resultados posibles

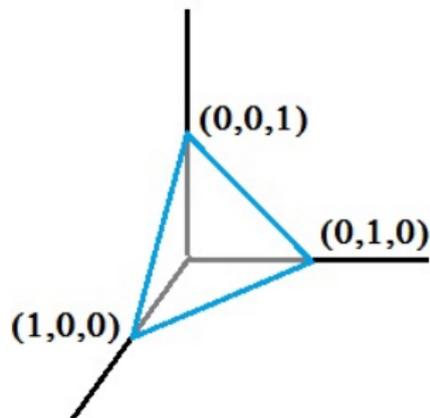


Figure: Las distintas caras del convexo.

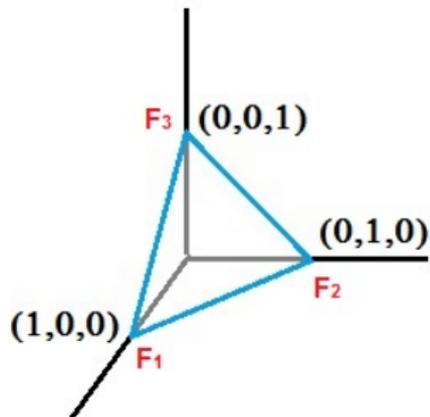


Figure: Las distintas caras del convexo.

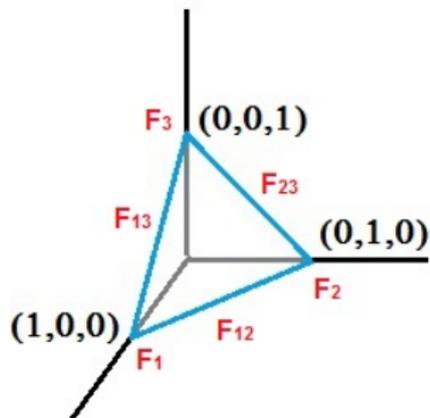


Figure: Las distintas caras del convexo.

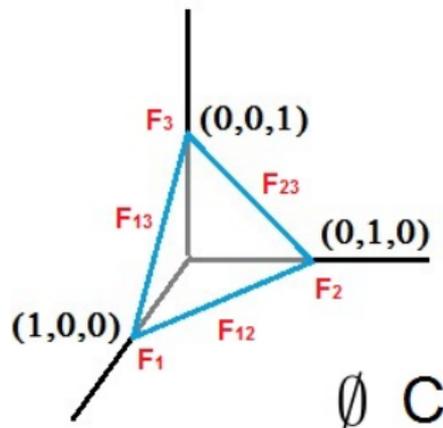


Figure: Las distintas caras del convexo.

Las álgebras son las mismas

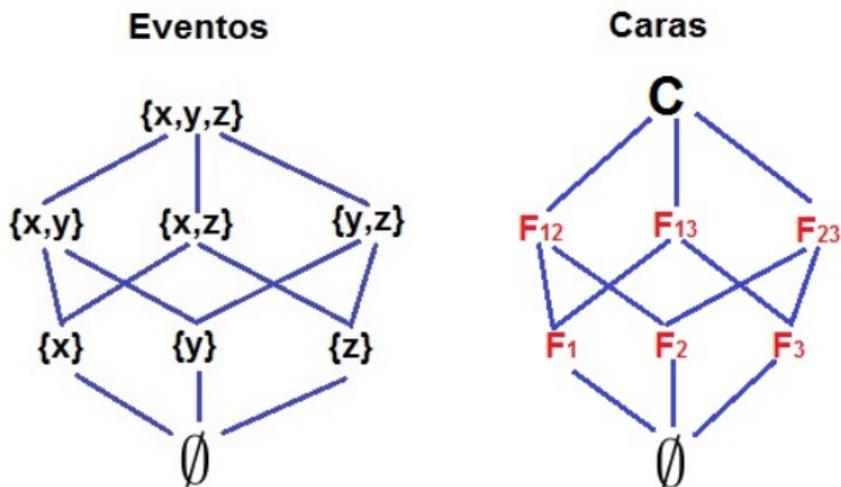


Figure: El algebra de Boole de los eventos es la misma que la de las caras.

Convexo de estados cuánticos

Convexo de estados cuánticos

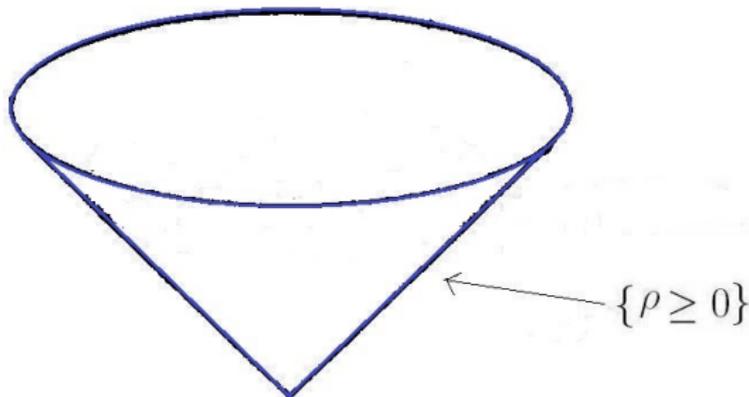


Figure: Representación geométrica del convexo de estados.

Convexo de estados cuánticos

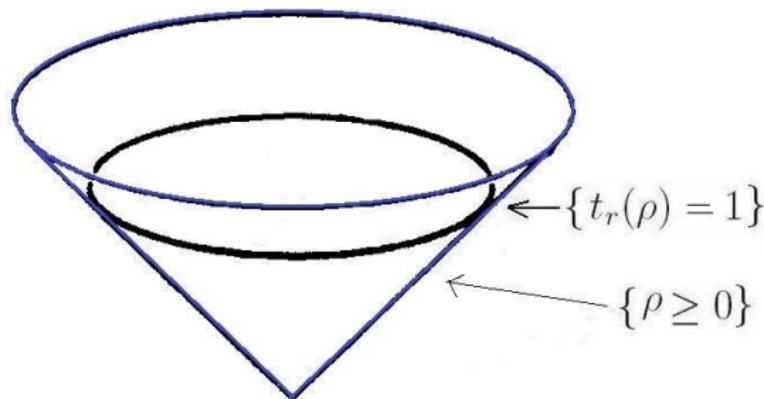


Figure: Representación geométrica del convexo de estados.

Convexo de estados cuánticos

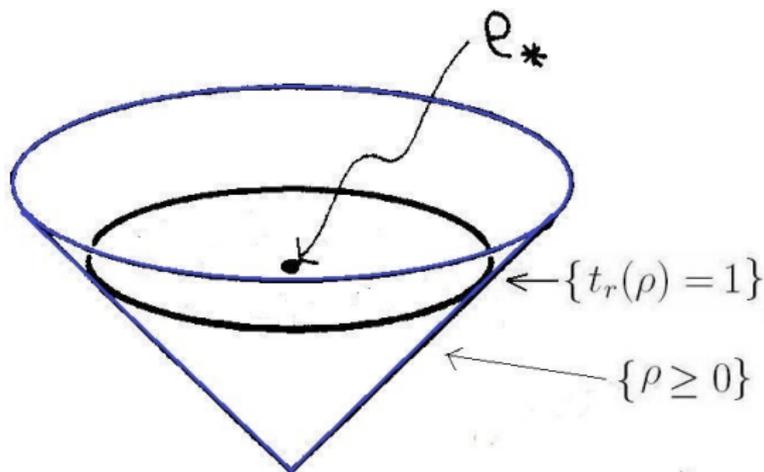


Figure: Representación geométrica del convexo de estados.

Convexo de estados cuánticos

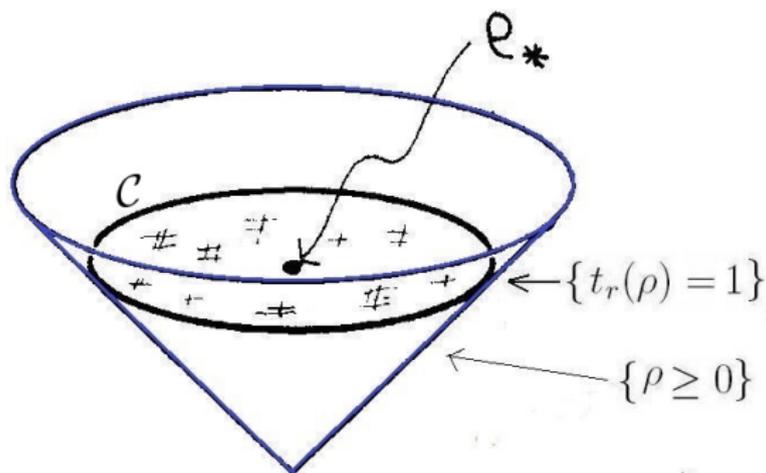


Figure: Representación geométrica del convexo de estados.

Estados separables

- $\rho_{Sep} = \sum_{ij} \lambda_{ij} \rho_i^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}$ (tales que $\sum_{ij} \lambda_{ij} = 1$ y $\lambda_{ij} \geq 0$)
- $\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \rho \text{ es separable}\}$
- $\mathcal{E}(\mathcal{H}) := \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}(\mathcal{H})$

Entrelazamiento

Los estados que no son separables se dicen **entrelazados**.

Estados separables

- $\rho_{Sep} = \sum_{ij} \lambda_{ij} \rho_i^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}$ (tales que $\sum_{ij} \lambda_{ij} = 1$ y $\lambda_{ij} \geq 0$)
- $\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \rho \text{ es separable}\}$
- $\mathcal{E}(\mathcal{H}) := \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}(\mathcal{H})$

Entrelazamiento

Los estados que no son separables se dicen **entrelazados**.

Estados separables

- $\rho_{Sep} = \sum_{ij} \lambda_{ij} \rho_i^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}$ (tales que $\sum_{ij} \lambda_{ij} = 1$ y $\lambda_{ij} \geq 0$)
- $\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \rho \text{ es separable}\}$
- $\mathcal{E}(\mathcal{H}) := \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}(\mathcal{H})$

Entrelazamiento

Los estados que no son separables se dicen **entrelazados**.

Representación geométrica

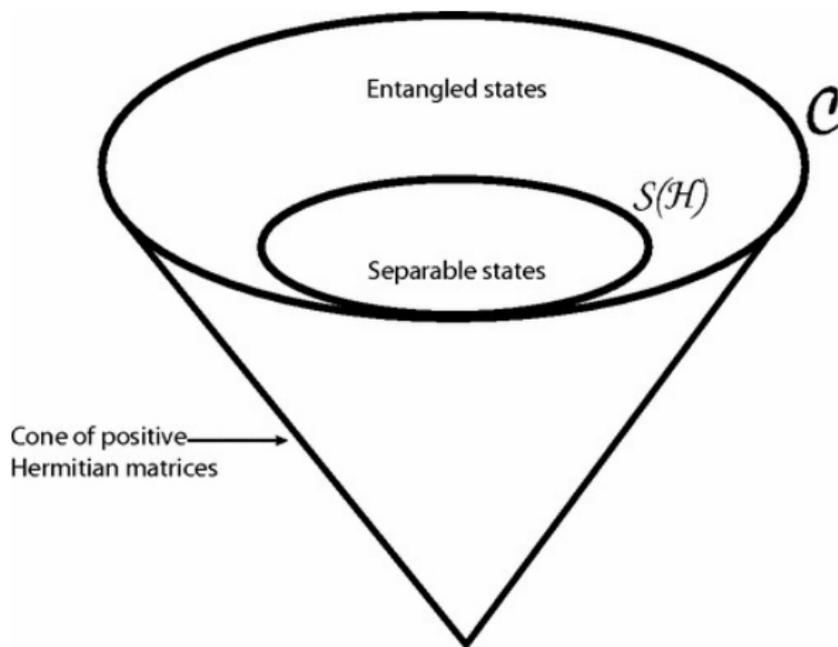


Figure: Representación geométrica de C .

Partial Boolean algebras

- An orthomodular lattice \mathcal{L} can be described as a pasting of Boolean algebras:

$$\mathcal{L} = \bigvee_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathcal{B}$$

(where \mathfrak{B} is the set of maximal Boolean algebras of \mathcal{L}).

- A state s of \mathcal{L} defines a classical probability on each classical Boolean subalgebra \mathcal{B} . In other words: $s_{\mathcal{B}}(\dots) := s|_{\mathcal{B}}(\dots)$ is a Kolmogorovian measure over \mathcal{B} .

Partial Boolean algebras

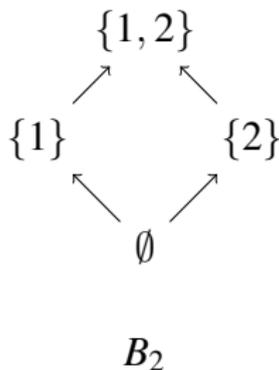
- An orthomodular lattice \mathcal{L} can be described as a pasting of Boolean algebras:

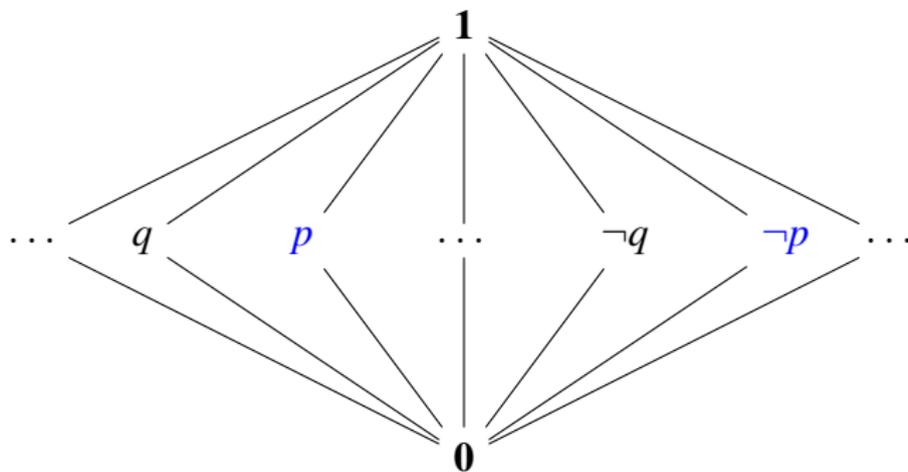
$$\mathcal{L} = \bigvee_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathcal{B}$$

(where \mathfrak{B} is the set of maximal Boolean algebras of \mathcal{L}).

- A state s of \mathcal{L} defines a classical probability on each classical Boolean subalgebra \mathcal{B} . In other words: $s_{\mathcal{B}}(\dots) := s|_{\mathcal{B}}(\dots)$ is a Kolmogorovian measure over \mathcal{B} .

Figure: Diagrama de Hasse de \mathcal{B}_2



$\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 

Examples: Q-trit

Qtrit

- $\mathcal{P}(\mathbb{C}^3) \implies$
 $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Given $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ and $|\varphi_3\rangle \implies$

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}\}$$

$$P_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \ (i = 1, 2, 3) \text{ and } P_{ij} := |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| + |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \ (i, j = 1, 2, 3).$$

Examples: Q-trit

Qtrit

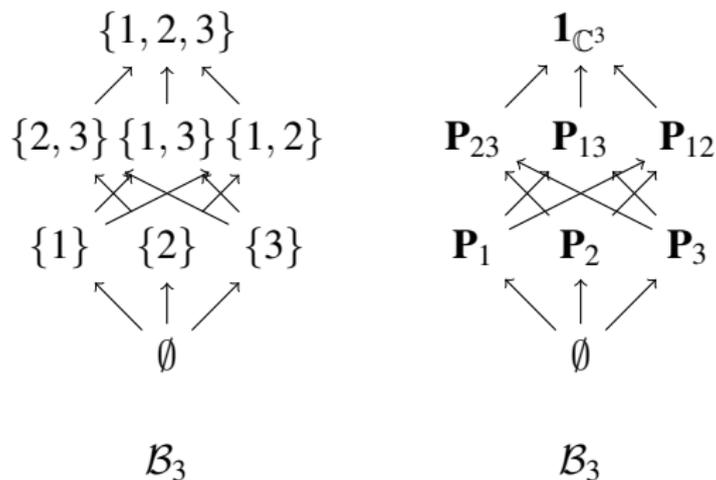
- $\mathcal{P}(\mathbb{C}^3) \implies$
 $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Given $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ and $|\varphi_3\rangle \implies$

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}\}$$

$$P_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \ (i = 1, 2, 3) \text{ and } P_{ij} := |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| + |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \ (i, j = 1, 2, 3).$$

Boolean subalgebras of a qutrit:

Figure: Maximal Boolean Subalgebras in \mathbb{C}^3



Axiomas de Kolmogorov

Medidas de probabilidad

$$\mu : \Sigma \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

tales que:

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$
- 2 $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$
- 3 Para cualquier familia numerable de conjuntos disjuntos de a pares $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

Caso clásico

$\sigma : \Gamma \rightarrow [0; 1]$, tal que $\int_{\Gamma} \sigma(p, q) d^3 p d^3 q = 1$.
 $\langle F \rangle = \int_{\Gamma} F(p, q) \sigma(p, q) d^3 p d^3 q$

[F. Holik, A. Plastino and M. Sáenz, *Annals Of Physics*, Volume **340**, Issue **1**,

202-210 (2014)]

Probabilidad cuántica (regla Born)

Medidas de probabilidad

$$s : \mathcal{L}_{\mathcal{V}\mathcal{N}} \longrightarrow [0; 1] \quad (2)$$

tal que:

- 1 $s(\mathbf{0}) = 0$ ($\mathbf{0}$ es el subespacio nulo).
- 2 $s(P^\perp) = \mathbf{1} - s(P)$
- 3 Para cualquier familia numerable de proyectores ortogonales de a pares (P_j) , $s(\sum_j P_j) = \sum_j s(P_j)$

Teorema (Gleason)

$$s_\rho(P) = \text{tr}(\rho P) \quad (3)$$

Probabilidad cuántica (regla Born)

Medidas de probabilidad

$$s : \mathcal{L}_{\mathcal{V}\mathcal{N}} \longrightarrow [0; 1] \quad (2)$$

tal que:

- 1 $s(\mathbf{0}) = 0$ ($\mathbf{0}$ es el subespacio nulo).
- 2 $s(P^\perp) = \mathbf{1} - s(P)$
- 3 Para cualquier familia numerable de proyectores ortogonales de a pares (P_j) , $s(\sum_j P_j) = \sum_j s(P_j)$

Teorema (Gleason)

El teorema de Gleason garantiza que existe un operador densidad para cada una de estas medidas (para $\dim(\mathcal{H}) \geq 3$).

Probabilidad cuántica (regla Born)

Medidas de probabilidad

$$s : \mathcal{L}_{\mathcal{V}\mathcal{N}} \longrightarrow [0; 1] \quad (2)$$

tal que:

- 1 $s(\mathbf{0}) = 0$ ($\mathbf{0}$ es el subespacio nulo).
- 2 $s(P^\perp) = \mathbf{1} - s(P)$
- 3 Para cualquier familia numerable de proyectores ortogonales de a pares (P_j) , $s(\sum_j P_j) = \sum_j s(P_j)$

Caso clásico

$$\sigma : \Gamma \longrightarrow [0; 1]$$

tal que $\int_{\Gamma} \sigma(p, q) d^3 p d^3 q = 1$. Probabilidad de un evento X :

$$p(X \subseteq \Gamma) = \int_X \sigma(p, q) d^3 p d^3 q.$$

Pero la historia sigue...

- En una serie de artículos Murray y von Neumann buscaron álgebras más generales que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- Hoy se conocen como álgebras de von Neumann, y se pueden descomponer en factores del Tipo I, Tipo II y Tipo III.
- La mecánica cuántica standard (no relativista) se puede describir con los Factores de Tipo I.
- Pero cuando el número de grados de libertad se hace infinito, pueden aparecer factores del tipo II y III.

Pero la historia sigue...

- En una serie de artículos Murray y von Neumann buscaron álgebras más generales que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- Hoy se conocen como álgebras de von Neumann, y se pueden descomponer en factores del Tipo I, Tipo II y Tipo III.
- La mecánica cuántica standard (no relativista) se puede describir con los Factores de Tipo I.
- Pero cuando el número de grados de libertad se hace infinito, pueden aparecer factores del tipo II y III.

Pero la historia sigue...

- En una serie de artículos Murray y von Neumann buscaron álgebras más generales que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- Hoy se conocen como álgebras de von Neumann, y se pueden descomponer en factores del Tipo I, Tipo II y Tipo III.
- La mecánica cuántica standard (no relativista) se puede describir con los Factores de Tipo I.
- Pero cuando el número de grados de libertad se hace infinito, pueden aparecer factores del tipo II y III.

Pero la historia sigue...

- En una serie de artículos Murray y von Neumann buscaron álgebras más generales que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- Hoy se conocen como álgebras de von Neumann, y se pueden descomponer en factores del Tipo I, Tipo II y Tipo III.
- La mecánica cuántica standard (no relativista) se puede describir con los Factores de Tipo I.
- Pero cuando el número de grados de libertad se hace infinito, pueden aparecer factores del tipo II y III.

En general

Entonces, los estados de teorías probabilísticas generales, se pueden escribir como medidas:

Sea \mathcal{L} un retículo ortomodular. Luego, definimos:

$$s : \mathcal{L} \rightarrow [0; 1],$$

tal que:

$$s(\mathbf{0}) = 0. \tag{4}$$

$$s(E^\perp) = 1 - s(E),$$

y para toda familia numerable y ortogonal de proyectores E_j :

$$s\left(\sum_j E_j\right) = \sum_j s(E_j).$$

donde \mathcal{L} es un retículo ortomodular general (con $\mathcal{L} = \Sigma$ y $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathcal{H})$ para los casos Kolmogoroviano y cuántico, respectivamente).

Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

Modelos generales

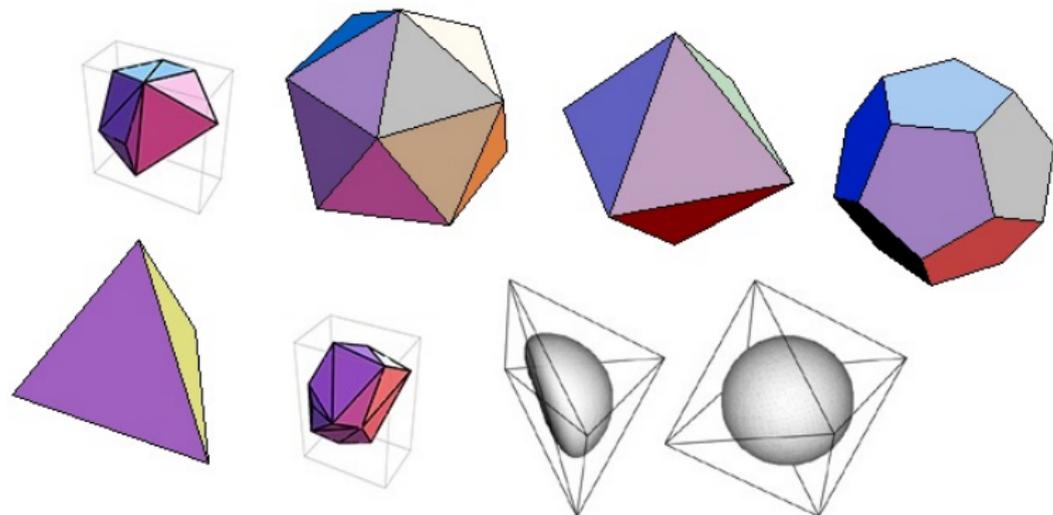


Figure: Un modelo arbitrario va a estar representado por un conjunto convexo. Cada punto del convexo representa una distribución de probabilidad (generalizada).

¡No todo modelo es un politopo!

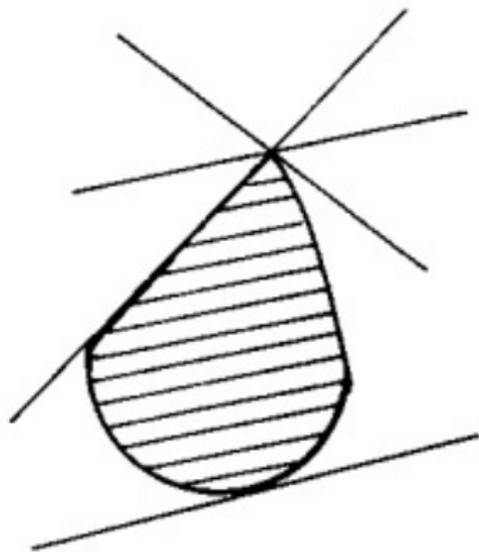


Figure: No todo modelo va a ser un politopo. En particular, **el convexo de estados cuánticos no es un politopo.**

Caras y puntos extremos

Caras y puntos extremos

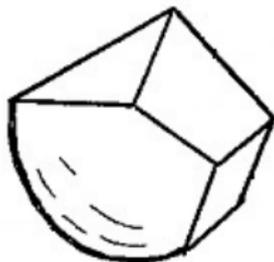


Figure: Caras y puntos extremos de un conjunto convexo.

Caras y puntos extremos

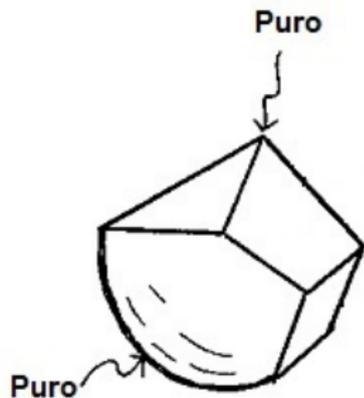


Figure: Caras y puntos extremos de un conjunto convexo.

Caras y puntos extremos

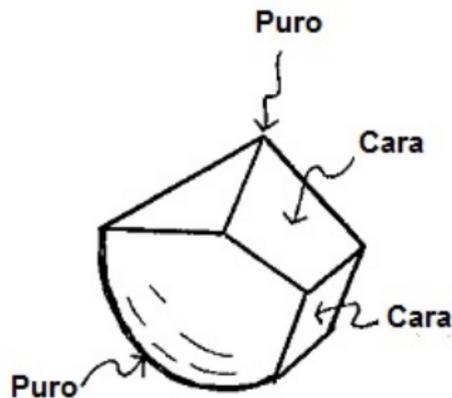


Figure: Caras y puntos extremos de un conjunto convexo.

Tres modelos importantes

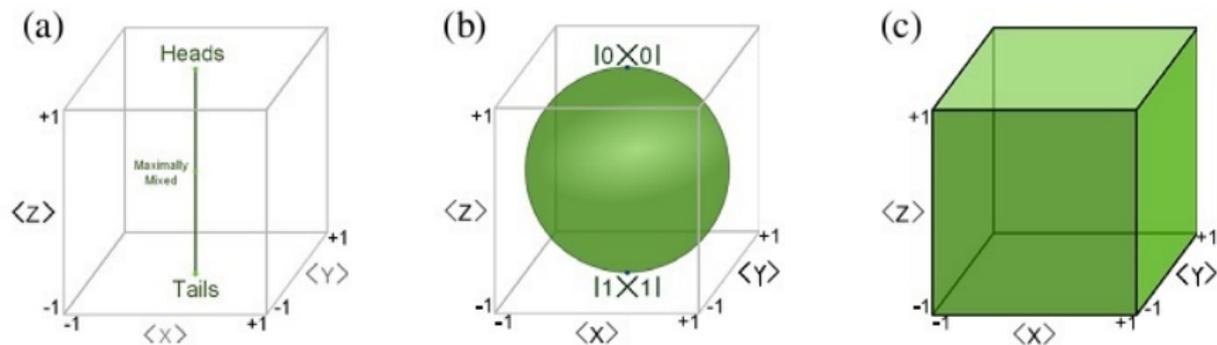


Figure: (a) Bit, (b) qbit y (c) gbit.

En general...

Supongamos que tenemos una teoría estadística cuyo espacio de estados es representado por un conjunto de estados Ω .

Propiedades de Ω

- No se pierde generalidad si se postula que Ω es convexo.
- Sea $V_+(\Omega)$ el cono positivo definido por Ω ($V_+(\Omega) \subseteq V(\Omega)$).
- $u_\Omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Omega$ (es la generalización de la traza).
- Tenemos un triplete (V, V^*, u_Ω) .

Teoría clásica

Lo que caracteriza a una teoría como clásica es que cada estado no puro tiene una única descomposición convexa en estados puros, mientras que esto ya no es cierto en el caso cuántico.

En general...

Supongamos que tenemos una teoría estadística cuyo espacio de estados es representado por un conjunto de estados Ω .

Propiedades de Ω

- No se pierde generalidad si se postula que Ω es convexo.
- Sea $V_+(\Omega)$ el cono positivo definido por Ω ($V_+(\Omega) \subseteq V(\Omega)$).
- $u_\Omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Omega$ (es la generalización de la traza).
- Tenemos un triplete (V, V^*, u_Ω) .

Teoría clásica

Lo que caracteriza a una teoría como clásica es que cada estado no puro tiene una única descomposición convexa en estados puros, mientras que esto ya no es cierto en el caso cuántico.

En general...

Supongamos que tenemos una teoría estadística cuyo espacio de estados es representado por un conjunto de estados Ω .

Propiedades de Ω

- No se pierde generalidad si se postula que Ω es convexo.
- Sea $V_+(\Omega)$ el cono positivo definido por Ω ($V_+(\Omega) \subseteq V(\Omega)$).
- $u_\Omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Omega$ (es la generalización de la traza).
- Tenemos un triplete (V, V^*, u_Ω) .

Teoría clásica

Lo que caracteriza a una teoría como clásica es que cada estado no puro tiene una única descomposición convexa en estados puros, mientras que esto ya no es cierto en el caso cuántico.

En general...

Supongamos que tenemos una teoría estadística cuyo espacio de estados es representado por un conjunto de estados Ω .

Propiedades de Ω

- No se pierde generalidad si se postula que Ω es convexo.
- Sea $V_+(\Omega)$ el cono positivo definido por Ω ($V_+(\Omega) \subseteq V(\Omega)$).
- $u_\Omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Omega$ (es la generalización de la traza).
- Tenemos un triplete (V, V^*, u_Ω) .

Teoría clásica

Lo que caracteriza a una teoría como clásica es que cada estado no puro tiene una única descomposición convexa en estados puros, mientras que esto ya no es cierto en el caso cuántico.

En general...

Supongamos que tenemos una teoría estadística cuyo espacio de estados es representado por un conjunto de estados Ω .

Propiedades de Ω

- No se pierde generalidad si se postula que Ω es convexo.
- Sea $V_+(\Omega)$ el cono positivo definido por Ω ($V_+(\Omega) \subseteq V(\Omega)$).
- $u_\Omega(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Omega$ (es la generalización de la traza).
- Tenemos un triplete (V, V^*, u_Ω) .

Teoría clásica

Lo que caracteriza a una teoría como clásica es que cada estado no puro tiene una única descomposición convexa en estados puros, mientras que esto ya no es cierto en el caso cuántico.

Probabilidad de un efecto

Para cada $\alpha \in \Omega$ y $a \in V(\Omega)^*$, $a(\alpha) \in [0, 1]$ define la probabilidad de observar el efecto representado por a dado el estado α .

Observación

De este modo, podemos representar teorías estadísticas muy generales, donde la información de la teoría está contenida en la geometría del convexo (y sus funcionales).

[Barnum, J. Barrett, M. Leifer and A. Wilce, *Physical Review Letters*, **99** 240501 (2007)]

[F. Holik, C. Massri and A. Plastino, *SOP Transactions on Theoretical Physics*, Volume **1**, Number 2, pp.138-153, (2014)]

Probabilidad de un efecto

Para cada $\alpha \in \Omega$ y $a \in V(\Omega)^*$, $a(\alpha) \in [0, 1]$ define la probabilidad de observar el efecto representado por a dado el estado α .

Observación

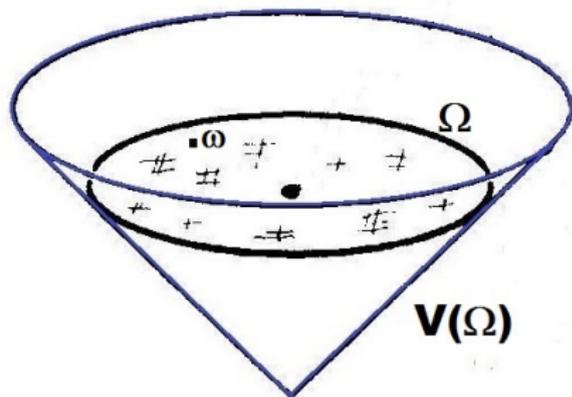
De este modo, podemos representar teorías estadísticas muy generales, donde la información de la teoría está contenida en la geometría del convexo (y sus funcionales).

[Barnum, J. Barrett, M. Leifer and A. Wilce, *Physical Review Letters*, **99** 240501 (2007)]

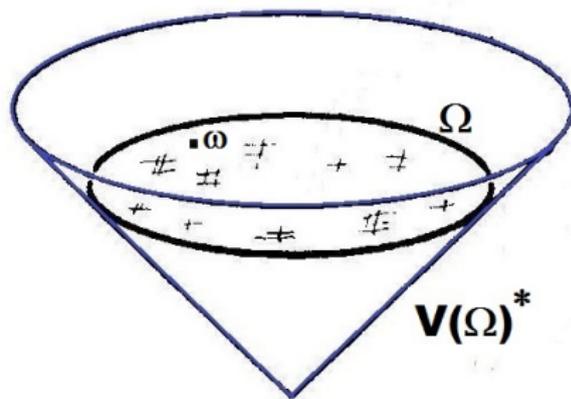
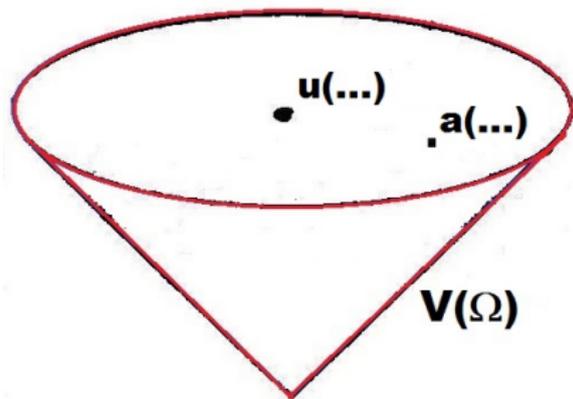
[F. Holik, C. Massri and A. Plastino, *SOP Transactions on Theoretical Physics*, Volume **1**, Number 2, pp.138-153, (2014)]

Los efectos definen funcionales lineales y positivas.

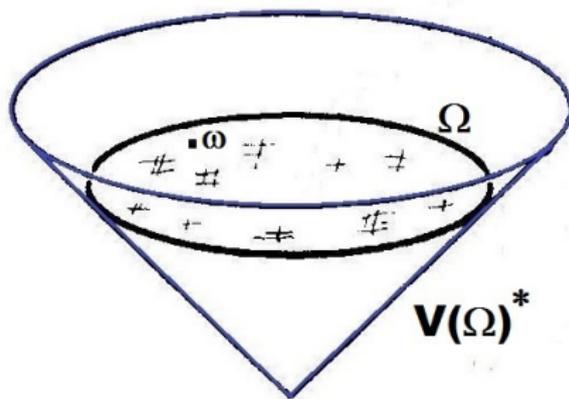
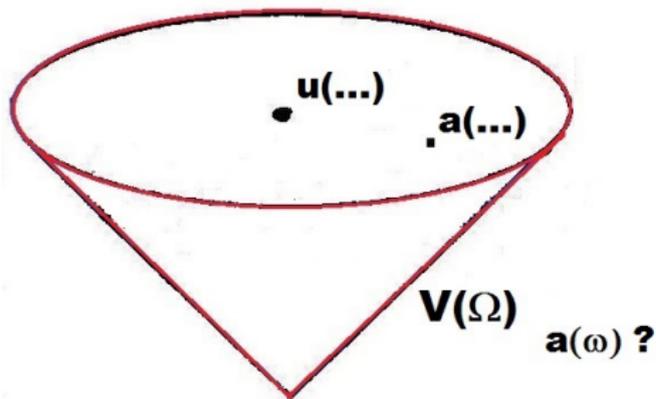
Los efectos definen funcionales lineales y positivas.



Los efectos definen funcionales lineales y positivas.



Los efectos definen funcionales lineales y positivas.



Los efectos definen funcionales lineales y positivos.

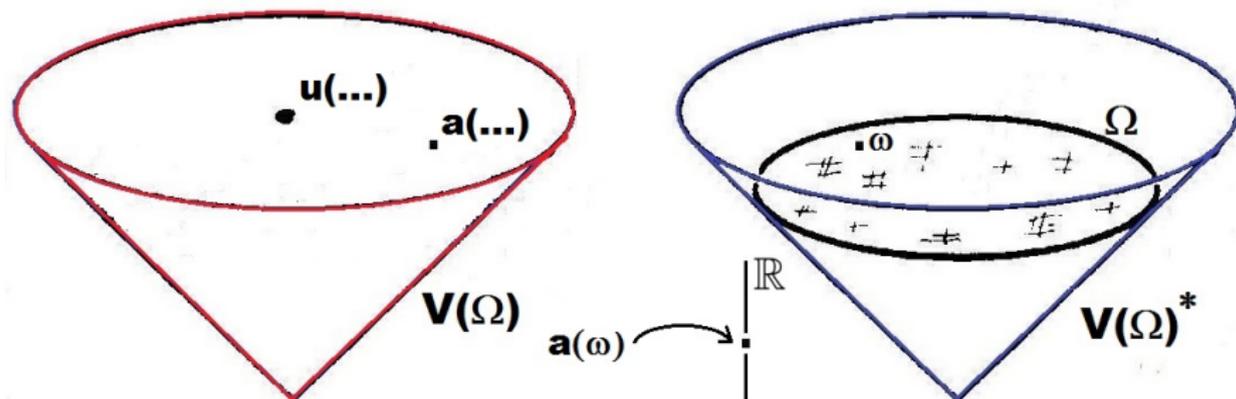


Figure: $a(\omega) \in [0, 1]$.

Los efectos definen funcionales lineales y positivos.

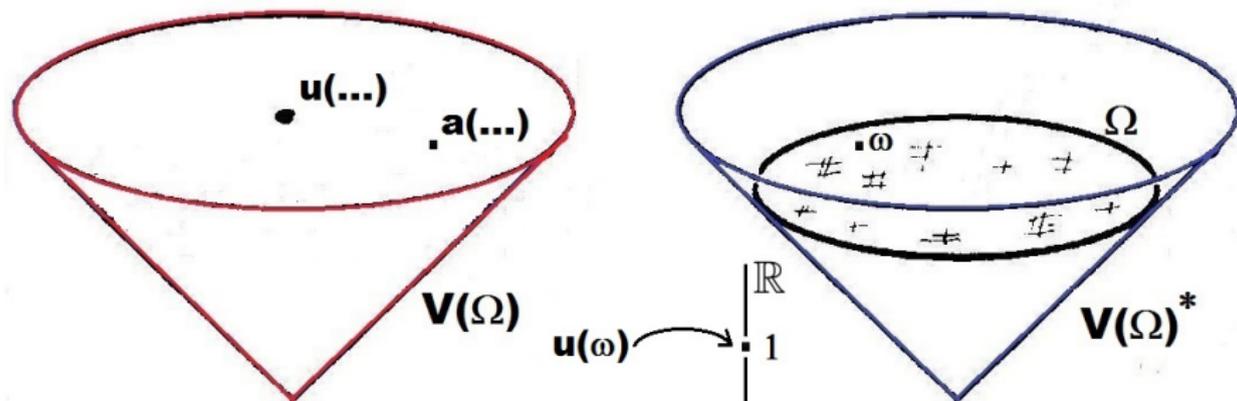


Figure: $u(\omega) = 1$ ($\forall \omega$).

Alice y Bob comparten cosas...

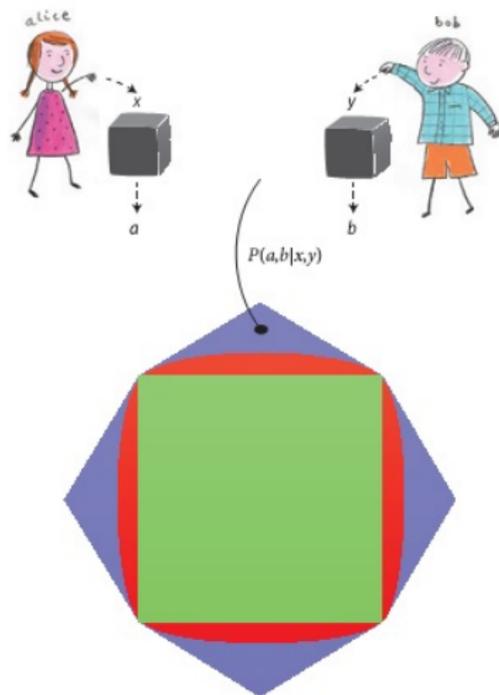


Figure: Alice y Bob miden observables X e Y .

La física de las correlaciones será descrita por:

$$P(a, b|x, y) \quad (5)$$

Figura geométrica: un politopo

Estas probabilidades se pueden ver como un punto en un espacio n -dimensional (en este caso, 16 dimensiones, todas las posibles combinaciones de $a, b, x, y = 0, 1$).

La física de las correlaciones será descrita por:

$$P(a, b|x, y) \quad (5)$$

Figura geométrica: un politopo

Estas probabilidades se pueden ver como un punto en un espacio n -dimensional (en este caso, 16 dimensiones, todas las posibles combinaciones de $a, b, x, y = 0, 1$).

Normalización

Todas las posibles correlaciones definen un politopo, la intersección de el hipercubo definido por las desigualdades lineales

$$0 \leq P(a, b|x, y) \leq 1 \quad (6)$$

y los hiperplanos que se corresponden con la normalización

$$\sum_{a,b} P(a, b|x, y) = 1 \quad (7)$$

Condición no signal

No hay acción instantánea:

$$\sum_b P(a, b|x, y) = \sum_b P(a, b|x, y') \quad \forall y, y' \quad (8a)$$

$$\sum_a P(a, b|x, y) = \sum_a P(a, b|x', y) \quad \forall y, y' \quad (8b)$$

No-signal

Estas condiciones definen hiperplanos; la intersección de estos hiperplanos con el politopo de todas las correlaciones define una región que es el **politopo no-signal**.

Condición no signal

No hay acción instantánea:

$$\sum_b P(a, b|x, y) = \sum_b P(a, b|x, y') \quad \forall y, y' \quad (8a)$$

$$\sum_a P(a, b|x, y) = \sum_a P(a, b|x', y) \quad \forall y, y' \quad (8b)$$

No-signal

Estas condiciones definen hiperplanos; la intersección de estos hiperplanos con el politopo de todas las correlaciones define una región que es el **politopo no-signal**.

Representación geométrica

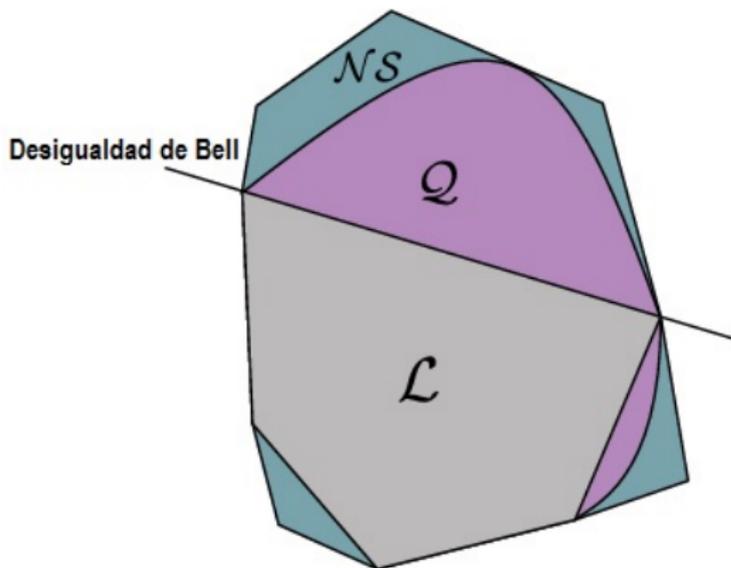


Figure: Politopo local en su representación geométrica.

politopo local \neq politopo no-signal

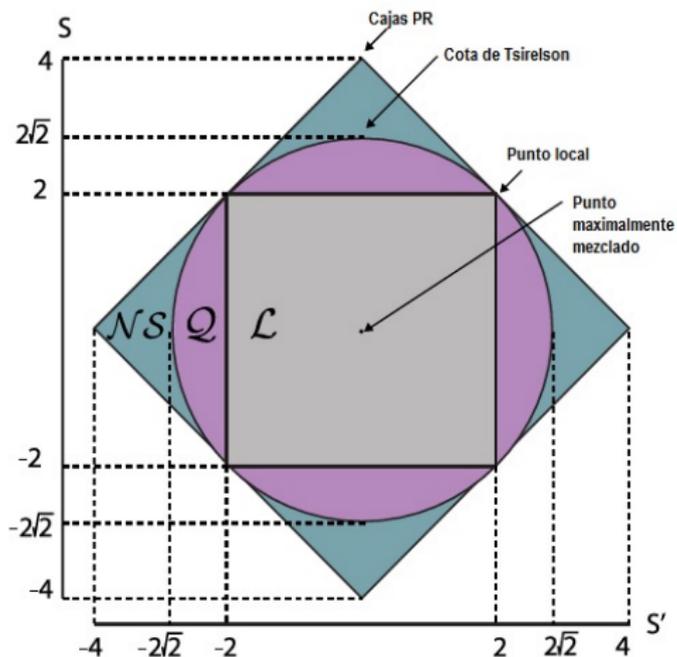


Figure: Distintos puntos de las desigualdades de Bell.

Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información**
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

Medidas entrópicas en física y teoría de la información

- La noción de *entropía* juega un rol muy importante en la física.
- Pero también es muy importante en la teoría de la información...



Figure: Usuarios notables de medidas entrópicas.

Medidas entrópicas en física y teoría de la información

- La noción de *entropía* juega un rol muy importante en la física.
- Pero también es muy importante en la teoría de la información...



Figure: Usuarios notables de medidas entrópicas.

Shannon dixit:

My greatest concern was what to call it. I thought of calling it an “information”, but the word was overly used, so I decided to call it an “uncertainty”. When I discussed it with John von Neumann, he had a better idea. Von Neumann told me, “You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have an advantage”.

[M. Tribus and E. C. Mcirvine. Energy and Information, *Sci. Am.*, **225** (3):179-188, (1971)]

Medidas de Información

- La relación entre la teoría de la información y la física ha dado lugar a desarrollos interesantes.
- Uno de los ejemplos más importantes es el de la Teoría de la información cuántica.
- En esta conexión **las medidas de información juegan un rol clave.**

Medidas de Información

- La relación entre la teoría de la información y la física ha dado lugar a desarrollos interesantes.
- Uno de los ejemplos más importantes es el de la Teoría de la información cuántica.
- En esta conexión las medidas de información juegan un rol clave.

Medidas de Información

- La relación entre la teoría de la información y la física ha dado lugar a desarrollos interesantes.
- Uno de los ejemplos más importantes es el de la Teoría de la información cuántica.
- En esta conexión **las medidas de información juegan un rol clave.**

Tabla de ejemplos

Nombre	Funcional Entrópica	Entropía
Shannon	$h(x) = x, \quad \phi(x) = -x \ln x$	$H(p) = -\sum_i p_i \ln p_i$
Rényi	$h(x) = \frac{\ln(x)}{1-\alpha}, \quad \phi(x) = x^\alpha$	$R_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha} \ln(\sum_i p_i^\alpha)$
Tsallis	$h(x) = \frac{x-1}{1-\alpha}, \quad \phi(x) = x^\alpha$	$T_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha} (\sum_i p_i^\alpha - 1)$
Unificada	$h(x) = \frac{x^s-1}{(1-r)s}, \quad \phi(x) = x^r$	$E_r^s(p) = \frac{1}{(1-r)s} [(\sum_i p_i^r)^s - 1]$
Kaniadakis	$h(x) = x, \quad \phi(x) = \frac{x^{\kappa+1} - x^{-\kappa+1}}{2\kappa}$	$S_\kappa(p) = -\sum_i \frac{p_i^{\kappa+1} - p_i^{-\kappa+1}}{2\kappa}$

Table: Algunos casos conocidos.

Entropías (h, ϕ) clásicas

Definition

Sea $p = [p_1 \cdots p_N]^t \in [0, 1]^N$ un vector de probabilidad de dimensión N (con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$). Las entropías (h, ϕ) se definen como:

$$H_{(h,\phi)}(p) = h \left(\sum_{i=1}^N \phi(p_i) \right), \quad (9)$$

donde las funcionales entrópicas $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $\phi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ son tales que o (i) h es creciente y ϕ es cóncava, o (ii) h es decreciente y ϕ es convexa. En ambos casos, nos restringimos a ϕ estrictamente cóncava/convexa y h estrictamente monótona, junto con $\phi(0) = 0$ y $h(\phi(1)) = 1$.

Observaciones importantes

- Los estados de las teorías probabilísticas clásicas se pueden describir con los axiomas de Kolmogorov.
- Desde este punto de vista, los observables *variables aleatorias*.
- Notar que la formulación axiomática de la **teoría de la información clásica** descansa (desde un punto de vista lógico) en las nociones de **probabilidad y variable aleatoria**.

Observaciones importantes

- Los estados de las teorías probabilísticas clásicas se pueden describir con los axiomas de Kolmogorov.
- Desde este punto de vista, los observables *variables aleatorias*.
- Notar que la formulación axiomática de la **teoría de la información clásica** descansa (desde un punto de vista lógico) en las nociones de **probabilidad y variable aleatoria**.

Observaciones importantes

- Los estados de las teorías probabilísticas clásicas se pueden describir con los axiomas de Kolmogorov.
- Desde este punto de vista, los observables *variables aleatorias*.
- Notar que la formulación axiomática de la **teoría de la información clásica** descansa (desde un punto de vista lógico) en las nociones de **probabilidad** y **variable aleatoria**.

¿Por qué buscar versiones cuánticas de las entropías?

- Teorema de Schumacher [B. Schumacher. *Phys Rev A*, (1995);**51**(4):2738-2747].
- Principio de Máxima Entropía (E.T. Jaynes).
- Relaciones de incerteza entrópicas [G. Bosyk, M. Portesi, F. Holik and A. Plastino. *Phys. Scr.* **87** (2013) 065002].

¿Por qué buscar versiones cuánticas de las entropías?

- Teorema de Schumacher [B. Schumacher. *Phys Rev A*, (1995);**51**(4):2738-2747].
- Principio de Máxima Entropía (E.T. Jaynes).
- Relaciones de incerteza entrópicas [G. Bosyk, M. Portesi, F. Holik and A. Plastino. *Phys. Scr.* **87** (2013) 065002].

¿Por qué buscar versiones cuánticas de las entropías?

- Teorema de Schumacher [B. Schumacher. *Phys Rev A*, (1995);**51**(4):2738-2747].
- Principio de Máxima Entropía (E.T. Jaynes).
- Relaciones de incerteza entrópicas [G. Bosyk, M. Portesi, F. Holik and A. Plastino. *Phys. Scr.* **87** (2013) 065002].

¿Por qué buscar versiones cuánticas de las entropías?

- En el problema de compresión de datos con penalización aparecen las entropías de Rényi [L. Campbell. *Information and Control* **8**, 423-429 (1965)].
- Se puede dar una formulación cuántica del mismo problema: la entropía de Rényi cuántica aparece en el problema de la compresión de datos con penalización exponencial.

[G. Bellomo, G. Bosyk, F. Holik and S. Zozor: “Lossless quantum data compression with exponential penalization: an operational interpretation of the quantum Rényi entropy”, *Scientific Reports*, **7**, 14765 (2017)]

¿Por qué buscar versiones cuánticas de las entropías?

- En el problema de compresión de datos con penalización aparecen las entropías de Rényi [L. Campbell. *Information and Control* **8**, 423-429 (1965)].
- Se puede dar una formulación cuántica del mismo problema: la entropía de Rényi cuántica aparece en el problema de la compresión de datos con penalización exponencial.

[G. Bellomo, G. Bosyk, F. Holik and S. Zozor: “Lossless quantum data compression with exponential penalization: an operational interpretation of the quantum Rényi entropy”, *Scientific Reports*, **7**, 14765 (2017)]

Entropías de Salicru cuánticas

Definition

Consideremos un sistema cuántico descrito por un operador densidad ρ que actúa en un espacio de Hilbert N -dimensional Hilbert space \mathcal{H}^N , que es Hermítico, positivo, y de $\text{Tr } \rho = 1$. Definimos a las entropías (h, ϕ) cuánticas como

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = h(\text{Tr } \phi(\rho)), \quad (10)$$

donde las *funcionales entrópicas* $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $\phi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ son tales que: (i) h es estrictamente creciente y ϕ es estrictamente cóncava, o (ii) h es estrictamente decreciente y ϕ es estrictamente convexa. Adicionalmente, pedimos que $\phi(0) = 0$ y $h(\phi(1)) = 0$.

[G. M. Bosyk, S. Zozor, F. Holik, M. Portesi and P. W. Lamberti. “A family of generalized quantum entropies: definition and properties”, *Quantum Information Processing*, **15**: 8, 3393-3420, (2016)]

Relación con las (h, ϕ) clásicas

Consideremos un operador densidad $\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ con autovalores $\lambda_i \geq 0$. Entonces, las (h, ϕ) cuánticas cumplen:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

donde λ es el vector de probabilidad formado por los autovalores de ρ . Las entropías de von Neumann, las versiones cuánticas de Rényi, Tsallis, unificadas y de Kaniadakis son casos particulares de nuestra definición de entropías (h, ϕ) .

Concavidad de Schur

Las entropías (h, ϕ) cuánticas tienen la propiedad de la *concavidad de Schur*: Sean ρ y ρ' dos operadores densidad actuando en \mathcal{H}^N y $\mathcal{H}^{N'}$ respectivamente, y tales que $\rho \prec \rho'$. Luego,

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) \geq \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho'),$$

La igualdad se cumple si y sólo si $\rho' = U\rho U^\dagger$, o $\rho = U\rho' U^\dagger$, para un operador isométrico U (isométrico := $U^\dagger U = I$). Recíprocamente, si la ecuación de arriba se satisface para cualquier par de funcionales entrópicas, entonces $\rho \prec \rho'$.

Algunas propiedades de las (h, ϕ) cuánticas

Las entropías (h, ϕ) cuánticas están acotadas (por arriba y por abajo):

$$0 \leq \mathbf{H}_{(h, \phi)}(\rho) \leq h \left(\text{rank } \rho \phi \left(\frac{1}{\text{rank } \rho} \right) \right) \leq h \left(N \phi \left(\frac{1}{N} \right) \right), \quad (11)$$

La cota inferior se alcanza sólo para estados puros, mientras que las cotas superiores se alcanzan para operadores densidad de la forma

$$\rho = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |e_i\rangle\langle e_i| \text{ para un conjunto ortogonal } \{|e_i\rangle\}_{i=1}^M.$$

Propiedades de las (h, ϕ) cuánticas

- Las entropías (h, ϕ) clásicas y sus versiones cuánticas no son cóncavas en general. Es posible establecer condiciones suficientes en la funcional entrópica h para asegurar la propiedad de concavidad de las entropías (h, ϕ) cuánticas.
- Cuando la funcional entrópica h es cóncava, $\mathbf{H}_{(h, \phi)}$ es cóncava, es decir, para todo $0 \leq \omega \leq 1$,

$$\mathbf{H}_{(h, \phi)}(\omega\rho + (1 - \omega)\rho') \geq \omega \mathbf{H}_{(h, \phi)}(\rho) + (1 - \omega) \mathbf{H}_{(h, \phi)}(\rho').$$

Propiedades de las (h, ϕ) cuánticas

- Las entropías (h, ϕ) clásicas y sus versiones cuánticas no son cóncavas en general. Es posible establecer condiciones suficientes en la funcional entrópica h para asegurar la propiedad de concavidad de las entropías (h, ϕ) cuánticas.
- Cuando la funcional entrópica h es cóncava, $\mathbf{H}_{(h, \phi)}$ es cóncava, es decir, para todo $0 \leq \omega \leq 1$,

$$\mathbf{H}_{(h, \phi)}(\omega\rho + (1 - \omega)\rho') \geq \omega \mathbf{H}_{(h, \phi)}(\rho) + (1 - \omega) \mathbf{H}_{(h, \phi)}(\rho').$$

- La entropía cuántica de un operador densidad iguala a la entropía clásica correspondiente evaluada en el vector de probabilidad formado por sus autovalores.
- Esto ya no se cumple cuando se utiliza el vector de probabilidad asociado a una descomposición convexa no diagonal (con estados puros que no forman una base ortogonal).

- La entropía cuántica de un operador densidad iguala a la entropía clásica correspondiente evaluada en el vector de probabilidad formado por sus autovalores.
- Esto ya no se cumple cuando se utiliza el vector de probabilidad asociado a una descomposición convexa no diagonal (con estados puros que no forman una base ortogonal).

Otras propiedades

Las entropías (h, ϕ) de una mezcla estadística arbitraria de estados puros está acotada por arriba por la entropía (h, ϕ) clásica del vector de probabilidad formado por los pesos de la mezcla:

Sea $\rho = \sum_{i=1}^M p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ un mezcla estadística arbitraria de estados puros $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, con $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^M p_i = 1$. Luego, las entropías cuánticas (h, ϕ) están acotadas por arriba por:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) \leq H_{(h,\phi)}(p), \quad (12)$$

donde $p = [p_1 \cdots p_M]^t$.

Esta proposición es una generalización natural de una propiedad bien conocida de la entropía de von Neumann.

Propiedad importante

Sea $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ una base ortonormal arbitraria de \mathcal{H}^N y, para un dado operador densidad ρ actuando en \mathcal{H}^N , sea $p^E(\rho)$ el vector de probabilidad con entradas $p_k^E(\rho) = \langle e_k | \rho | e_k \rangle$, esto es, los elementos diagonales de ρ con respecto a esa base. Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) \leq H_{(h,\phi)}(p^E(\rho)). \quad (13)$$

Invariancia ante isometrías

Las entropías (h, ϕ) cuánticas son invariantes ante cualquier transformación isométrica $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$ donde U es un operador isométrico:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(U\rho U^\dagger) = \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho). \quad (14)$$

Operaciones cuánticas

Consideremos operaciones cuánticas generales representadas por mapas completamente positivos y que preservan traza \mathcal{E} , expresados en la forma de Kraus $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^K A_k \rho A_k^\dagger$ (donde $\{A_k^\dagger A_k\}$ satisfacen la relación de completitud $\sum_{k=1}^K A_k^\dagger A_k = I$).

Sea \mathcal{E} un mapa *biestocástico*. Luego, la operación cuántica $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho)$ sólo puede degradar la información (es decir, incrementar las entropías (h, ϕ)):

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) \leq \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\mathcal{E}(\rho)) \quad (15)$$

con igualdad sí y sólo sí $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ para algún operador unitario U .

Propiedad importante

- La entropías (h, ϕ) cuánticas son el mínimo tomado de entre el conjunto de medidas proyectivas de rango uno de la entropía (h, ϕ) clásica para una dada medición y operador densidad.
- En efecto, es posible demostrar que se puede extender la minimización al conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces, se puede dar la siguiente de definición. Sea \mathbb{E} el conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = \min_{E \in \mathbb{E}} H_{(h,\phi)}(p^E(\rho))$$

, donde $p^E(\rho)$ es el vector de probabilidades para el POVM $E = \{E_k\}_{k=1}^K$, dado operador densidad ρ (es decir, $p_k^E(\rho) = \text{Tr}(E_k \rho)$).

Propiedad importante

- La entropías (h, ϕ) cuánticas son el mínimo tomado de entre el conjunto de medidas proyectivas de rango uno de la entropía (h, ϕ) clásica para una dada medición y operador densidad.
- En efecto, es posible demostrar que se puede extender la minimización al conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces, se puede dar la siguiente de definición. Sea \mathbb{E} el conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = \min_{E \in \mathbb{E}} H_{(h,\phi)}(p^E(\rho))$$

, donde $p^E(\rho)$ es el vector de probabilidades para el POVM $E = \{E_k\}_{k=1}^K$, dado operador densidad ρ (es decir, $p_k^E(\rho) = \text{Tr}(E_k \rho)$).

Propiedad importante

- La entropías (h, ϕ) cuánticas son el mínimo tomado de entre el conjunto de medidas proyectivas de rango uno de la entropía (h, ϕ) clásica para una dada medición y operador densidad.
- En efecto, es posible demostrar que se puede extender la minimización al conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces, se puede dar la siguiente de definición. Sea \mathbb{E} el conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = \min_{E \in \mathbb{E}} H_{(h,\phi)}(p^E(\rho))$$

, donde $p^E(\rho)$ es el vector de probabilidades para el POVM $E = \{E_k\}_{k=1}^K$, dado operador densidad ρ (es decir, $p_k^E(\rho) = \text{Tr}(E_k \rho)$).

Propiedad importante

- La entropías (h, ϕ) cuánticas son el mínimo tomado de entre el conjunto de medidas proyectivas de rango uno de la entropía (h, ϕ) clásica para una dada medición y operador densidad.
- En efecto, es posible demostrar que se puede extender la minimización al conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces, se puede dar la siguiente de definición. Sea \mathbb{E} el conjunto de POVM's de rango uno.
- Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho) = \min_{E \in \mathbb{E}} H_{(h,\phi)}(p^E(\rho))$$

, donde $p^E(\rho)$ es el vector de probabilidades para el POVM $E = \{E_k\}_{k=1}^K$, dado operador densidad ρ (es decir, $p_k^E(\rho) = \text{Tr}(E_k \rho)$).

Sistemas compuestos

Sea $|\psi\rangle$ un estado puro de un sistema compuesto AB y $\rho^A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\rho^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|$ los operadores densidad de los subsistemas A y B respectivamente. Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho^A) = \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho^B). \quad (16)$$

Criterio parcial

Sea $\rho^{AB} = \sum_{m=1}^M \omega_m \rho_m^A \otimes \rho_m^B$, con $\omega_m \geq 0$ y $\sum_{m=1}^M \omega_m = 1$ un operador densidad separable de un sistema compuesto AB , y sean $\rho^A = \text{Tr}_B \rho$ y $\rho^B = \text{Tr}_A \rho$ los operadores densidad correspondientes a los subsistemas. Entonces:

$$\mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho^{AB}) \geq \max \{ \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho^A), \mathbf{H}_{(h,\phi)}(\rho^B) \}.$$

Formulación generalizada (una posibilidad)

Ahora nos restringimos a conjuntos de estados \mathcal{C} (convexos, compactos y de dimensión finita). Para estos espacios cualquier elemento se puede escribir como una combinación convexa de estados puros (puntos extremos), como ocurre en la mecánica estadística clásica y la cuántica. Es decir, existen estados puros $\{\nu_i\}$, tales que cualquier ν se puede escribir como:

$$\nu = \sum_i p_i \nu_i$$

Sin embargo, esta descomposición, no va a ser única en general.

Motivación geométrica

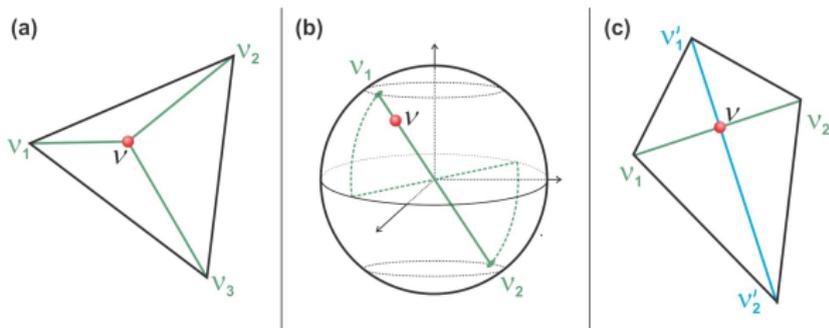


Figure: Distintos modelos.

Teorema de las mezclas de Schrödinger

Dados dos vectores de probabilidad $p = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, decimos que q es mayorizado por p ($q \preceq p$) ssi $\sum_{i=1}^k q_i \leq \sum_{i=1}^k p_i$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} q_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i.$$

Ejemplos: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \preceq (0.7, 0.3) \preceq (1, 0)$.

Se puede mostrar que el vector de probabilidades formado por los coeficientes de cualquier descomposición convexa en estados puros de un estado *cuántico* es mayorizado por el vector de autovalores.

$\rho \preceq \sigma$ sí y sólo sí el vector de autovalores de ρ es mayorizado por el vector de autovalores de σ .

Conjunto de vectores de probabilidad

Dado un modelo probabilístico descrito por un conjunto compacto y convexo \mathcal{C} , sea M_ν el conjunto de vectores de probabilidad de todas las posibles descomposiciones convexas de un estado ν en términos de estados puros (i.e., puntos extremos de \mathcal{C}):

$$M_\nu := \{p(\nu) = \{p_i\} \mid \nu = \sum_i p_i \nu_i \text{ for pure } \nu_i\}$$

Definition

Dado un estado ν , si el mayorante del conjunto M_ν (ordenado parcialmente por la relación de mayorización) existe, se llama el *espectro de ν* , y lo denotamos por $\bar{p}(\nu)$.

La descomposición espectral generalizada viene dada por:

$$\nu = \sum_i \bar{p}_i \bar{\nu}_i$$

- Notar que nuestra definición se reduce a la usual para teorías clásicas y para la mecánica cuántica.
- Pero para una teoría arbitraria, $\bar{p}(\nu)$ podría no existir para algunos estados.
- Nuestra definición nos permite introducir una noción de mayorización generalizada.

- Notar que nuestra definición se reduce a la usual para teorías clásicas y para la mecánica cuántica.
- Pero para una teoría arbitraria, $\bar{p}(\nu)$ podría no existir para algunos estados.
- Nuestra definición nos permite introducir una noción de mayorización generalizada.

- Notar que nuestra definición se reduce a la usual para teorías clásicas y para la mecánica cuántica.
- Pero para una teoría arbitraria, $\bar{p}(\nu)$ podría no existir para algunos estados.
- Nuestra definición nos permite introducir una noción de mayorización generalizada.

Mayorización generalizada

Definition

Dados dos estados μ y ν , uno tiene que μ es mayorizado por ν , y lo denotamos $\mu \prec \nu$, si y sólo si:

$$\bar{p}(\mu) \prec \bar{p}(\nu)$$

donde $\bar{p}(\mu)$ y $\bar{p}(\nu)$ son los espectros correspondientes.

[M. Portesi, F. Holik, P.W. Lamberti, G.M. Bosyk, G. Bellomo y S. Zozor, “Generalized entropies in quantum and classical statistical theories, *European Physical Journal-Special Topics*, artículo en prensa, (2018).

arXiv:1802.08673v1 [quant-ph]]

[F. Holik, G. M. Bosyk and G. Bellomo, “Quantum Information as a Non-Kolmogorovian Generalization of Shannon’s Theory”, *Entropy* (2015), **17** (11), 7349-7373.]

Apartado: ¿por qué es importante la mayorización?

- K. Korzekwa. “Structure of the thermodynamic arrow of time in classical and quantum theories”, *Phys. Rev. A* **95**, 052318, (2017).
- H. Barnum, J. Barrett, M. Krumm and M. Müller. “Entropy, majorization and thermodynamics in general probabilistic theories”, in C. Heunen, P. Selinger and J. Vicary: *Proceedings of the 12th International Workshop on Quantum Physics and Logic (QPL 2015)*, Oxford, U.K., July 15-17, 2015, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* **195**, pp. 43-58.
- G. Bosyk, G. Sergioli, H. Freytes, F. Holik and G. Bellomo. “Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. **473**, 1, 403-411 (2017).

Apartado: ¿por qué es importante la mayorización?

- K. Korzekwa. “Structure of the thermodynamic arrow of time in classical and quantum theories”, *Phys. Rev. A* **95**, 052318, (2017).
- H. Barnum, J. Barrett, M. Krumm and M. Müller. “Entropy, majorization and thermodynamics in general probabilistic theories”, in C. Heunen, P. Selinger and J. Vicary: *Proceedings of the 12th International Workshop on Quantum Physics and Logic (QPL 2015)*, Oxford, U.K., July 15-17, 2015, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* **195**, pp. 43-58.
- G. Bosyk, G. Sergioli, H. Freytes, F. Holik and G. Bellomo. “Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. **473**, 1, 403-411 (2017).

Apartado: ¿por qué es importante la mayorización?

- K. Korzekwa. “Structure of the thermodynamic arrow of time in classical and quantum theories”, *Phys. Rev. A* **95**, 052318, (2017).
- H. Barnum, J. Barrett, M. Krumm and M. Müller. “Entropy, majorization and thermodynamics in general probabilistic theories”, in C. Heunen, P. Selinger and J. Vicary: *Proceedings of the 12th International Workshop on Quantum Physics and Logic (QPL 2015)*, Oxford, U.K., July 15-17, 2015, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* **195**, pp. 43-58.
- G. Bosyk, G. Sergioli, H. Freytes, F. Holik and G. Bellomo. “Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. **473**, 1, 403-411 (2017).

Funciones de estados

Nuestra definición se puede usar también para definir una función de un estado generalizado ϕ . Para cualquier mezcla posible $\{p_i, \nu_i\}$ de ν , definimos la aplicación de una funcional ϕ al estado dada la mezcla como:

$$\phi(\nu)|_{\{p_i, \nu_i\}} := \sum_i \phi(p_i) \nu_i$$

En particular, estamos interesados en la mezcla $\{\bar{p}_i, \bar{\nu}_i\}$, que lleva naturalmente a la definición:

$$\phi(\nu) := \phi(\nu)|_{\{\bar{p}_i, \bar{\nu}_i\}}$$

Entropías (h, ϕ) en modelos generalizados

En el formalismo generalizado, la funcional u_C cumple la función de traza. Esto nos permite dar una definición de entropías (h, ϕ) generalizadas.

Definition

Usando hipótesis similares a las definiciones anteriores, definimos las entropías (h, ϕ) :

$$\tilde{H}_{(h,\phi)}(\nu) = h(u_C(\phi(\nu)))$$

Por como están construidas, estas entropías generalizadas son iguales a las clásicas evaluadas en el vector de probabilidad $\bar{p}(\nu)$, es decir:

$$\tilde{H}_{(h,\phi)}(\nu) = H_{(h,\phi)}(\bar{p}(\nu))$$

Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

Condiciones

Supongamos que tenemos una serie de condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_1 \rangle &= r_1 \\ \langle R_2 \rangle &= r_2 \\ &\vdots \\ \langle R_n \rangle &= r_n,\end{aligned}\tag{17}$$

y queremos determinar la distribución de probabilidad menos sesgada compatible con estas condiciones.

MaxEnt nos dice que

$$\rho_{max-ent} = \exp^{-\lambda_0 \mathbf{1} - \lambda_1 R_1 - \dots - \lambda_n R_n}, \quad (18)$$

donde los λ son multiplicadores de Lagrange que satisfacen

$$r_i = -\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln Z, \quad (19)$$

donde

$$Z(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \text{tr}[\exp^{-\lambda_1 R_1 - \dots - \lambda_n R_n}], \quad (20)$$

y la condición de normalización es

$$\lambda_0 = \ln Z. \quad (21)$$

Dado un efecto E , consideremos el conjunto de estados:

$$\mathcal{C}_{(E,\lambda)} := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \text{tr}(\rho E) = \lambda, \lambda \in [0, 1]\}. \quad (22)$$

Se puede probar que es convexo, y que existe S , un subespacio real de \mathcal{A} tal que:

$$\mathcal{C}_{(E,\lambda)} = S \cap \mathcal{C}, \quad (23)$$

Se puede probar que en un modelo general, una ecuación de la forma

$$\langle R \rangle = r, \quad (24)$$

Caracterización geométrica

...también se puede ver como un subespacio cortado con el convexo de estados: $S(R, r) \cap \Omega$.

[F. Holik and A. Plastino, *Journal Of Mathematical Physics* **53**, 073301 (2012)]

Se puede probar que en un modelo general, una ecuación de la forma

$$\langle R \rangle = r, \quad (24)$$

Caracterización geométrica

...también se puede ver como un subespacio cortado con el convexo de estados: $S(R, r) \cap \Omega$.

[F. Holik and A. Plastino, *Journal Of Mathematical Physics* **53**, 073301 (2012)]

En modelos generalizados:

$$C_{max-ent} := \bigcap_i C_{R_i} = \bigwedge_i C_{R_i}. \quad (25)$$

Dada una serie de condiciones representadas por conjuntos convexos C_i , uno debería maximizar la netropía en $C_{max-ent} = \bigwedge_i C_i$.

Axiomas de la teoría de la probabilidad geométrica

La teoría de la probabilidad geométrica fue desarrollada por el matemático italiano Gian Carlo Rotta.

Axioma1

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Axioma2

Si A y B son conjuntos medibles: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
que es equivalente (para álgebras booleanas) a:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (26)$$

para A y B disjuntos.

Axiomas de la teoría de la probabilidad geométrica

La teoría de la probabilidad geométrica fue desarrollada por el matemático italiano Gian Carlo Rotta.

Axioma1

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Axioma2

Si A y B son conjuntos medibles: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
que es equivalente (para álgebras booleanas) a:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (26)$$

para A y B disjuntos.

Axiomas de la teoría de la probabilidad geométrica

El siguiente axioma refleja la acción de un grupo que deja invariante la medida:

Axioma3

El volumen de un conjunto A no depende de la posición de A ; en otras palabras, si A se puede transformar rígidamente en B , luego, B y A tienen la misma medida.

Axioma4

Para un paralelepípedo P , con lados ortogonales x_1, \dots, x_n , se impone la condición de normalización: $\mu(P) = x_1 x_2 \cdots x_n$

Axiomas de la teoría de la probabilidad geométrica

El siguiente axioma refleja la acción de un grupo que deja invariante la medida:

Axioma3

El volumen de un conjunto A no depende de la posición de A ; en otras palabras, si A se puede transformar rígidamente en B , luego, B y A tienen la misma medida.

Axioma4

Para un paralelepípedo P , con lados ortogonales x_1, \dots, x_n , se impone la condición de normalización: $\mu(P) = x_1 x_2 \cdots x_n$

Polinomios simétricos

$$e_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (27a)$$

$$e_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \quad (27b)$$

$$e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2x_3 \cdots x_n + x_1x_3x_4 \cdots x_n + \dots + x_1x_2 \cdots x_{n-1} \quad (27c)$$

$$e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \cdots x_n \quad (27d)$$

Cada uno de estos polinomios define una medida invariante distinta.

Método de Jaynes generalizado

Partimos de una función:

$$s : \mathcal{L} \rightarrow [0; 1], \quad (28)$$

Axioma1

$$s(\mathbf{0}) = 0$$

Axioma2

$s(E^\perp) = 1 - s(E)$, y para una familia numerable y ortogonal de a dos de eventos E_j

$$s\left(\sum_j E_j\right) = \sum_j s(E_j)$$

Método de Jaynes generalizado

Partimos de una función:

$$s : \mathcal{L} \rightarrow [0; 1], \quad (28)$$

Axioma1

$$s(\mathbf{0}) = 0$$

Axioma2

$s(E^\perp) = 1 - s(E)$, y para una familia numerable y ortogonal de a dos de eventos E_j

$$s\left(\sum_j E_j\right) = \sum_j s(E_j)$$

Método de Jaynes generalizado

Axioma3

Existe un grupo de automorfismos \mathcal{F} tal que para todo $g \in \mathcal{F}$ y para todo $E \in \mathcal{L}$

$$s(g \cdot E) = s(E)$$

Axioma4

La condición de normalización es de la forma $\{e_i\}_I$ in the values $\{s(E_j)\}_J$,

$$e_i(s(E_1), s(E_2), \dots) = 0$$

donde $\{E_j\}_J \subseteq \mathcal{L}$ es un subconjunto de eventos.

Método de Jaynes generalizado

Axioma3

Existe un grupo de automorfismos \mathcal{F} tal que para todo $g \in \mathcal{F}$ y para todo $E \in \mathcal{L}$

$$s(g \cdot E) = s(E)$$

Axioma4

La condición de normalización es de la forma $\{e_i\}_I$ in the values $\{s(E_j)\}_J$,

$$e_i(s(E_1), s(E_2), \dots) = 0$$

donde $\{E_j\}_J \subseteq \mathcal{L}$ es un subconjunto de eventos.

Proceso de maximización

- Estos axiomas determinan unívocamente un conjunto convexo \mathcal{C} y el axioma 3 determina una variedad \mathcal{M} .
- El conjunto de estados de un sistema físico concreto es una variedad $\mathcal{C} \cap \mathcal{M}$.
- Sobre este conjunto calculamos la entropía de medida:

$$H_E(s) := - \sum_{x \in E} s(x) \ln(s(x))$$

$$H(s) := \inf_{E \in \mathcal{C}} H_E(s)$$

Proceso de maximización

- Estos axiomas determinan unívocamente un conjunto convexo \mathcal{C} y el axioma 3 determina una variedad \mathcal{M} .
- El conjunto de estados de un sistema físico concreto es una variedad $\mathcal{C} \cap \mathcal{M}$.
- Sobre este conjunto calculamos la entropía de medida:

$$H_E(s) := - \sum_{x \in E} s(x) \ln(s(x))$$

$$H(s) := \inf_{E \in \mathcal{L}} H_E(s)$$

Proceso de maximización

- Estos axiomas determinan unívocamente un conjunto convexo \mathcal{C} y el axioma 3 determina una variedad \mathcal{M} .
- El conjunto de estados de un sistema físico concreto es una variedad $\mathcal{C} \cap \mathcal{M}$.
- Sobre este conjunto calculamos la entropía de medida:

$$H_E(s) := - \sum_{x \in E} s(x) \ln(s(x))$$

$$H(s) := \inf_{E \in \mathcal{L}} H_E(s)$$

El grupo de simetrías induce en \mathcal{C} automorfismos convexos. Tendrá además una acción en $Aut(\mathcal{L})$. Entonces para todo $g \in \mathcal{G}$, cualquier evento $E \in \mathcal{L}$ y cualquier medida $s \in \mathcal{C}$, tendremos la condición de covarianza

$$s(E) = s'(E') \quad (29)$$

donde $E' = g \cdot E$ y $s' = g \cdot s$.

Resultados

- Partimos de que todas las teorías estadísticas admiten una formulación geométrica (modelos operacionales convexos).
- Dimos una formulación geométrica del principio MaxEnt para teorías arbitrarias.
- Esto está hecho de forma tal de que se pueden incluir naturalmente condiciones sobre medidas generalizadas (efectos).

Resultados

- Partimos de que todas las teorías estadísticas admiten una formulación geométrica (modelos operacionales convexos).
- Dimos una formulación geométrica del principio MaxEnt para teorías arbitrarias.
- Esto está hecho de forma tal de que se pueden incluir naturalmente condiciones sobre medidas generalizadas (efectos).

Resultados

- Partimos de que todas las teorías estadísticas admiten una formulación geométrica (modelos operacionales convexos).
- Dimos una formulación geométrica del principio MaxEnt para teorías arbitrarias.
- Esto está hecho de forma tal de que se pueden incluir naturalmente condiciones sobre medidas generalizadas (efectos).

Referencias

- F. Holik and A. Plastino. Quantal effects and MaxEnt, *Journal Of Mathematical Physics*, **53**, 073301 (2012); doi: 10.1063/1.4731769
- F. Holik, C. Massri y A. Plastino Geometric probability theory and Jaynes' methodology, *International Journal of Geometric Methods In Modern Physics*, **13**, 1650025 (2016).
- M. Losada, F. Holik, C. Massri and A. Plastino. Solutions for the MaxEnt problem with symmetry constrains, (2018), arXiv:1807.11168v1 [quant-ph].

Outline

- 1 Introducción
- 2 Modelos operacionales convexos
- 3 Medidas de información
- 4 Principio de MaxEnt
- 5 Conclusiones y referencias

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Conclusiones

- Damos una definición de entropías (h, ϕ) cuánticas y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Damos una definición de entropías (h, ϕ) en modelos probabilísticos muy generales y caracterizamos algunas de sus propiedades.
- Encontramos que la relación de mayorización juega un rol clave en las propiedades de esta extensa familia.
- Damos una formulación de la noción de espectro para teorías probabilísticas generales, junto con la noción de mayorización asociada.
- Esto nos permite definir las entropías (h, ϕ) en modelos más generales que los que se originan en teorías clásicas o cuánticas.
- Damos una expresión generalizada de MaxEnt, generalizando las condiciones de vínculo de forma tal de incluir simetrías.

Algunas referencias

- F. Holik, G. M. Bosyk and G. Bellomo. “Quantum Information as a Non-Kolmogorovian Generalization of Shannon’s Theory”, *Entropy* (2015), **17** (11), 7349-7373.
- F. Holik, A. Plastino, and M. Sáenz. “Natural information measures for contextual probabilistic models”, *Quantum Information & Computation*, **16** (1 & 2) 0115-0133 (2016).
- F. Holik and A. Plastino. “Quantal effects and MaxEnt”, *Journal Of Mathematical Physics*, **53**, 073301 (2012); doi: 10.1063/1.4731769
- F. Holik, C. Massri y A. Plastino. “Geometric probability theory and Jaynes’ methodology, *International Journal of Geometric Methods In Modern Physics*, **13**, 1650025 (2016).
- M. Losada, F. Holik, C. Massri and A. Plastino. “Solutions for the MaxEnt problem with symmetry constrains”, (2018), arXiv:1807.11168v1 [quant-ph].