Mayorización, a través del universo (cuántico)

Gustavo Martín Bosyk
Instituto de Física La Plata, UNLP, CONICET, La Plata, Argentina

---

LoCIC - Lógica, Computación e Información Cuántica
Universidad Nacional de Quilmes
1 de Marzo, 2018 - Quilmes - Argentina

Basado en:
G. Bellomo, GMB, Majorization, accross the (quantum) universe, Cambridge University Press

I F L P
CONICET
U N L P

Motivación

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?
- ¿Es posible transformar un estado puro en otro por medio de operaciones locales y comunicación clásica?

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?
- ¿Es posible transformar un estado puro en otro por medio de operaciones locales y comunicación clásica?
- ¿Cómo debería ser una formulación adecuada del principio de incerteza?

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?
- ¿Es posible transformar un estado puro en otro por medio de operaciones locales y comunicación clásica?
- ¿Cómo debería ser una formulación adecuada del principio de incerteza?

Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?
- ¿Es posible transformar un estado puro en otro por medio de operaciones locales y comunicación clásica?
- ¿Cómo debería ser una formulación adecuada del principio de incerteza?

$$\Downarrow$$

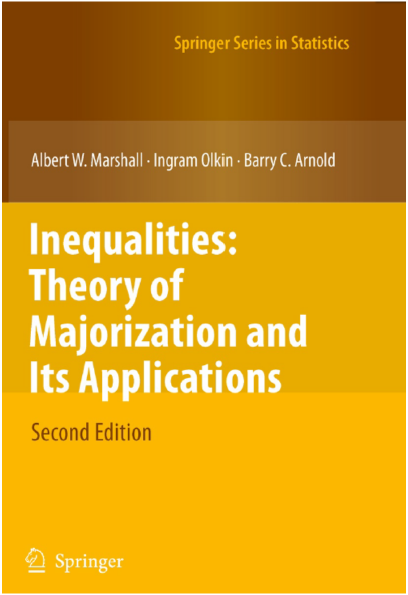
Motivación

- ¿De qué maneras uno puede representar un estado cuántico mixto como una mezcla estadística de estados puros?
- ¿Por qué (y en qué sentido) los estados separables son más desordenados globalmente que localmente?
- ¿Es posible transformar un estado puro en otro por medio de operaciones locales y comunicación clásica?
- ¿Cómo debería ser una formulación adecuada del principio de incerteza?

$$\Downarrow$$

Mayorización!!!

Mayorización


Springer Series in Statistics
Albert W. Marshall · Ingram Olkin · Barry C. Arnold
Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications
Second Edition
Springer

Definición

Sean $x = [x_1, \ldots x_d]$ y $y = [y_1, \ldots y_d]$ vectores de probabilidad: $x_i, y_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1 = \sum_{i=1}^{d} y_i$.

Definición

Sean $x = [x_1, \dots x_d]$ y $y = [y_1, \dots y_d]$ vectores de probabilidad: $x_i, y_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1 = \sum_{i=1}^{d} y_i$.

x es **mayorizado** por y, denotado como $x \prec y$, sii

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \; \forall n = 1 \dots d-1$$

$^{\downarrow}$: denota las componenentes ordenadas de forma decreciente

Mayorización

Definición

Sean $x = [x_1, \dots x_d]$ y $y = [y_1, \dots y_d]$ vectores de probabilidad: $x_i, y_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1 = \sum_{i=1}^{d} y_i$.

x es **mayorizado** por y, denotado como $x \prec y$, sii

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \ \forall n = 1 \dots d-1$$

$^{\downarrow}$: denota las componenentes ordenadas de forma decreciente

Ejemplo

$$\left[\frac{1}{d} \dots \frac{1}{d}\right] \prec x \prec [1, 0 \dots 0] \ \forall x$$

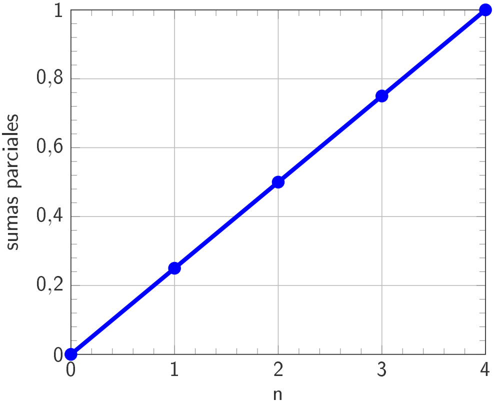
Curva de Lorenz

$x = [x_1, \ldots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \ldots d\}$

Curva de Lorenz

$x = [x_1, \dots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \dots d\}$

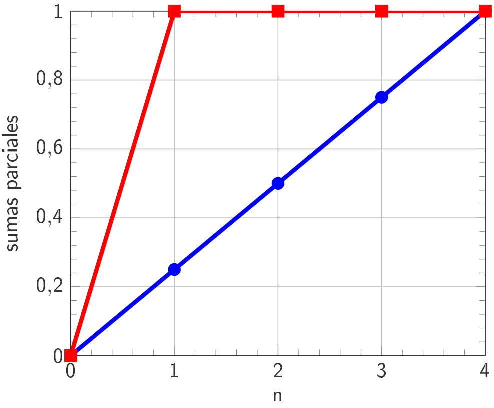
$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}7, 0{,}2, 0{,}05, 0{,}05]$, $x \prec y$



Curva de Lorenz

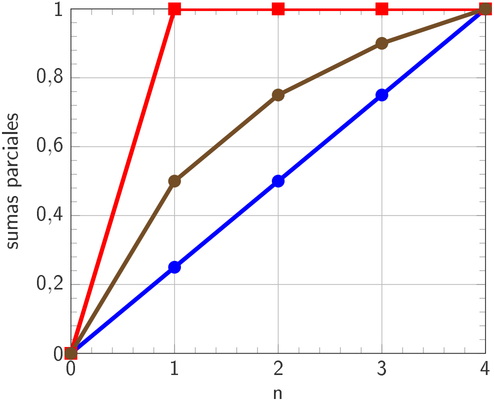
$x = [x_1, \ldots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \ldots d\}$

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}7, 0{,}2, 0{,}05, 0{,}05]$, $x \prec y$



$x = [x_1, \ldots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \ldots d\}$

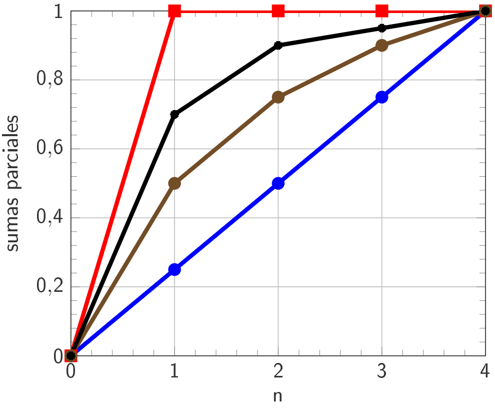
$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}7, 0{,}2, 0{,}05, 0{,}05]$, $x \prec y$



Curva de Lorenz

$x = [x_1, \ldots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \ldots d\}$

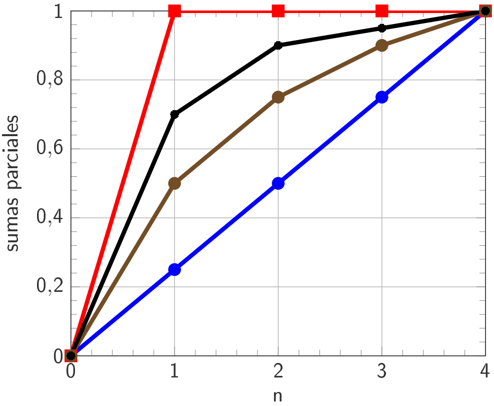
$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}7, 0{,}2, 0{,}05, 0{,}05]$, $x \prec y$



Curva de Lorenz

$x = [x_1, \ldots, x_d] \leftrightarrow (n, \sum_{i=0}^{n} x_i)$ para $n \in \{0 \ldots d\}$

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}7, 0{,}2, 0{,}05, 0{,}05]$, $x \prec y$



Observación: las curvas de Lorenz son *cóncavas*

Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

1. $x \prec y$ sii existe una matriz doble estocástica D tal que

$$x = Dy \text{ con } \sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$$

Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

1. $x \prec y$ sii existe una matriz doble estocástica D tal que

$$x = Dy \text{ con } \sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$$

2. Teorema de Birkhoff: El conjunto de matrices doble estocásticas es convexo y sus puntos extremales son las matrices de permutación

Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

1. $x \prec y$ sii existe una matriz doble estocástica D tal que

$$x = Dy \text{ con } \sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$$

2. Teorema de Birkhoff: El conjunto de matrices doble estocásticas es convexo y sus puntos extremales son las matrices de permutación $x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

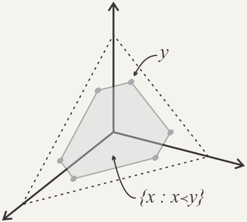
Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

1. $x \prec y$ sii existe una matriz doble estocástica D tal que

$$x = Dy \text{ con } \sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$$

2. Teorema de Birkhoff: El conjunto de matrices doble estocásticas es convexo y sus puntos extremales son las matrices de permutación $x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación



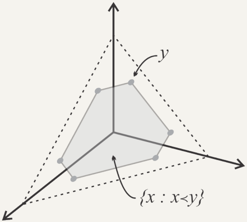
Definiciones alternativas: matrices doble estocásticas

Definiciones

1. $x \prec y$ sii existe una matriz doble estocástica D tal que

$$x = Dy \text{ con } \sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$$

2. Teorema de Birkhoff: El conjunto de matrices doble estocásticas es convexo y sus puntos extremales son las matrices de permutación $x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación



Definiciones alternativas: entropías

Definiciones

Definiciones

3. $x \prec y$ sii $\sum_{i=1}^{d} \phi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \phi(y_i)$ para toda función cóncava ϕ

Schur-concavidad y entropías

Definiciones alternativas: entropías

Definiciones

3. $x \prec y$ sii $\sum_{i=1}^{d} \phi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \phi(y_i)$ para toda función cóncava ϕ

Schur-concavidad y entropías

$\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ es Schur-cóncava si $x \prec y \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$

Definiciones

3. $x \prec y$ sii $\sum_{i=1}^{d} \phi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \phi(y_i)$ para toda función cóncava ϕ

Schur-concavidad y entropías

$\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ es Schur-cóncava si $x \prec y \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$

- entropía de Shannon: $H(x) = -\sum x_i \ln x_i$

Definiciones alternativas: entropías

Definiciones

3. $x \prec y$ sii $\sum_{i=1}^{d} \phi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \phi(y_i)$ para toda función cóncava ϕ

Schur-concavidad y entropías

$\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ es Schur-cóncava si $x \prec y \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$

- entropía de Shannon: $H(x) = -\sum x_i \ln x_i$
- entropías de Tsallis entropy: $T_q(x) = \frac{\sum x_i^q - 1}{1-q}$ with $q \geq 0$ (parámetro entrópico)

Definiciones alternativas: entropías

Definiciones

3. $x \prec y$ sii $\sum_{i=1}^{d} \phi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \phi(y_i)$ para toda función cóncava ϕ

Schur-concavidad y entropías

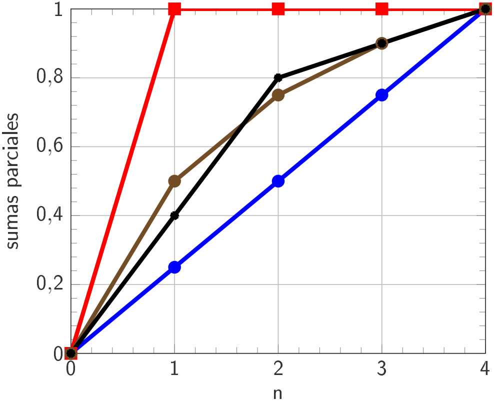
$\Phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ es Schur-cóncava si $x \prec y \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$

- entropía de Shannon: $H(x) = -\sum x_i \ln x_i$
- entropías de Tsallis entropy: $T_q(x) = \frac{\sum x_i^q - 1}{1-q}$ with $q \geq 0$ (parámetro entrópico)
- entropías de Rényi entropy: $R_q(x) = \frac{\ln \sum x_i^q}{1-q}$ with $q \geq 0$ (parámetro entrópico)

Orden parcial: POSET

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$



Retículo de mayorización: **POSET** + ínfimo y supremo

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \dots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

- reflexividad : $x \prec x$

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

- reflexividad : $x \prec x$
- antisimetría: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x = y$

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

- reflexividad : $x \prec x$
- antisimetría: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x = y$
- transitividad: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x \prec z$

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{[x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i\right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

- reflexividad : $x \prec x$
- antisimetría: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x = y$
- transitividad: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x \prec z$

Retículo de mayorización: POSET + ínfimo y supremo

Conjunto de vectores de probabiliad

Let $\Delta_d = \left\{ [x_1, \ldots, x_d] : x_i \geq x_{i+1} \geq 0, \text{ y } \sum_{i=1}^{d} x_i = 1 \geq p_i \right\}$

Conjunto parcialmente ordenado (POSET)

Para todo $x, y, z \in \Delta_N$ se verifica

- reflexividad : $x \prec x$
- antisimetría: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x = y$
- transitividad: si $x \prec y$ e $y \prec x$, entonces $x \prec z$

Mayorización **NO** es un orden total

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Infimum: $x \wedge y$ sii

$x \wedge y \prec x$ y $x \wedge y \prec y$ y $z \prec x \wedge y$

para todo z tal que $z \prec x$ y $z \prec y$

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Infimum: $x \wedge y$ sii
$x \wedge y \prec x$ y $x \wedge y \prec y$ y $z \prec x \wedge y$
para todo z tal que $z \prec x$ y $z \prec y$

Supremum: $x \vee y$ sii
$x \prec x \vee y$ e $y \prec x \wedge y$ y $x \vee y \prec z'$
para todo z' tal que $x \prec z'$ e $y \prec z'$

Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Infimum: $x \wedge y$ sii

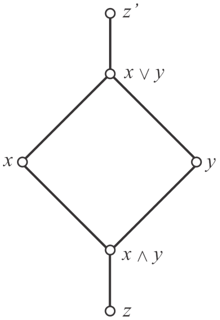
$x \wedge y \prec x$ y $x \wedge y \prec y$ y $z \prec x \wedge y$

para todo z tal que $z \prec x$ y $z \prec y$

Supremum: $x \vee y$ sii

$x \prec x \vee y$ e $y \prec x \wedge y$ y $x \vee y \prec z'$

para todo z' tal que $x \prec z'$ e $y \prec z'$



Retículo de mayorización: POSET + **ínfimo y supremo**

Para todo $x, y \in \Delta_d$ existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$

Infimum: $x \wedge y$ sii

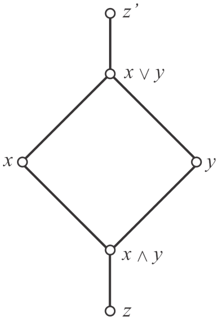
$x \wedge y \prec x$ y $x \wedge y \prec y$ y $z \prec x \wedge y$

para todo z tal que $z \prec x$ y $z \prec y$

Supremum: $x \vee y$ sii

$x \prec x \vee y$ e $y \prec x \wedge y$ y $x \vee y \prec z'$

para todo z' tal que $x \prec z'$ e $y \prec z'$



Retículo de mayoriación [Cicalese y Vaccaro, IEEE TIT **48**,933 (2002)]

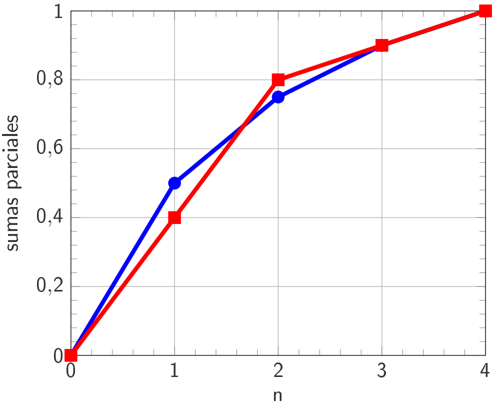
$\mathcal{L} = \langle \Delta_d, \prec, \wedge, \vee \rangle$ forman el retículo de mayorización

Ínfimo y supremo: curva de Lorenz

Ínfimo y supremo: curva de Lorenz

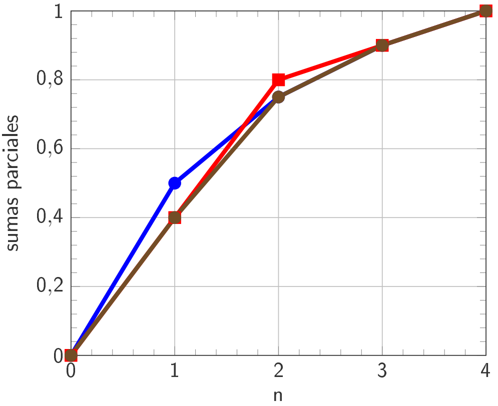
$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \nprec y$ e $y \nprec x$

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\preceq y$ e $y \not\preceq x$

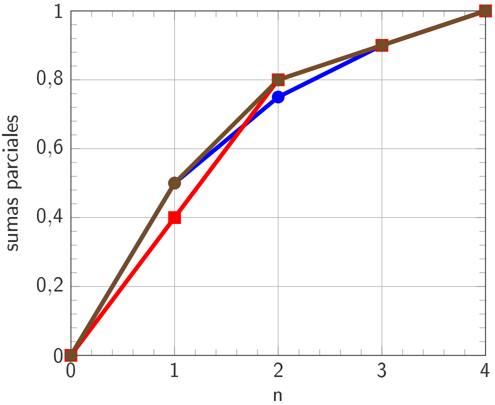


Ínfimo y supremo: curva de Lorenz

$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$



$x = [0{,}5, 0{,}25, 0{,}15, 0{,}1]$ e $y = [0{,}4, 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1]$, $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$



Métrica asociada al retículo

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

$$D(x, y) = H(x) + H(y) - 2H(x \vee y) \text{ con } H(x) = -\sum_i x_i \ln x_i$$

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

$$D(x, y) = H(x) + H(y) - 2H(x \vee y) \text{ con } H(x) = -\sum_i x_i \ln x_i$$

- positiva: $D(x, y) \geq 0$ with $D(x, y) = 0$ sii $x = y$

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

$$D(x,y) = H(x) + H(y) - 2H(x \vee y) \text{ con } H(x) = -\sum_i x_i \ln x_i$$

- positiva: $D(x,y) \geq 0$ with $D(x,y) = 0$ sii $x = y$
- simétrica: $D(x,y) = D(y,x)$

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

$$D(x,y) = H(x) + H(y) - 2H(x \vee y) \text{ con } H(x) = -\sum_i x_i \ln x_i$$

- positiva: $D(x,y) \geq 0$ with $D(x,y) = 0$ sii $x = y$
- simétrica: $D(x,y) = D(y,x)$
- desigualdad triangular: $D(x,y) + D(y,z) \geq D(x,z)$

Métrica asociada al retículo

Métrica [Cicalese, Gargano, Vaccaro, ISIT 2013])

Sean $x, y \in \Delta_d$.

La distancia/métrica $D : \Delta_d \times \Delta_d \mapsto [0, +\infty)$ se define:

$$D(x,y) = H(x) + H(y) - 2H(x \vee y) \text{ con } H(x) = -\sum_i x_i \ln x_i$$

- positiva: $D(x,y) \geq 0$ with $D(x,y) = 0$ sii $x = y$
- simétrica: $D(x,y) = D(y,x)$
- desigualdad triangular: $D(x,y) + D(y,z) \geq D(x,z)$
- compatible con el retículo:
  si $x \prec y \prec z \Rightarrow D(x,z) = D(x,y) + D(y,z)$

Outline

Teorema de Schur-Horn

Teorema de Schur (1929)

Sea H una matriz Hermítica cuya diagonal es $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y autovalores $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$, entonces

Teorema de Schur-Horn

Teorema de Schur (1929)

Sea H una matriz Hermítica cuya diagonal es $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y autovalores $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$, entonces $d \prec \lambda$

Teorema de Schur-Horn

Teorema de Schur (1929)

Sea H una matriz Hermítica cuya diagonal es $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y autovalores $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$, entonces $d \prec \lambda$

Teorema Horn (1954)

Si los vectores $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ son tales que $d \prec \lambda$, entonces

Teorema de Schur-Horn

Teorema de Schur (1929)

Sea H una matriz Hermítica cuya diagonal es $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y autovalores $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$, entonces $d \prec \lambda$

Teorema Horn (1954)

Si los vectores $d = [d_1, \ldots, d_N]$ y $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ son tales que $d \prec \lambda$, entonces

existe una matriz hermtíca H cuya diagonal es d y con autovalores λ

Mayorización en el universo cuántico

El conjunto de matrices densidad

Sea $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{C}^{d\times d} | \rho \geq 0 \text{ y } \operatorname{Tr} \rho = 1\}$

El conjunto de matrices densidad

Sea $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{C}^{d\times d} | \rho \geq 0 \text{ y } \operatorname{Tr} \rho = 1\}$

- Hermítica: $\rho = \rho^\dagger$

El conjunto de matrices densidad

Sea $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{C}^{d\times d} | \rho \geq 0 \text{ y } \operatorname{Tr}\rho = 1\}$

- Hermítica: $\rho = \rho^\dagger$
- $\mathcal{C}$ es convexo: $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \in \mathcal{C}$ con $p \in [0,1]$

Preliminares: estados cuánticos

El conjunto de matrices densidad

Sea $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{C}^{d\times d} | \rho \geq 0 \text{ y } \operatorname{Tr}\rho = 1\}$

- Hermítica: $\rho = \rho^\dagger$
- $\mathcal{C}$ es convexo: $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \in \mathcal{C}$ con $p \in [0,1]$
- puntos extremos = estados puros: $\rho^2 = \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$

El conjunto de matrices densidad

Sea $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{C}^{d\times d} | \rho \geq 0 \text{ y } \operatorname{Tr}\rho = 1\}$

- Hermítica: $\rho = \rho^\dagger$
- $\mathcal{C}$ es convexo: $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \in \mathcal{C}$ con $p \in [0,1]$
- puntos extremos = estados puros: $\rho^2 = \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$
- descomposición espectral: $\rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$

Operaciones cuánticas

Operaciones cuánticas

$$\rho \;—\boxed{\mathcal{E}}—\; \mathcal{E}(\rho)$$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{---}\boxed{\mathcal{E}}\text{---}\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;—\boxed{\mathcal{E}}—\; \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\operatorname{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \operatorname{Tr} \rho = 1$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{—}\boxed{\mathcal{E}}\text{—}\; \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\operatorname{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \operatorname{Tr} \rho = 1$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{---}\boxed{\mathcal{E}}\text{---}\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\operatorname{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \operatorname{Tr} \rho = 1$

Representación de Kraus de mapas CPTP:

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{---}\boxed{\mathcal{E}}\text{---}\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\operatorname{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \operatorname{Tr} \rho = 1$

Representación de Kraus de mapas CPTP:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k P_k \rho P_k^\dagger \text{ con } \sum_k P_k^\dagger P_k = I$$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{---}\boxed{\mathcal{E}}\text{---}\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}\,\rho = 1$

Representación de Kraus de mapas CPTP:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k P_k \rho P_k^\dagger \text{ con } \sum_k P_k^\dagger P_k = I$$

Ejemplos:

- mapas biestocásticos: $\sum_k P_k P_k^\dagger = I$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;—\boxed{\mathcal{E}}—\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\operatorname{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \operatorname{Tr} \rho = 1$

Representación de Kraus de mapas CPTP:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k P_k \rho P_k^\dagger \text{ con } \sum_k P_k^\dagger P_k = I$$

Ejemplos:

- mapas biestocásticos: $\sum_k P_k P_k^\dagger = I$
- evoluciones unitarias: $\mathcal{E}(\rho) = U \rho U^\dagger$ con $UU^\dagger = U^\dagger U = I$

Operaciones cuánticas

$$\rho \;\text{---}\boxed{\mathcal{E}}\text{---}\quad \mathcal{E}(\rho)$$

- completamente positivo (CP): $\mathcal{E}(\rho) \geq 0$ y $\mathcal{E} \otimes I(\rho \otimes \sigma) \geq 0$
- preserva la traza (TP): $\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}\,\rho = 1$

Representación de Kraus de mapas CPTP:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k P_k \rho P_k^\dagger \text{ con } \sum_k P_k^\dagger P_k = I$$

Ejemplos:

- mapas biestocásticos: $\sum_k P_k P_k^\dagger = I$
- evoluciones unitarias: $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ con $UU^\dagger = U^\dagger U = I$
- medidas proyectivas: $\mathcal{E}(\rho) = \sum_k p_k P_k,\ p_k = \mathrm{Tr}\,\rho P_k,\ P_k P_{k'} = \delta_{k,k'}$

Sistemas bipartitos

- Sistema compuesto: ρ^{AB} actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$

Preliminares: sistemas compuestos

Sistemas bipartitos

- Sistema compuesto: ρ^{AB} actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Traza parcial:

$$\mathrm{Tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) = |a_1\rangle \langle a_2| \,\mathrm{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|),$$

con $|a_i\rangle \in \mathbb{C}^A, |b_i\rangle \in \mathbb{C}^B$

Sistemas bipartitos

- Sistema compuesto: ρ^{AB} actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Traza parcial:

$$\mathrm{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \,\mathrm{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|),$$

  con $|a_i\rangle \in \mathbb{C}^A, |b_i\rangle \in \mathbb{C}^B$
- Subsistemas (matriz densidad reducida):

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B\, \rho^{AB} \text{ y } \rho^B = \mathrm{Tr}_A\, \rho^{AB}$$

Sistemas bipartitos

- Sistema compuesto: ρ^{AB} actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Traza parcial:

$$\mathrm{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \, \mathrm{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|),$$

  con $|a_i\rangle \in \mathbb{C}^A, |b_i\rangle \in \mathbb{C}^B$
- Subsistemas (matriz densidad reducida):

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B \, \rho^{AB} \text{ y } \rho^B = \mathrm{Tr}_A \, \rho^{AB}$$

- Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$ con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$

Sistemas bipartitos

- Sistema compuesto: ρ^{AB} actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Traza parcial:

$$\mathrm{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \,\mathrm{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|),$$

  con $|a_i\rangle \in \mathbb{C}^A, |b_i\rangle \in \mathbb{C}^B$
- Subsistemas (matriz densidad reducida):

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B\, \rho^{AB} \text{ y } \rho^B = \mathrm{Tr}_A\, \rho^{AB}$$

- Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$ con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$
- Estado entrelazado = Estado no separable

Sistemas bipartitos: caso puro

- Sistema compuesto puro: $\rho^{AB} = |\psi^{AB}\rangle \langle\psi^{AB}|$, con $|\psi^{AB}\rangle \in \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$

Sistemas bipartitos: caso puro

- Sistema compuesto puro: $\rho^{AB} = |\psi^{AB}\rangle \langle\psi^{AB}|$, con $|\psi^{AB}\rangle \in \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Descomposición de Schmidt: $\exists\{|i^A\rangle\}, \{|i^B\rangle\}$ b.o.n. de A y B /

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle\,,\ \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_i \lambda_i = 1$$

Sistemas bipartitos: caso puro

- Sistema compuesto puro: $\rho^{AB} = |\psi^{AB}\rangle \langle\psi^{AB}|$, con $|\psi^{AB}\rangle \in \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Descomposición de Schmidt: $\exists\{|i^A\rangle\}, \{|i^B\rangle\}$ b.o.n. de A y B /

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle\,,\ \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_i \lambda_i = 1$$

- Subsistemas:

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B\, \rho^{AB} = \sum_i \lambda_i\, |i^A\rangle \langle i^A| \text{ y } \rho^B = \mathrm{Tr}_A\, \rho^{AB} = \sum_i \lambda_i\, |i^B\rangle \langle i^B|$$

Sistemas bipartitos: caso puro

- Sistema compuesto puro: $\rho^{AB} = |\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|$, con $|\psi^{AB}\rangle \in \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$
- Descomposición de Schmidt: $\exists\{|i^A\rangle\}, \{|i^B\rangle\}$ b.o.n. de A y B /

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\,|i^A\rangle\,|i^B\rangle\,,\ \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_i \lambda_i = 1$$

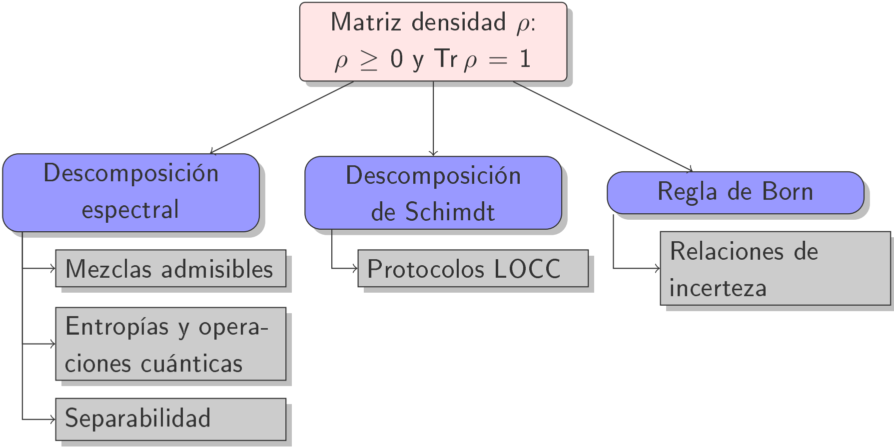
- Subsistemas:

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B\,\rho^{AB} = \sum_i \lambda_i\,|i^A\rangle\langle i^A| \text{ y } \rho^B = \mathrm{Tr}_A\,\rho^{AB} = \sum_i \lambda_i\,|i^B\rangle\langle i^B|$$

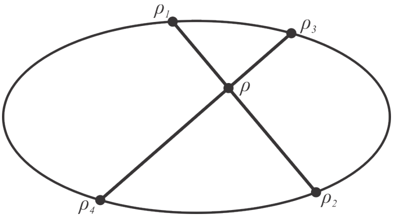
- Estado separable = estado producto:

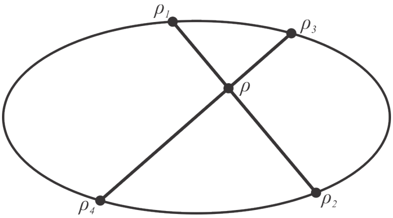
$$|\psi^{AB}\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle \text{ o } \rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$$

con $\rho^{A(B)} = |\psi^{A(B)}\rangle\langle\psi^{A(B)}|$

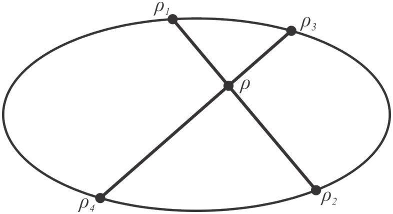

Matriz densidad ρ:
$\rho \geq 0$ y $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$
Descomposición espectral
Descomposición de Schimdt
Regla de Born
Mezclas admisibles
Entropías y operaciones cuánticas
Separabilidad
Protocolos LOCC
Relaciones de incerteza

Teorema de Schrödinger





Dada una matriz densidad ρ cuya descomposición espectral es $\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left|e_i\right\rangle \left\langle e_i\right|$,



Dada una matriz densidad ρ cuya descomposición espectral es
$\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|$,
¿qué condiciones debe cumplir un ensamble $\{p_j, |\psi_j\rangle\}$ para que
$\rho = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$?

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Una matriz densidad ρ cuya decomposición espectral es $\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|$

Teorema de Schrödinger

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Una matriz densidad ρ cuya decomposición espectral es
$\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left|e_i\right\rangle \left\langle e_i\right|$
puede escribirse como un esamble de estados puros $\{p_j, \left|\psi_j\right\rangle\}_{j=1}^{M}$, i.e.
$\rho = \sum_{j=1}^{M} p_i \left|\psi_j\right\rangle \left\langle \psi_j\right|$

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Una matriz densidad ρ cuya decomposición espectral es
$\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left|e_i\right\rangle \left\langle e_i\right|$
puede escribirse como un esamble de estados puros $\{p_j, \left|\psi_j\right\rangle\}_{j=1}^{M}$, i.e.
$\rho = \sum_{j=1}^{M} p_i \left|\psi_j\right\rangle \left\langle \psi_j\right|$
sii existe una matrix unitaria U de $M \times M$ tal que

$$\left|\psi_i\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} \sqrt{\lambda_j} \left|e_j\right\rangle$$

Teorema de Schrödinger

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Una matriz densidad ρ cuya decomposición espectral es
$\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left|e_i\right\rangle \left\langle e_i\right|$
puede escribirse como un esamble de estados puros $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^{M}$, i.e.
$\rho = \sum_{j=1}^{M} p_i \left|\psi_j\right\rangle \left\langle \psi_j\right|$
sii existe una matrix unitaria U de $M \times M$ tal que

$$\left|\psi_i\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} \sqrt{\lambda_j} \left|e_j\right\rangle$$

Teorema de clasficación de ensambles (Gisin (1989) y Hughston, Jozsa and Wootters (1993)):
Dada una matriz denisdad, este teorema nos dice todas las formas en las que ésta se puede expresar como un esamble de estados puros (combinación convexa de estados puros)

Teorema de mezclado de Schrödinger Schrödinger (1936)

Una matriz densidad ρ cuya decomposición espectral es
$\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|$
puede escribirse como un esamble de estados puros $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_{j=1}^{M}$, i.e.
$\rho = \sum_{j=1}^{M} p_i |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$
sii existe una matrix unitaria U de $M \times M$ tal que

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle$$

sii $p = [p_1, \ldots, p_M] \prec \lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_d]$ (Nielsen, PRA 62, 052308 (2000))

Teorema de clasficación de ensambles (Gisin (1989) y Hughston, Jozsa and Wootters (1993)):
Dada una matriz denisdad, este teorema nos dice todas las formas en las que ésta se puede expresar como un esamble de estados puros (combinación convexa de estados puros)

Mayorización entre matrices densidad

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos:

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$,

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I = \sum_k P_k P_k^\dagger$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I = \sum_k P_k P_k^\dagger$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \rho = \mathcal{E}(\sigma)$$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [e.g. Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I = \sum_k P_k P_k^\dagger$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \rho = \mathcal{E}(\sigma)$$

mapas biestocásticos $\leftrightarrow$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I = \sum_k P_k P_k^\dagger$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \rho = \mathcal{E}(\sigma)$$

mapas biestocásticos $\leftrightarrow$ combinaciones convexas de unitarias $\leftrightarrow$

Mayorización entre matrices densidad

Definición [*e.g.* Nielsen and Vidal, QIC **1**, 76 (2001)]

Sean ρ y σ dos matrices densidad actuando en $\mathbb{C}^d$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \lambda(\rho) \prec \lambda(\sigma)$$

$\lambda(\rho)$, $\lambda(\sigma)$: vectores de probabilidad de autovalores de ρ y σ

Teorema de Ulhmann [Ulhmann, RMP **1**, 147 (1970)]

$$\rho \prec \sigma \quad \text{sii} \quad \rho = \sum_i p_i U_i \sigma U_i^\dagger \qquad U_i\text{:matriz unitaria}$$

$x \prec y$ sii $x = \sum_k p_k \Pi_k y$ con $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$ y Π_k matrices de permutación

Teorema de mapas biestocásticos [Chefles, PRA **65**, 052314 (2002)]

Biestocásticos: $\rho = \mathcal{E}(\sigma) = \sum_k P_k \sigma P_k^\dagger$, $P_k \geq 0$, $\sum_k P_k^\dagger P_k = I = \sum_k P_k P_k^\dagger$

$$\rho \prec \sigma \text{ sii } \rho = \mathcal{E}(\sigma)$$

mapas biestocásticos $\leftrightarrow$ combinaciones convexas de unitarias $\leftrightarrow$ mapas unitales

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho))$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln \mathrm{Tr}\,\rho^q}{1-q}$ (Rényi)

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln \mathrm{Tr}\,\rho^q}{1-q}$ (Rényi)
- entropías no-aditivas: $T_q(\rho) = \frac{\mathrm{Tr}\,\rho^q - 1}{1-q}$ (Tsallis)
  $T_q(\rho \otimes \sigma) = T_q(\rho) + T_q(\sigma) + (1-q) T_q(\rho) T_q(\sigma)$

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\operatorname{Tr}\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d}\phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho\otimes\sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\ln\rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln\operatorname{Tr}\rho^q}{1-q}$ (Rényi)
- entropías no-aditivas: $T_q(\rho) = \frac{\operatorname{Tr}\rho^q - 1}{1-q}$ (Tsallis)
  $T_q(\rho\otimes\sigma) = T_q(\rho) + T_q(\sigma) + (1-q)T_q(\rho)T_q(\sigma)$

Propiedades

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln \mathrm{Tr}\,\rho^q}{1-q}$ (Rényi)
- entropías no-aditivas: $T_q(\rho) = \frac{\mathrm{Tr}\,\rho^q - 1}{1-q}$ (Tsallis)
  $T_q(\rho \otimes \sigma) = T_q(\rho) + T_q(\sigma) + (1-q) T_q(\rho) T_q(\sigma)$

Propiedades

- $\rho = \sum_{i=1}^{M} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\rho) \leq H_{(h,\phi)}(p)$

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\operatorname{Tr}\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d}\phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho \ln \rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln \operatorname{Tr}\rho^q}{1-q}$ (Rényi)
- entropías no-aditivas: $T_q(\rho) = \frac{\operatorname{Tr}\rho^q - 1}{1-q}$ (Tsallis)
  $T_q(\rho \otimes \sigma) = T_q(\rho) + T_q(\sigma) + (1-q)T_q(\rho)T_q(\sigma)$

Propiedades

- $\rho = \sum_{i=1}^{M} p_i \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\rho) \leq H_{(h,\phi)}(p)$
- $\rho \underset{\text{unital}}{\rightarrow} \mathcal{E}(\rho) \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\mathcal{E}(\rho)) \geq S_{(h,\phi)}(\rho)$

Entropías cuánticas [Bosyk *et al*, QINP **15**, 3393 (2016)]

Schur-concavidad: $\rho \prec \sigma \Rightarrow S(\sigma) \geq S(\rho)$

$$S_{(h,\phi)}(\rho) = h(\mathrm{Tr}\,\phi(\rho)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \phi(\lambda_i)\right) = H_{(h,\phi)}(\lambda)$$

(i) h creciente y ϕ cóncava (ii) h decreciente y ϕ cónvexa

- entropía aditivas: $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$;
  $S_{vN}(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho$ (vN); $R_q(\rho) = \frac{\ln \mathrm{Tr}\,\rho^q}{1-q}$ (Rényi)
- entropías no-aditivas: $T_q(\rho) = \frac{\mathrm{Tr}\,\rho^q - 1}{1-q}$ (Tsallis)
  $T_q(\rho \otimes \sigma) = T_q(\rho) + T_q(\sigma) + (1-q) T_q(\rho) T_q(\sigma)$

Propiedades

- $\rho = \sum_{i=1}^{M} p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\rho) \leq H_{(h,\phi)}(p)$
- $\rho \underset{\text{unital}}{\rightarrow} \mathcal{E}(\rho) \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\mathcal{E}(\rho)) \geq S_{(h,\phi)}(\rho)$
  $E_1 = \left|0\right\rangle \left\langle 0\right|$ y $E_2 = \left|0\right\rangle \left\langle 1\right| : \rho \underset{\text{unital}}{\rightarrow} \sigma = \mathcal{E}(\rho) = \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| \Rightarrow S_{(h,\phi)}(\sigma) = 0$

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable,

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

Criterio de mayorización [Nielsen y Kempe, PRL **86**, 5184 (2001)]

si ρ^{AB} es separable,

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

Criterio de mayorización [Nielsen y Kempe, PRL **86**, 5184 (2001)]

si ρ^{AB} es separable, $\rho^{AB} \prec \rho^A$ y $\rho^{AB} \prec \rho^A$

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

Criterio de mayorización [Nielsen y Kempe, PRL **86**, 5184 (2001)]

si ρ^{AB} es separable, $\rho^{AB} \prec \rho^A$ y $\rho^{AB} \prec \rho^A \Rightarrow$ crit. entrópico

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

Criterio de mayorización [Nielsen y Kempe, PRL **86**, 5184 (2001)]

si ρ^{AB} es separable, $\rho^{AB} \prec \rho^A$ y $\rho^{AB} \prec \rho^A \Rightarrow$ crit. entrópico

Los estados separables son globalmente más desordenados que localmente

Criterios de separabilidad: entrópico y mayorización

Separabilidad/Entrelazamiento

Estado separable: $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$

No separable = entrelazado

Criterio entrópico [Horodecki *et al.* PLA **210**, 377 (1996)]

Caso clásico: X, Y v.a. clásicas con pdf conjuta p_{XY}

$H(p_{XY}) \geq H(p_X)$ y $H(p_{XY}) \geq H(p_Y)$

Caso cuántico:

si ρ^{AB} es separable, $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^A)$ y $S(\rho^{AB}) \geq S(\rho^B)$

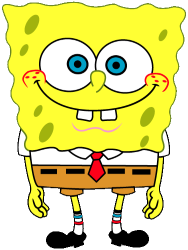
Ej. : $|\psi^{AB}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, $S(\rho^{AB}) = 0 < S(\rho^A) = \ln 2$

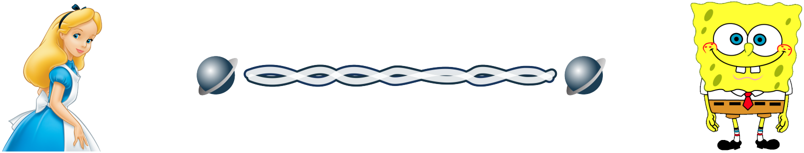
Criterio de mayorización [Nielsen y Kempe, PRL **86**, 5184 (2001)]

si ρ^{AB} es separable, $\rho^{AB} \prec \rho^A$ y $\rho^{AB} \prec \rho^A \Rightarrow$ crit. entrópico

Los estados separables son globalmente más desordenados que localmente

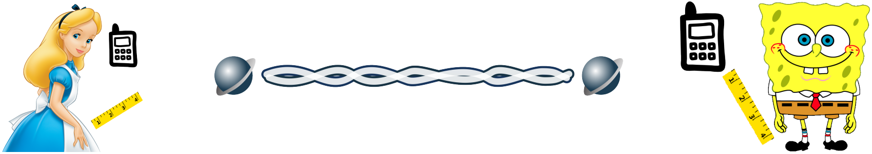
Las propiedades espectrales no determinan el entrelazamiento en general



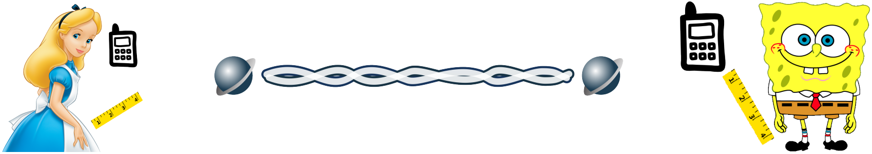


- Alice y Bob comparten un estado inicial entrelazado $|\psi\rangle$

Transformaciones de entrelazamiento



- Alice y Bob comparten un estado inicial entrelazado $|\psi\rangle$
- Pretenden obtener el estado objetivo entrelazado $|\phi\rangle$ por medio de **operaciones locales y comunicación clásica (LOCC)**



- Alice y Bob comparten un estado inicial entrelazado $|\psi\rangle$
- Pretenden obtener el estado objetivo entrelazado $|\phi\rangle$ por medio de **operaciones locales y comunicación clásica (LOCC)**

¿Qué condición permite transformar un estado entrelazado en otro por medio de LOCC?

Teorema de Nielsen

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\,|i^A\rangle\,|i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\,|j^A\rangle\,|j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\longrightarrow} |\phi\rangle$$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\longrightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si}$$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \rho_\psi^{A(B)} \prec \rho_\phi^{A(B)}$$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \rho_\psi^{A(B)} \prec \rho_\phi^{A(B)}$$

Observación 1: notar que los autovalores de un estado reducido de un estado puro bipartito coincide con los coeficientes de Schmidt:

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \rho_\psi^{A(B)} \prec \rho_\phi^{A(B)}$$

Observación 1: notar que los autovalores de un estado reducido de un estado puro bipartito coincide con los coeficientes de Schmidt: $\rho_\psi^{A(B)} \equiv \mathrm{Tr}_{A(B)} |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \, |i^{A(B)}\rangle \langle i^{A(B)}|$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \rho_\psi^{A(B)} \prec \rho_\phi^{A(B)}$$

Observación 1: notar que los autovalores de un estado reducido de un estado puro bipartito coincide con los coeficientes de Schmidt:
$\rho_\psi^{A(B)} \equiv \mathrm{Tr}_{A(B)}\, |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\, |i^{A(B)}\rangle\langle i^{A(B)}|$

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \psi \prec \phi$$

Teorema de Nielsen [PRL **83**, 436 (1999)]

Consideremos los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con descomposiciones Schmidt:

- inicial: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\psi_i}\, |i^A\rangle\, |i^B\rangle$ con $\psi = [\psi_1, \ldots, \psi_N] \in \delta_N$
- final: $|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\phi_j}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle$ con $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_N] \in \delta_N$

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \rho_\psi^{A(B)} \prec \rho_\phi^{A(B)}$$

Observación 1: notar que los autovalores de un estado reducido de un estado puro bipartito coincide con los coeficientes de Schmidt:
$\rho_\psi^{A(B)} \equiv \mathrm{Tr}_{A(B)} |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\, |i^{A(B)}\rangle \langle i^{A(B)}|$

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle \text{ si y sólo si } \psi \prec \phi$$

Observación 2: esta condición no depende de la base de Schmidt

Como es de esperar, la condición de Nielsen no se satisface en general

Como es de esperar, la condición de Nielsen no se satisface en general

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$

Como es de esperar, la condición de Nielsen no se satisface en general

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}2}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}05}\,|33\rangle$

Como es de esperar, la condición de Nielsen no se satisface en general

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}2}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}05}\,|33\rangle$

Como es de esperar, la condición de Nielsen no se satisface en general

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}15}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}2}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}05}\,|33\rangle$

uno tiene $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$ dado que $\psi \nprec \phi$ and $\phi \nprec \psi$

Transformaciones de entrelazamiento aproximadas

estado inicial	estado final
$\vert\psi\rangle$	$\vert\phi\rangle$

Transformaciones de entrelazamiento aproximadas

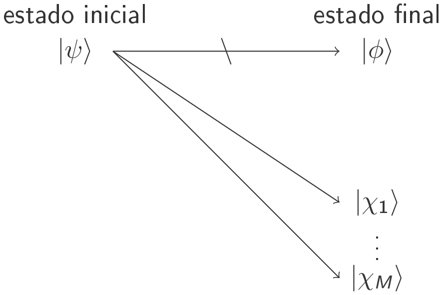
estado inicial		estado final
$\vert\psi\rangle$	$\not\longrightarrow$	$\vert\phi\rangle$

Transformaciones de entrelazamiento aproximadas

$$
\begin{tikzcd}
\text{estado inicial} & \text{estado final} \\
|\psi\rangle \arrow[r, "\backslash" marking] \arrow[dr] & |\phi\rangle \\
 & |\chi_1\rangle
\end{tikzcd}
$$

Transformaciones de entrelazamiento aproximadas

$$
\begin{tikzcd}
\text{estado inicial} & & \text{estado final} \\
|\psi\rangle \arrow[rr, "\backslash" marking] \arrow[ddrr] \arrow[dddrr] & & |\phi\rangle \\
& & \\
& & |\chi_1\rangle \\
& & |\chi_M\rangle
\end{tikzcd}
$$


estado inicial
estado final
$|\psi\rangle$
$|\phi\rangle$
$|\chi_1\rangle$
$\vdots$
$|\chi_M\rangle$

$$\begin{tikzcd}
\text{estado inicial} & \text{estado final} \\
|\psi\rangle \arrow[r, "/" marking] \arrow[dr] \arrow[dddr] & |\phi\rangle \\
& |\chi_1\rangle \\
& \vdots \\
& |\chi_M\rangle
\end{tikzcd}$$

Objetivo: encontrar el estado $|\chi\rangle$ *más cercano* a $|\phi\rangle$

Transformaciones aproximadas: **Fidelidad**

Criterio de Vidal: estado óptimo *et. al* [PRA **62**, 012304 (2000)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final tales que $|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\to} |\phi\rangle$

Transformaciones aproximadas: **Fidelidad**

Criterio de Vidal: estado óptimo *et. al* [PRA **62**, 012304 (2000)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final tales que $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$

Se define $|\chi^{\text{opt}}\rangle$ como el estado *más cercano* al final en el sentido de máxima **fidelidad**:

Criterio de Vidal: estado óptimo *et. al* [PRA **62**, 012304 (2000)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final tales que $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$

Se define $|\chi^{\text{opt}}\rangle$ como el estado *más cercano* al final en el sentido de máxima **fidelidad**:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{opt}}\rangle \equiv$$

Transformaciones aproximadas: Fidelidad

Criterio de Vidal: estado óptimo *et. al* [PRA **62**, 012304 (2000)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final tales que $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\not\rightarrow} |\phi\rangle$

Se define $|\chi^{\text{opt}}\rangle$ como el estado *más cercano* al final en el sentido de máxima **fidelidad**:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{opt}}\rangle \equiv \underset{|\chi\rangle : |\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi\rangle}{\text{argmax}} F(|\phi\rangle, |\chi\rangle),$$

donde $F(|\phi\rangle, |\chi\rangle) = |\langle\phi|\chi\rangle|^2$ es la fidelidad entre los *estados* $|\phi\rangle$ y $|\chi\rangle$

Transformaciones aproximadas: **Fidelidad**

Criterio de Vidal: estado óptimo *et. al* [PRA **62**, 012304 (2000)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final tales que $|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\rightarrow} |\phi\rangle$

Se define $|\chi^{\mathrm{opt}}\rangle$ como el estado *más cercano* al final en el sentido de máxima **fidelidad**:

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{opt}}\rangle \equiv \underset{|\chi\rangle : |\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi\rangle}{\operatorname{argmax}} F(|\phi\rangle, |\chi\rangle),$$

donde $F(|\phi\rangle, |\chi\rangle) = |\langle\phi|\chi\rangle|^2$ es la fidelidad entre los *estados* $|\phi\rangle$ y $|\chi\rangle$

Problema equivalente

$$\chi^{\mathrm{opt}} = \underset{\chi : \psi \prec \chi}{\operatorname{argmax}} F(\phi, \chi)$$

donde $F(\phi, \chi) = \left(\sum_i \sqrt{\phi_i \chi_i}\right)^2$ es la fidelidad entre los *vectores* ϕ y χ

Transformaciones aproximadas: **Métrica del retículo**

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle$

Transformaciones aproximadas: **Métrica del retículo**

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \nRightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{sup}}\rangle$$

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{sup}}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\chi_j^{\mathrm{sup}}} |j^A\rangle |j^B\rangle \text{ con } \chi^{\mathrm{sup}} \equiv \psi \vee \phi$$

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{sup}}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\chi_j^{\mathrm{sup}}}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle \text{ con } \chi^{\mathrm{sup}} \equiv \psi \vee \phi$$

- Más "cercano" al objetivo:

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \nRightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{sup}}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\chi_j^{\mathrm{sup}}}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle \text{ con } \chi^{\mathrm{sup}} \equiv \psi \vee \phi$$

- Más "cercano" al objetivo: $|\chi^{\mathrm{sup}}\rangle = \underset{|\chi\rangle : |\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi\rangle}{\operatorname{argmin}} D(|\phi\rangle, |\chi\rangle)$

  $D(|\phi\rangle, |\chi\rangle) = D(\phi, \chi) = H(\phi) + H(\chi) - 2H(\phi \vee \chi)$

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \;\not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\to} |\chi^{\text{sup}}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\chi_j^{\text{sup}}}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle \;\text{ con }\; \chi^{\text{sup}} \equiv \psi \vee \phi$$

- Más "cercano" al objetivo: $|\chi^{\text{sup}}\rangle = \underset{|\chi\rangle : |\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\to} |\chi\rangle}{\text{argmin}} D(|\phi\rangle, |\chi\rangle)$

  $D(|\phi\rangle, |\chi\rangle) = D(\phi, \chi) = H(\phi) + H(\chi) - 2H(\phi \vee \chi)$
- Posse más entrelazamiento que χ^{opt}:

Observación [Bosyk *et. al*, Physica A **473**, 403 (2017)]

$$|\alpha\rangle \prec |\beta\rangle \prec |\delta\rangle \not\Rightarrow F(|\alpha\rangle, |\beta\rangle) \geq F(|\alpha\rangle, |\delta\rangle)$$

La fidelidad no respeta, en general, el orden asociado al retículo de mayorización

Criterio Bosyk *et. al* [Physica A **473**, 403 (2017)]

Estado supremo:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{sup}}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\chi_j^{\text{sup}}}\, |j^A\rangle\, |j^B\rangle \;\text{ con }\; \chi^{\text{sup}} \equiv \psi \vee \phi$$

- Más "cercano" al objetivo: $|\chi^{\text{sup}}\rangle = \underset{|\chi\rangle : |\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi\rangle}{\operatorname{argmin}} D(|\phi\rangle, |\chi\rangle)$

  $D(|\phi\rangle, |\chi\rangle) = D(\phi, \chi) = H(\phi) + H(\chi) - 2H(\phi \vee \chi)$
- Posse más entrelazamiento que χ^{opt}:

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{sup}}\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\text{opt}}\rangle$$

Transformaciones de entrelazamiento no determinísticas

estado inicial	estado final
$\|\psi\rangle$	$\|\phi\rangle$

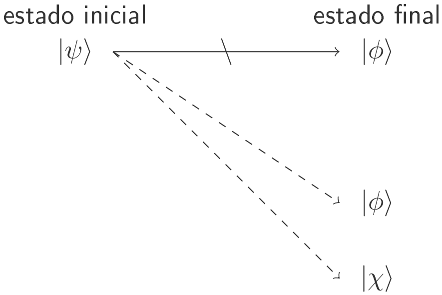
Transformaciones de entrelazamiento no determinísticas

$$\begin{array}{ccc} \text{estado inicial} & & \text{estado final} \\ |\psi\rangle & \not\longrightarrow & |\phi\rangle \end{array}$$

Transformaciones de entrelazamiento no determinísticas

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
\text{estado inicial} & \text{estado final} \\[-1.5em]
|\psi\rangle \arrow[r, "/" marking] \arrow[dr, dashed] & |\phi\rangle \\
 & |\phi\rangle
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{estado inicial} & \text{estado final} \\
{|\psi\rangle} \arrow[r, "\setminus" marking] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, dashed] & {|\phi\rangle} \\
& {|\phi\rangle} \\
& {|\chi\rangle}
\end{tikzcd}
$$



Objetivo: encontrar la máxima probabilidad de transformación

Máxima probabilidad de conversión

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

La probabilidad máxima de conversión del estado inical al final por medio de LOCC es:

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

La probabilidad máxima de conversión del estado inical al final por medio de LOCC es:

$$\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = \min_{l\in[1,n]} \frac{E_l(\psi)}{E_l(\phi)}$$

donde $E_l(\psi) = \sum_{l'=l}^{N} \psi_{l'}$ con $l = 1, \ldots, N$

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

La probabilidad máxima de conversión del estado inical al final por medio de LOCC es:

$$\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = \min_{l\in[1,n]} \frac{E_l(\psi)}{E_l(\phi)}$$

donde $E_l(\psi) = \sum_{l'=l}^{N} \psi_{l'}$ con $l = 1, \ldots, N$

1. $|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{opt}}\rangle$
2. Alice mide: M y N tales que $MM^\dagger + NN^\dagger = I$ y $M \otimes I\, |\chi^{\mathrm{opt}}\rangle = \sqrt{r_1}\, |\phi\rangle$ con $r_1 = \mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right)$

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

La probabilidad máxima de conversión del estado inical al final por medio de LOCC es:

$$\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = \min_{l\in[1,n]} \frac{E_l(\psi)}{E_l(\phi)}$$

donde $E_l(\psi) = \sum_{l'=l}^{N} \psi_{l'}$ con $l = 1, \ldots, N$

1. $|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\chi^{\mathrm{opt}}\rangle$
2. Alice mide: M y N tales que $MM^\dagger + NN^\dagger = I$ y $M \otimes I\,|\chi^{\mathrm{opt}}\rangle = \sqrt{r_1}\,|\phi\rangle$ con $r_1 = \mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right)$

Máxima probabilidad de conversión

Teorema de Vidal [Phys. Rev. Lett. **83**, 1046 (199)]

Sean $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ los estados inicial y final

La probabilidad máxima de conversión del estado inical al final por medio de LOCC es:

$$\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = \min_{l\in[1,n]} \frac{E_l(\psi)}{E_l(\phi)}$$

donde $E_l(\psi) = \sum_{l'=l}^{N} \psi_{l'}$ con $l = 1, \ldots, N$

- $\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = 1$ sii $\psi \prec \phi$ (se reduce al caso de Nielsen)
- si el número de coeficientes de Schmidt no nulos de $|\psi\rangle$ es menor que el de $|\phi\rangle$, $\mathrm{Prob}\left(|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle\right) = 0$

Transformaciones asistida por entrelazamiento

estado inicial	estado final
$\vert\psi\rangle$	$\vert\phi\rangle$

Transformaciones asistida por entrelazamiento

$$\begin{array}{ccc} \text{estado inicial} & & \text{estado final} \\ |\psi\rangle & \not\longrightarrow & |\phi\rangle \end{array}$$

estado inicial estado final

$$|\psi\rangle \not\longrightarrow |\phi\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |c\rangle \qquad\qquad |\phi\rangle \otimes |c\rangle$$

catalizador

estado inicial   estado final

$$|\psi\rangle \not\longrightarrow |\phi\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |c\rangle \longrightarrow |\phi\rangle \otimes |c\rangle$$

catalizador

$$\begin{array}{ccc} \text{estado inicial} & & \text{estado final} \\ |\psi\rangle & \not\xrightarrow{\hspace{8em}} & |\phi\rangle \\ & & \\ |\psi\rangle \otimes |c\rangle & \xrightarrow{\hspace{8em}} & |\phi\rangle \otimes |c\rangle \end{array}$$

catalizador

Objetivo: encontrar el catalizador

Ejemplo

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$
- $\phi \otimes c = [0{,}30, 0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}00, 0{,}00]$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$
- $\phi \otimes c = [0{,}30, 0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}00, 0{,}00]$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$
- $\phi \otimes c = [0{,}30, 0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}00, 0{,}00]$

Por lo tanto

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\not\leftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$
- $\phi \otimes c = [0{,}30, 0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}00, 0{,}00]$

Por lo tanto

$$\psi \otimes c \prec \phi \otimes c$$

Ejemplo

- $|\psi\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$
- $|\phi\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$

Es fácil ver que

$$|\psi\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$$

Sin embargo, usando el catalizador

$$|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|44\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|55\rangle$$

obtenemos

- $\psi \otimes c = [0{,}24, 0{,}24, 0{,}16, 0{,}16, 0{,}06, 0{,}06, 0{,}04, 0{,}04]$
- $\phi \otimes c = [0{,}30, 0{,}20, 0{,}15, 0{,}15, 0{,}10, 0{,}10, 0{,}00, 0{,}00]$

Por lo tanto

$$\psi \otimes c \prec \phi \otimes c \text{ sii } |\psi\rangle \otimes |c\rangle \underset{\mathrm{LOCC}}{\longrightarrow} |\phi\rangle \otimes |c\rangle$$

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} \left|i^A i^B\right\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$
  - si $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\not\rightarrow} |\phi\rangle$ pero $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\not\leftarrow} |\phi\rangle$

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$
  - si $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$ pero $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\nleftarrow} |\phi\rangle$
  - sólo para estados incomparables ($|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$) un catalizador podría ser útil

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$
  - si $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$ pero $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\nleftarrow} |\phi\rangle$
  - sólo para estados incomparables ($|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$) un catalizador podría ser útil
  - para dos qubits el catalizador no es útil, ya que siempre vale $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$ o $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\leftarrow} |\phi\rangle$

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$
  - si $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$ pero $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\nleftarrow} |\phi\rangle$
  - sólo para estados incomparables ($|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$) un catalizador podría ser útil
  - para dos qubits el catalizador no es útil, ya que siempre vale $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$ o $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\leftarrow} |\phi\rangle$
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$ sólo si $\psi_1 \leq \phi_1$ y $\psi_N \geq \phi_N$

Algunos resultados

Lemas de Jonathan y Plenio PRL **83**, 3566 (1999)

- El estado máximamente entrelazado $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} |i^A i^B\rangle$ no sirve como catalizador: el catalizador tiene que ser parcialmente entrelazado
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\leftrightarrow} |\phi\rangle$ sii $|\psi\rangle = U^A \otimes U^B |\phi\rangle$
  - si $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nrightarrow} |\phi\rangle$ pero $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\nleftarrow} |\phi\rangle$
  - sólo para estados incomparables ($|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\nleftrightarrow} |\phi\rangle$) un catalizador podría ser útil
  - para dos qubits el catalizador no es útil, ya que siempre vale $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$ o $|\psi\rangle \underset{\text{LOCC}}{\leftarrow} |\phi\rangle$
- $|\psi\rangle \underset{\text{ELOCC}}{\rightarrow} |\phi\rangle$ sólo si $\psi_1 \leq \phi_1$ y $\psi_N \geq \phi_N$
  - no es posible la catálsisis de estados incomparables de dos qutrits

Mayorización *Trumping*

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

Mayorización *Trumping*

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$x \prec_T y$ sii

Mayorización *Trumping*

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\, c \,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

Mayorización *Trumping*

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y $(x, y \in \Delta_d)$:

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\ c\,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\ c \,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

si $d \leq 3$, entonces $x \prec y \Leftarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Leftrightarrow$ trumping)

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\, c\,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

si $d \leq 3$, entonces $x \prec y \Leftarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Leftrightarrow$ trumping)

Schur-concavidad y aditividad [Klimesh, arXiv:0709.3680 (2007)]

$x \prec_T y$ sii $H_\alpha(x) \leq H_\alpha(y)$ para todo α con

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} \ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1 \\ \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i & \alpha = 1 \\ -\ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & 0 < \alpha < 1 \\ -\sum_{i=1}^d \ln x_i & \alpha = 0 \end{cases}$$

Mayorización *Trumping*

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y $(x, y \in \Delta_d)$:

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\, c\,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

si $d \leq 3$, entonces $x \prec y \Leftarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Leftrightarrow$ trumping)

Schur-concavidad y aditividad [Klimesh, arXiv:0709.3680 (2007)]

$x \prec_T y$ sii $H_\alpha(x) \leq H_\alpha(y)$ para todo α con

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} \ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1 \\ \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i & \alpha = 1 \\ -\ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & 0 < \alpha < 1 \\ -\sum_{i=1}^d \ln x_i & \alpha = 0 \end{cases}$$

Retículo de trumping Bosyk *et. al* Sci. Rep. **8**, 3671 (2018)

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\ c\,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

si $d \leq 3$, entonces $x \prec y \Leftarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Leftrightarrow$ trumping)

Schur-concavidad y aditividad [Klimesh, arXiv:0709.3680 (2007)]

$x \prec_T y$ sii $H_\alpha(x) \leq H_\alpha(y)$ para todo α con

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} \ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1 \\ \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i & \alpha = 1 \\ -\ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & 0 < \alpha < 1 \\ -\sum_{i=1}^d \ln x_i & \alpha = 0 \end{cases}$$

Retículo de trumping Bosyk *et. al* Sci. Rep. **8**, 3671 (2018)

- POSET (reflexividad, antisimetría y transitividad) en Δ_d

Definición Daftuar y Klimesh, PRA **64**, 042314 (2001)

x es ***trumped* mayorizado** por y ($x, y \in \Delta_d$):

$$x \prec_T y \text{ sii } \exists\ c\,(\text{catalizador}) \text{ tal que } x \otimes c \prec y \otimes c$$

$x \prec y \Rightarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Rightarrow$ trumping)

si $d \leq 3$, entonces $x \prec y \Leftarrow x \prec_T y$ (mayorización $\Leftrightarrow$ trumping)

Schur-concavidad y aditividad [Klimesh, arXiv:0709.3680 (2007)]

$x \prec_T y$ sii $H_\alpha(x) \leq H_\alpha(y)$ para todo α con

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} \ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1 \\ \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i & \alpha = 1 \\ -\ln \sum_{i=1}^d x_i^\alpha & 0 < \alpha < 1 \\ -\sum_{i=1}^d \ln x_i & \alpha = 0 \end{cases}$$

Retículo de trumping Bosyk *et. al* Sci. Rep. **8**, 3671 (2018)

- POSET (reflexividad, antisimetría y transitividad) en Δ_d
- $x, y \in \Delta_4$ (4D) y $c \in \Delta_2$ (2D): existen supremo e ínfimo $\Rightarrow$ retículo
  en general, no se sabe (Harremoës, ISITA 2004, 1422 (2004))

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left|i_X\right\rangle \left\langle i_X\right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left|i_Y\right\rangle \left\langle i_Y\right|$

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left| i_Y \right\rangle \left\langle i_Y \right|$

$$V(X;\rho)V(Y;\rho) \geq \frac{|\langle [X,Y] \rangle_\rho|^2}{4} \text{ con } V(O;\rho) = \left\langle O^2 \right\rangle_\rho - \langle O \rangle_\rho^2$$

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left| i_Y \right\rangle \left\langle i_Y \right|$

$$V(X;\rho)V(Y;\rho) \geq \frac{\left| \left\langle [X,Y] \right\rangle_\rho \right|^2}{4} \text{ con } V(O;\rho) = \left\langle O^2 \right\rangle_\rho - \left\langle O \right\rangle_\rho^2$$

- reetiquetado $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ y $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{x}_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ no cambia las probablidades $p(X;\rho) = p(X;\rho)$

Principio de incerteza

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left| i_Y \right\rangle \left\langle i_Y \right|$

$$V(X;\rho)V(Y;\rho) \geq \frac{\left| \left\langle [X,Y] \right\rangle_\rho \right|^2}{4} \text{ con } V(O;\rho) = \left\langle O^2 \right\rangle_\rho - \left\langle O \right\rangle_\rho^2$$

- reetiquetado $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ y $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{x}_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$
  no cambia las probablidades $p(X;\rho) = p(X;\rho)$
  pero cambia las varianzas $V(X;\rho) \neq V(\tilde{X};\rho)$

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left| i_Y \right\rangle \left\langle i_Y \right|$

$$V(X;\rho)V(Y;\rho) \geq \frac{\left| \left\langle [X, Y] \right\rangle_\rho \right|^2}{4} \text{ con } V(O;\rho) = \left\langle O^2 \right\rangle_\rho - \left\langle O \right\rangle_\rho^2$$

- reetiquetado $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ y $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{x}_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$
  no cambia las probablidades $p(X;\rho) = p(X;\rho)$
  pero cambia las varianzas $V(X;\rho) \neq V(\tilde{X};\rho)$
- $[X, Y] = Z$, existen estados que trivializan la cota:

Principio de incerteza

Principio de incerteza [Heisenberg (1927)]

Limitación en la preparación de estados cuánticos:
imposibilidad de preparar estados que den valores bien definidos para observables incompatibles

Relación de incerteza de Robertson [PR **34**, 163 (1929)]

observables: $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ e $Y = \sum_{i=1}^{d} y_i \left| i_Y \right\rangle \left\langle i_Y \right|$

$$V(X;\rho)V(Y;\rho) \geq \frac{\left| \left\langle [X, Y] \right\rangle_\rho \right|^2}{4} \text{ con } V(O;\rho) = \left\langle O^2 \right\rangle_\rho - \left\langle O \right\rangle_\rho^2$$

- reetiquetado $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$ y $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{x}_i \left| i_X \right\rangle \left\langle i_X \right|$
  no cambia las probablidades $p(X;\rho) = p(X;\rho)$
  pero cambia las varianzas $V(X;\rho) \neq V(\tilde{X};\rho)$
- $[X, Y] = Z$, existen estados que trivializan la cota:
  es estado dependiente (no es universal)

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado
- $c(X; Y) = 0$ sii X, Y comparten algún autoestado ($\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i)

RI de Mayorización [Friedland **et al.** PRL **111**, 230401 (2013)]

$$p(X; \rho) \otimes p(Y; \rho) \prec \omega(X; Y) \text{ con } p_i(O; \rho) = \mathrm{Tr} \, |i_O\rangle \langle i_O| \, \rho$$

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado
- $c(X; Y) = 0$ sii X, Y comparten algún autoestado ($\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i)

RI de Mayorización [Friedland **et al.** PRL **111**, 230401 (2013)]

$$p(X; \rho) \otimes p(Y; \rho) \prec \omega(X; Y) \text{ con } p_i(O; \rho) = \mathrm{Tr}\, |i_O\rangle \langle i_O|\, \rho$$

- $\omega(X; Y) \neq [1, 0, \ldots, 0]$ salvo que $\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado
- $c(X; Y) = 0$ sii X, Y comparten algún autoestado ($\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i)

RI de Mayorización [Friedland **et al.** PRL **111**, 230401 (2013)]

$$p(X; \rho) \otimes p(Y; \rho) \prec \omega(X; Y) \text{ con } p_i(O; \rho) = \mathrm{Tr}\, |i_O\rangle \langle i_O| \, \rho$$

- $\omega(X; Y) \neq [1, 0, \ldots, 0]$ salvo que $\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i
- overlap: $c = \min\limits_{i_X, i_Y} |\langle i_X | i_Y \rangle| \in \left[\frac{1}{\sqrt{d}}, 1\right]$

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado
- $c(X; Y) = 0$ sii X, Y comparten algún autoestado ($\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i)

RI de Mayorización [Friedland **et al.** PRL **111**, 230401 (2013)]

$$p(X; \rho) \otimes p(Y; \rho) \prec \omega(X; Y) \text{ con } p_i(O; \rho) = \mathrm{Tr}\, |i_O\rangle \langle i_O| \, \rho$$

- $\omega(X; Y) \neq [1, 0, \ldots, 0]$ salvo que $\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i
- overlap: $c = \min\limits_{i_X, i_Y} |\langle i_X | i_Y \rangle| \in \left[\frac{1}{\sqrt{d}}, 1\right]$
  $\omega(X; Y) = \left[\left(\frac{1+c}{2}\right)^2, 1 - \left(\frac{1+c}{2}\right)^2, 0, \ldots, 0\right]$

Relaciones de incerteza vía mayorización

Relación de incerteza

$$\mathcal{U}(X, Y; \rho) \geq c(X; Y) \geq 0$$

- $\mathcal{U}(X, Y; \rho)$: medida de la incerteza conjunta de los observables
- $c(X; Y)$ independiente del estado
- $c(X; Y) = 0$ sii X, Y comparten algún autoestado ($\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i)

RI de Mayorización [Friedland **et al.** PRL **111**, 230401 (2013)]

$$p(X; \rho) \otimes p(Y; \rho) \prec \omega(X; Y) \text{ con } p_i(O; \rho) = \mathrm{Tr} \, |i_O\rangle \langle i_O| \, \rho$$

- $\omega(X; Y) \neq [1, 0, \ldots, 0]$ salvo que $\langle i_X | i_Y \rangle = 1$ para algún i
- overlap: $c = \min\limits_{i_X, i_Y} |\langle i_X | i_Y \rangle| \in \left[\frac{1}{\sqrt{d}}, 1\right]$
  $\omega(X; Y) = \left[\left(\frac{1+c}{2}\right)^2, 1 - \left(\frac{1+c}{2}\right)^2, 0, \ldots, 0\right]$
- RI entrópica de Deutsch: $H(p(X; \rho)) + H(p(Y; \rho)) \geq -2 \ln \frac{1+c}{2}$

Bibliografía general

- A.W. Marshall, I. Olkin, B. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, 2ed., (Springer Verlag, New York City, 2011).
- M.A. Nielsen, G. Vidal, *Majorization and the interconversion of bipartite states*, Quantum Inf. Comput. **1** 76, (2001).
- I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
- G. Bellomo, G. M. Bosyk, *Majorization, across the (quantum) universe*, Cambridge University Press.