

Práctica 2: Estrategias de reducción + PCF tipado

Sección I: Estrategias de reducción

1. ¿Cuales de las siguientes reducciones son correctas?

- (a) $\lambda x.x \rightarrow \lambda x.x$
- (b) $\lambda x.x \rightarrow^* \lambda x.x$
- (c) $\lambda x.x \rightarrow^+ \lambda x.x$
- (d) $(\lambda x.\lambda y.x)tu \rightarrow t$
- (e) $(\lambda x.\lambda y.x)tu \rightarrow^* t$
- (f) $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow (\lambda x.x)t$ con $y \notin FV(t)$
- (g) $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow^* (\lambda x.x)t$ con $y \notin FV(t)$
- (h) $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow^+ (\lambda x.x)t$ con $y \notin FV(t)$
- (i) $\mu x.x \rightarrow \mu x.x$
- (j) $\mu x.x \rightarrow^* \mu x.x$
- (k) $\mu x.x \rightarrow^+ \mu x.x$

2. Determinar todos los redexes de cada término.

- (a) $(\lambda x.x)((\lambda x.x)\lambda x.x)$
- (b) $(\lambda x.\lambda y.(\lambda z.z)x)\mu x.x$
- (c) `ifz 2 – 1 then ($\lambda x.x$)2 else 1`
- (d) $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(\lambda z.z)z)y)x$

3. Dar todas las reducciones posibles de los siguientes términos.

- (a) $(\lambda x.\lambda y.yy)(\mu x.x)\lambda x.x$
- (b) $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(\lambda w.w)z)y)x$

4. ¿Cuál de los siguientes tiene forma normal?

- (a) $(\lambda x.x)((\lambda x.\lambda y.x)(\lambda y.y)(\lambda z.zz))$
- (b) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)(\lambda x.xx)$
- (c) $(\lambda x.\lambda y.xyy)(\lambda y.y)(\lambda x.xx)$

5. Dar dos términos que cumplan:

- (a) Están en forma normal.
- (b) No están en forma normal pero son fuertemente normalizables.
- (c) Normalizables pero no fuertemente normalizables.
- (d) No normalizables

6. Demostrar que un término es cerrado (es decir, sin variables libres) y en forma normal en una reducción débil sí y sólo sí tiene la forma:
 - $\lambda x.t$, con $FV(t) = \{x\}$ o $FV(t) = \emptyset$
 - $n \in \mathbb{N}$
 - uv donde u y v son cerrados e irreducibles y u no es de la forma $\lambda x.t$.
 - $u \otimes v$ donde u y v son cerrados e irreducibles y no ambos son constantes numéricas, o $u \in \mathbb{N}$, $\otimes = /$ y $v = 0$.
 - **ifz** u **then** v **else** s , donde u es cerrado e irreducible y no es una constante numérica y $FV(v) = FV(s) = \emptyset$.
7. ¿Cuales son los términos cerrados y en forma normal en call-by-name? ¿y en call-by-value?
8. Dar la traza de $(\lambda x.x \times x)(5 + 6)$ en call-by-name y en call-by-value.
9. Dar la traza de $(\lambda x.(\lambda x.0)(x + x))(Fact\ 2)$ en
 - (a) call-by-name fuerte
 - (b) call-by-name débil
 - (c) call-by-value fuerte
 - (d) call-by-value débil
10. Dar la traza de $(\lambda x.\lambda y.(1 + x) + y)((\lambda z.z \times z)2)$ en
 - (a) call-by-name fuerte
 - (b) call-by-name débil
 - (c) call-by-value fuerte
 - (d) call-by-value débil

Sección II: PCF tipado

11. Tipar los siguientes términos (si es posible).
 - (a) $\lambda x : \mathbf{nat}.x$
 - (b) $\lambda x : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat}.x$
 - (c) $\lambda x : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat}.\lambda y : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat}.xy$
 - (d) $\lambda x : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat}.\lambda y : \mathbf{nat}.xy$
 - (e) **let** $x : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat} = \lambda x : \mathbf{nat}.x + 1$ **in** $x3$
 - (f) **let** $x : \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{nat} = \lambda x : \mathbf{nat}.x + 1$ **in** $x(\lambda x : \mathbf{nat}.x)$
 - (g) $\mu f : A.\lambda n : B.\lambda m : C.\mathbf{ifz}\ m\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ n \times fn(m - 1)$
para algún A, B y C . ¿De qué función se trata?
12. Extender PCF con booleanos **true**, **false** e **if – then – else**.
 - (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
 - (b) Tipar:

- i. $\text{if } (\lambda x : A.x)\text{true then } 2 \text{ else } 1$, para algún A .
- ii. $(\lambda x : \text{bool}.\text{if } x \text{ then } (\lambda x : \text{nat}.x) \text{ else } 0)\text{false}$
- iii. $\lambda x : \text{bool}.\text{if } x \text{ then false else true}$

13. Extender PCF con constructores para pares: (t, u) , $\text{fst}(t, u)$ y $\text{snd}(t, u)$.

- (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
- (b) Escribir una suma que reciba un par y otra que reciba dos argumentos, y tiparlos.
- (c) Definir una función `curry` que tome una función que espera un par, y dos argumentos, y ejecute esa función con esos argumentos y tiparla.
- (d) Definir una función `uncurry` que tome una función que espera dos argumentos y un par, y ejecute esa función con los elementos del par, y tiparla.

14. Extender PCF con constructores de listas de números:

<code>nil</code>	(lista vacía)
<code>cons tu</code>	(agregar el elemento t a la lista u)
<code>ifnil t then u else v</code>	(if lista vacía)
<code>hd t</code>	(head)
<code>tl t</code>	(tail)

- (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
- (b) Escribir una función que sume los elementos de una lista de 4 elementos. Tiparla.
- (c) Tipar la función del ítem anterior aplicada a

`cons 0(cons (($\lambda x : \text{nat}.x + 1$)2)(cons 2(cons 1 nil)))`

y dar su traza de reducción en CBN.