Método de MaxEnt para estados cuánticos invariantes

5ta Jornada de Lógica, Computación e Información Cuántica

César Massri

I M A S

UNIVERSIDAD CAECE

CONICET

U B A

7 de Junio 2018

Index

Medidas Clásicas

Medidas

Sea $(\mathcal{X}, \Sigma)$ un es espacio medible. Una *medida* es una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ para cualquier familia numerable de subconjuntos disjuntos.

Medidas Clásicas

Medidas

Sea $(\mathcal{X}, \Sigma)$ un es espacio medible. Una *medida* es una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ para cualquier familia numerable de subconjuntos disjuntos.

Teorema de Radon-Nikodym:

Si $\mu(A) = 0$ para todo A de medida (Lebesgue) cero, existe $f \in L(\mathcal{X})$ tal que

$$\mu(A) = \int_A f \, dx$$

Index

Retículos

Retículo

Un *retículo* es un conjunto ordenado tal que dados dos elementos x, y existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$.

Retículos

Retículo

Un *retículo* es un conjunto ordenado tal que dados dos elementos x, y existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$.

Distributivo

Un retículo X se dice *distributivo* si satisface,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en $\mathbb{R}^n$, $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en $\mathbb{R}^n$.

Problema de Rota

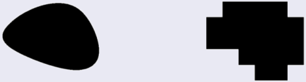
Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en $\mathbb{R}^n$, $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en $\mathbb{R}^n$.

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

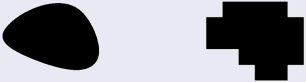
Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en $\mathbb{R}^n$, $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en $\mathbb{R}^n$.



Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en $\mathbb{R}^n$, $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en $\mathbb{R}^n$.

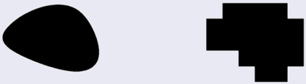


Rota definió una medida (generalizada) en $Poly(n)$ invariante por traslaciones y rotaciones.

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en $\mathbb{R}^n$, $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en $\mathbb{R}^n$.



Rota definió una medida (generalizada) en $Poly(n)$ invariante por traslaciones y rotaciones. Probó que las medidas invariantes sobre $Poly(n)$ vienen dadas por funciones S_n-invariantes en n variables. O sea, perímetro, área, volumen, etc.

Medidas en un retículo

Medidas

Sea X un retículo acotado. Una *medida* (real) en X es una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\nu(0) = 0$
2. $\nu(\bigvee x_i) = \sum \nu(x_i)$ para cualquier familia numerable de elementos disjuntos $x_i \wedge x_j = 0$, tales que $\bigvee x_i \in X$.

Medidas en un retículo

Medidas

Sea X un retículo acotado. Una *medida* (real) en X es una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\nu(0) = 0$
2. $\nu(\bigvee x_i) = \sum \nu(x_i)$ para cualquier familia numerable de elementos disjuntos $x_i \wedge x_j = 0$, tales que $\bigvee x_i \in X$.

Medidas invariantes

Si un grupo actúa en X, una *medida invariante* es una medida en X/G. O sea, $\nu(gx) = \nu(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.

Index

Caracterización de medidas y medidas invariantes sobre retículos

Teorema[HMP]

Dado un retículo acotado X, existe un espacio $\mathcal{X}$ tal que toda medida sobre el retículo X está en biyección con una medida (en el sentido clásico) sobre $\mathcal{X}$.

Lo mismo sucede para medidas invariantes.

Caracterización de medidas y medidas invariantes sobre retículos

Teorema[HMP]

Dado un retículo acotado X, existe un espacio $\mathcal{X}$ tal que toda medida sobre el retículo X está en biyección con una medida (en el sentido clásico) sobre $\mathcal{X}$.
Lo mismo sucede para medidas invariantes.

Recordar

- Los estados de la mecánica estadística clásica se pueden pensar como medidas de Kolmogorov.
- Los observables son las variables aleatorias.

Index

Index

Definiciones

Ortocomplementación

Una *ortocomplementación* en un retículo acotado es una función que manda cada elemento a a su complemento $a^{\perp}$ satisfaciendo:

- Complemento: $a \vee a^{\perp} = 1$ y $a \wedge a^{\perp} = 0$.
- Involución: $(a^{\perp})^{\perp} = a$.
- Orden: si $a \leq b$ entonces $b^{\perp} \leq a^{\perp}$.

Retículo ortomodular

Un retículo *ortomodular* $\mathcal{L}$ es un retículo acotado muñido de una ortocomplementación tal que

$$a \leq b \Longrightarrow a \vee (a^{\perp} \wedge b) = b, \quad \forall a, b \in \mathcal{L}.$$

Medidas ortogonales en un retículo

Medidas ortogonales

Sea $\mathcal{L}$ un retículo ortocomplementado. Una *medida ortogonal* es una función $\nu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\nu(0) = 0$
2. $\nu(\bigvee x_j) = \sum_j \nu(x_j)$ para toda familia numerable ortogonal.

Por definición, $x \perp y$ si $x \leq y^{\perp}$. Si un grupo actúa en $\mathcal{L}$, una *medida ortogonal invariante* es una medida ortogonal en $\mathcal{L}/G$. Una *medida positiva (invariante)* es una medida (invariante) cuyos valores son positivos.

Medidas ortogonales en un retículo

Medidas ortogonales

Sea $\mathcal{L}$ un retículo ortocomplementado. Una *medida ortogonal* es una función $\nu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\nu(0) = 0$
2. $\nu(\bigvee x_j) = \sum_j \nu(x_j)$ para toda familia numerable ortogonal.

Por definición, $x \perp y$ si $x \leq y^{\perp}$. Si un grupo actúa en $\mathcal{L}$, una *medida ortogonal invariante* es una medida ortogonal en $\mathcal{L}/G$. Una *medida positiva (invariante)* es una medida (invariante) cuyos valores son positivos.

Teorema de Gleason:

Sea $\mathcal{L}_{v\mathcal{N}}$ el retículo ortomodular de subespacios cerrados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea ν una medida ortogonal positiva en $\mathcal{L}_{v\mathcal{N}}$. Si $dim(\mathcal{H}) \geq 3$, entonces existe $\rho \geq 0$ tal que $\nu(P) = \mathrm{tr}(\rho P)$.

Index

Medidas ortogonales Positivas

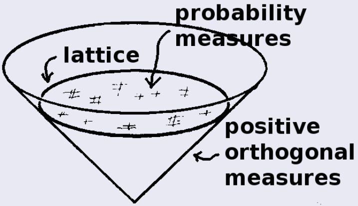
Teorema [HMP]

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto generador de $\mathcal{L}$ (rayos). Las medidas ortogonales positivas sobre $\mathcal{L}$ están en biyección con el cono dual de $\mathcal{C}$. O sea, funcionales ν tales que $\nu(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$.

Medidas ortogonales Positivas

Teorema [HMP]

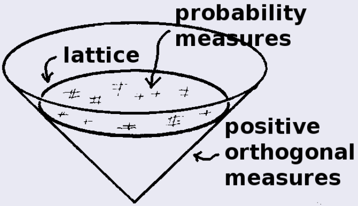
Sea $\mathcal{C}$ un conjunto generador de $\mathcal{L}$ (rayos). Las medidas ortogonales positivas sobre $\mathcal{L}$ están en biyección con el cono dual de $\mathcal{C}$. O sea, funcionales ν tales que $\nu(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$.



Medidas ortogonales Positivas

Teorema [HMP]

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto generador de $\mathcal{L}$ (rayos). Las medidas ortogonales positivas sobre $\mathcal{L}$ están en biyección con el cono dual de $\mathcal{C}$. O sea, funcionales ν tales que $\nu(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$.



Index

Index

MaxEnt

Condiciones

Supongamos que tenemos una serie de condiciones y queremos determinar la distribución de probabilidad menos sesgada compatible con estas condiciones.

$$\langle R_1 \rangle = r_1, \ \langle R_2 \rangle = r_2, \ldots, \langle R_n \rangle = r_n.$$

MaxEnt

Condiciones

Supongamos que tenemos una serie de condiciones y queremos determinar la distribución de probabilidad menos sesgada compatible con estas condiciones.

$$\langle R_1 \rangle = r_1,\ \langle R_2 \rangle = r_2, \ldots, \langle R_n \rangle = r_n.$$

MaxEnt

MaxEnt nos dice que

$$\rho_{max-ent} = \exp^{-\lambda_0 \mathbf{1} - \lambda_1 R_1 - \ldots - \lambda_n R_n},$$

donde los λ son multiplicadores de Lagrange que satisfacen

$$r_i = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_i}, \qquad Z(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{tr}\left(\exp^{-\lambda_1 R_1 - \ldots - \lambda_n R_n}\right).$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \,|\, \mathrm{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \,|\, \mathrm{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Luego las condiciones vienen representadas por conjuntos convexos C_{R_i} y buscamos maximizar la entropía en el convexo $C_{max-ent}$,

$$C_{max-ent} := \bigcap_i C_{R_i}.$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \,|\, \mathrm{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Luego las condiciones vienen representadas por conjuntos convexos C_{R_i} y buscamos maximizar la entropía en el convexo $C_{max-ent}$,

$$C_{max-ent} := \bigcap_i C_{R_i}.$$

Recordar

El problema MaxEnt está bien planteado (incluso en dimensión infinita).

Index

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrias G y observables $R_1, \ldots, R_n$ determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} \langle R_i \rangle &= r_i, \qquad && \forall\, i = 1, \ldots, n, \\ U \rho U^\dagger &= \rho, \qquad && \forall\, U \in G. \end{aligned}$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrias G y observables $R_1, \ldots, R_n$ determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} \langle R_i \rangle &= r_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, \qquad \forall\, U \in G. \end{aligned}$$

Reducción Importante

$$U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrias G y observables $R_1, \ldots, R_n$ determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} \langle R_i \rangle &= r_i, & \forall\, i &= 1, \ldots, n, \\ U \rho U^\dagger &= \rho, & \forall\, U &\in G. \end{aligned}$$

Reducción Importante

$$U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrias G y observables $R_1, \ldots, R_n$ determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} \langle R_i \rangle &= r_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \\ U \rho U^\dagger &= \rho, \qquad \forall\, U \in G. \end{aligned}$$

Reducción Importante

$$U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff$$
$$\mathrm{tr}([\rho; iQ]P) = 0, \ \forall P = P^\dagger, \forall Q \iff$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrias G y observables $R_1, \ldots, R_n$ determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\langle R_i \rangle = r_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$
$$U \rho U^\dagger = \rho, \qquad \forall\, U \in G.$$

Reducción Importante

$$U \rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff$$
$$\mathrm{tr}([\rho; iQ]P) = 0, \ \forall P = P^\dagger, \forall Q \iff \langle [iQ; P] \rangle = 0, \ \forall P \forall Q.$$

Index

Ejemplo

Qubit

Queremos hallar $\hat{\rho} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invariante por rotación sobre el eje z y tal que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a$,

$$Q = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\{P_1, \ldots, P_4\} = \{\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, entonces las condiciones son

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a,\ \langle [Q, P_2] \rangle = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = 0,\ \langle [Q, P_3] \rangle = \langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0.$$

Ejemplo

Qubit

Queremos hallar $\hat{\rho} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invariante por rotación sobre el eje z y tal que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a$,

$$Q = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\{P_1, \ldots, P_4\} = \{\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, entonces las condiciones son

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a,\ \langle [Q, P_2] \rangle = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = 0,\ \langle [Q, P_3] \rangle = \langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0.$$

Luego de aplicar MaxEnt, obtenemos

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + a\hat{\sigma}_z\right).$$

Index

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.
- Esta reformulación admite acciones de grupo (simetrías espacio temporales) de manera natural.

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.
- Esta reformulación admite acciones de grupo (simetrías espacio temporales) de manera natural.
- El método MaxEnt se puede aplicar en total generalidad a estados cuánticos invariantes.

Gracias

Fin